

# 线性有源网络的完全有向树分析法\*

黄汝激

(北京钢铁学院自动化系)

## 提 要

本文提出了正(负)根完全有向树和正(负)根完全有向 $k$ 树的概念和线性有源网络的正(负)根完全有向树分析法。这个方法是完全树法与有向树法的统一。它没有符号问题与对消项问题。

## 一、引 言

线性有源网络的常用拓扑分析方法有两种: Mayeda 的**完全树法**<sup>[1,2]</sup>和 W. K. Chen 的**负根有向树法**<sup>[3,4]</sup>。1983年初,文献[5]提出了**正根有向树法**。完全树法的优点是**无对消项**(若元件参数代表符号都相异),缺点是确定完全树权的符号比较麻烦。有向树法的优点是**不存在符号问题**,缺点是有对消项。Chen<sup>[6]</sup>在1972年提出了(负)根完全有向树的概念,改进了他的拓扑公式。但是他的完全有向树定义是片面的、不完整的,实际上不能彻底解决对消项问题。本文把完全树与有向树的概念结合起来,提出了完整的正、负根完全有向树和正、负根完全有向 $k$ 树的定义,并且给出了不定导纳矩阵 $Y$ 之一阶余因式的正(负)根完全有向树表达式和 $k$ 阶余因式的正(负)根完全有向 $k$ 树表达式,从而形成了线性有源网络的**完全有向树分析法**。它是完全树法与有向树法的统一。它兼有前二法的优点:不含对消项,不存在符号问题(完全有向树权已包含了符号,不必另外确定符号)。

本文主要采用文献[5, 3, 2]的定义和符号。

## 二、预备知识

假设所考虑的**线性有源网络** $N$ 是连通的,具有支路导纳矩阵 $Y_c$ (从而具有不定导纳矩阵 $Y$ ),而且仅含二端元件 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 和四端元件VCCS(压控流源),独立源看作 $N$ 的外加激励(采用复频域)。这并不失去一般性,因为:(1)其他形式受控源可用 Blakesley 变换化成 VCCS;(2)多个电压控制的电流源可看作多个 VCCS 的并联;(3)互容器(互感器)可用两个电容(电感)和两个方向相反的 VCCS 来表示(见图2);(4)其他线性有源元件和多端元件可用由上述元件构成的模型来表示。

\* 1983年9月16日收到,1984年11月6日修改定稿。

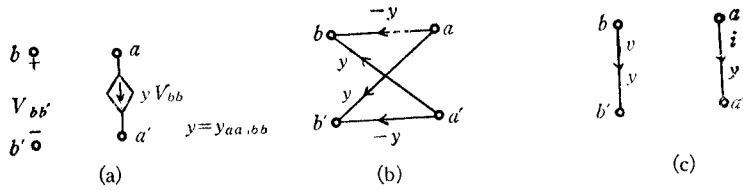
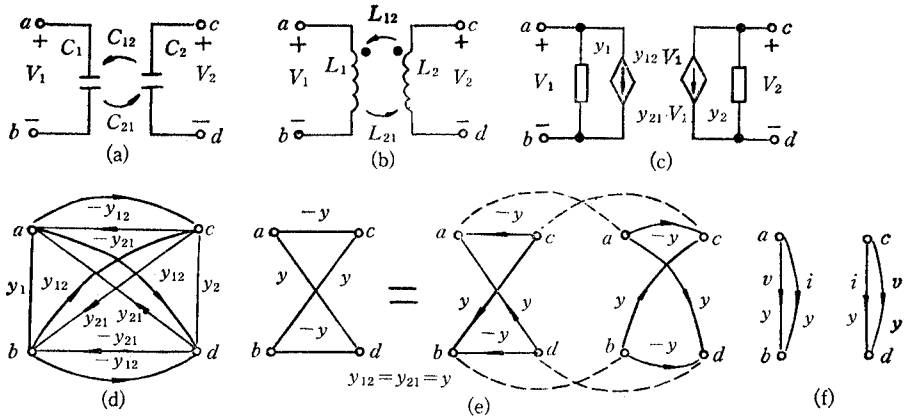


图 1 (a) 压控流源 (VCCS) (b) 受控源有向图 (CSDG) (c) 伴随电压边和伴随电流边



互容器： $y_1 = sC_1, y_2 = sC_2, y_{12} = sC_2, y_{21} = sC_{21}$ 。  
互感器： $y_1 = L_2/W, y_2 = L_1/W, y_{12} = -L_{12}/W, y_{21} = -L_{21}/W, W = s(L_1L_2 - L_{12}L_{21})$ 。  
图 2 (a) 互容器 (b) 互感器 (c) 等效电路 (d) 伴随混合图 (e) 受控源无向图 (CSUG) (f) CSUG 的伴随电压边和伴随电流边

网络  $N$  的伴随有向图和伴随混合图记作  $G_d$  和  $G_c$ <sup>[3,4]</sup>,  $G_c$  中从点  $a$  到  $b$  的有向边记作  $(a, b)$ , 无向边记作  $[a, b]$ . VCCS 的伴随有向图 (图 1(b)) 称为它的受控源有向图 (CSDG). 每个 CSDG 含有四条受控源有向边 (CSDE):  $\{(a, b), (a, b'), (a', b), (a', b')\}$ , 方向是从受控点指向控制点. VCCS 的控制边和受控边带上权 (互导)  $y$  后称为 VCCS 或 CSDG 的伴随电压边 ( $v$  边) 和伴随电流边 ( $i$  边), 如图 1(c) 所示. 互容器和互感器的等效电路 (图 2(c)) 含有两个 VCCS, 它们的伴随混合图含有两个方向相反的 CSDG. 若它们是互易的,  $y_{12} = y_{21} = y$ , 则两个 CSDG 可合成一个受控源无向图 (CSUG, 图 2(e), 虚线是短路线), 它含有四条受控源无向边 (CSUE):  $\{[c, a], [c, b], [d, a], [d, b]\}$ . 它的伴随电压边和伴随电流边各有两条 (图 2(f)). 每个受控源图中点不相重的一对受控源边, 如  $(a, b)$  与  $(a', b')$ 、 $(a, b')$  与  $(a', b)$ , 互称为对边. 图中对应于二端元件的边称为非受控源边.

从图  $G_c$  中移去所有受控源图, 添上它们的伴随  $v$  边所得图称为  $N$  的电压图  $G_v$ ; 添上伴随  $i$  边所得图称为  $N$  的电流图  $G_i$ .  $G_v$  与  $G_i$  之和称为  $N$  的合成图  $G_r$ .  $G_i$  的一个树称为完全电流树  $t_{ci}$ , 如果把其中所有  $i$  边 (若有  $i$  边) 换成对应  $v$  边会得到  $G_v$  的一个树. 后者称为  $t_{ci}$  的对应完全电压树  $t_{cv}$ .  $t_{ci}$  与  $t_{cv}$  一一对应. 每对  $t_{ci}$  和  $t_{cv}$  组成  $G_r$  的一个完全树对, 简称完全树, 记作  $t_c = \{t_{ci}, t_{cv}\}$ . 每对  $t_{ci}$  与  $t_{cv}$  具有相同的树支导纳积, 称为完全树权  $t_c(y)$ , 即  $t_c(y) = t_{ci}(y) = t_{cv}(y)$ .

对于任意树  $t$  (各边可能已标有方向), 按下法定义各边的主、副点: 设想重选各边方向, 使得  $t$  成为以参考点  $r$  为正(负)根的有向树<sup>[5]</sup>  $t_r^\uparrow(t_r^\downarrow)$ , 各边在新选方向下的终(始)点和始(终)点各称为  $t_r^\uparrow(t_r^\downarrow)$  中该边关于根  $r$  的**主点**和**副点**. 从  $t_{cv}(t_{ci})$  重选方向所得的对应正(负)根有向树记作  $t_{cvr}^\uparrow(t_{civ}^\downarrow)$ , 如图 3(a) [图 4(a)].  $t_{cvr}^\uparrow(t_{civ}^\downarrow)$  的对应完全电流(电压)树仍记作  $t_{ci}(t_{cv})$  [它的各边方向与原来  $t_{ci}(t_{cv})$  的可能不同]. 设  $t_c$  含有  $a$  个受控源有向图  $S_j(j=1, 2, \dots, a)$  的伴随  $v, i$  边(每个 CSUG 分成两个 CSDG), 从  $t_{cvr}^\uparrow(t_{civ}^\downarrow)$  中移去所有  $S_j$  的伴随  $v(i)$  边, 所得正(负)根有向  $a+1$  树记作  $t_{cvr}^\uparrow(t_{civ}^\downarrow)_{(a+1)}$ , 简记作  $t_{cr(a+1)}$ , 如图 3(c) (图 4(c)).  $S_j$  之  $v$  边和  $i$  边的主、副点各称为  $S_j$  的  $v$  主点  $\square_j$ 、 $v$  副点  $\square_j$  和  $i$  主点  $\triangle_j$ 、 $i$  副点  $\triangle_j$ . 边  $\triangle_j \rightarrow \square_j$ 、 $\triangle_j \rightarrow \square_j$  和  $\triangle_j \rightarrow \square_j$  各称为  $S_j$  的**主边**、**主-副边**和**副-主边**.

从任意树  $t$  可构造它关于任一根  $r$  的一个伴随**主树**  $t_p$ , 它是把  $t$  中各边从关于根  $r$  的副点断开, 改接到根  $r$  而得到的一个星形树.

Mayeda 证明了<sup>[1,2]</sup>: 线性网络  $N$  以任意点  $r$  为参考点的节点导纳行列式可表示为

$$Y_{(rr)} \triangleq \det Y_{rr} = \sum_a \det A(t_{cip}^{(a)}) \det A(t_{cvp}^{(a)}) t_c^{(a)}(y) = \sum_a \tilde{z}_c^{(a)}(y), \quad (1)$$

式中  $t_c^{(a)}(y)$  是  $G_r$  的第  $a$  号完全树权;  $A(t_{cip}^{(a)})$  是  $t_{ci}^{(a)}$  的伴随主树  $t_{cip}^{(a)}$  的关联阵;  $A(t_{cvp}^{(a)})$  是  $t_{cv}^{(a)}$  的伴随主树  $t_{cvp}^{(a)}$  的关联阵;  $\tilde{z}_c^{(a)}(y)$  是  $G_r$  的**带符号完全树权**, 它与参考点  $r$  的选择无关, 即不随  $r$  的变换而变(这是由于  $Y$  的等余因式性); 求和是对  $G_r$  的所有完全树进行的.

**定理 1** 完全树  $t_c$  的伴随有向  $a+1$  树  $t_{cr(a+1)}$  ( $t_{cvr}^\uparrow(t_{civ}^\downarrow)_{(a+1)}$  或  $t_{civ}^\downarrow(t_{cvr}^\uparrow)_{(a+1)}$ ) 具有下列性质:

- (1) 在  $t_{cr(a+1)}$  中,  $\triangle_j$  与  $\triangle_j$  不同片,  $\square_j$  与  $\square_j$  不同片,  $j=1, 2, \dots, a$ .
- (2)  $t_{cr(a+1)}$  的每片至少含一个  $\square_j$  或  $\square_j$  和一个  $\triangle_k$  或  $\triangle_k$ ,  $j, k \in \{1, 2, \dots, a\}$ , 即每个  $\square_j$  或  $\square_j$  ( $\triangle_j$  或  $\triangle_j$ ) 必有一条通路通到某个  $\triangle_k$  或  $\triangle_k$  ( $\square_k$  或  $\square_k$ ).
- (3) **根片**  $t_{sr}$  (含根  $r$  的连通片) 不含任何  $i, v$  主点  $\triangle_j$  和  $\square_j$ , 但至少含一个  $\triangle_j$  和一个  $\square_k$ .
- (4) 每个**非根片**  $t_{sj}$  (不含根  $r$  的连通片) 恰含一条单向通路  $\square_j \rightarrow \triangle_k$ , 称为**主通路**.
- (5) 若把  $a$  条主边  $\triangle_j \rightarrow \square_j$  ( $j=1, \dots, a$ ) 加到  $t_{cr(a+1)}$  上, 它们将与上述  $a$  条主通路形成  $c$  ( $\leq a$ ) 条单向回路  $c_\mu$ ,  $\mu=1, 2, \dots, c$ , 称为**主回路**;  $t_{cr(a+1)}$  将变成一个  $(c+1)$  片图, 称为  $G_c$  的对应于  $t_c$  的**主子图**, 记作

$$g_{pr} = \prod_{j=1}^a e_{pj} t_{cr(a+1)}, \quad e_{pj} = \triangle_j \rightarrow \square_j. \quad (2)$$

- (6) 任意  $m$  ( $1 \leq m \leq a$ ) 个非根片之和  $\sum t_{sj}$  所含的  $i$  和  $v$  主点中, 至少有一个  $i$  主点伴随的  $i$  副点和一个  $v$  主点伴随的  $v$  副点不属于  $\sum t_{sj}$ .

**证** 参看图 3 和图 4.

- (a) 若  $\triangle_j$  与  $\triangle_j$  同片, 则加上  $i$  边  $e_{ij}$  后将形成一回路, 这与“ $t_{ci}$  为树”矛盾. 故

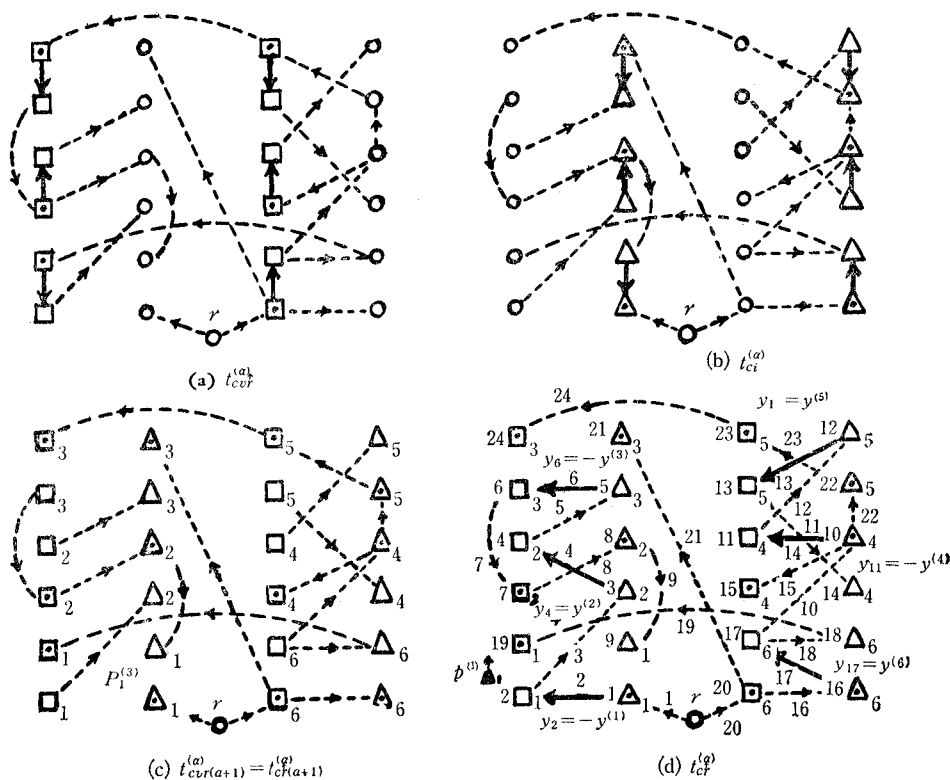


图3 正根完全有向树的产生

$\Delta_j$  与  $\Delta_i$  不同片。同理可证  $\square_j$  与  $\square_i$  不同片。

(b) 若某片不含  $v$  点或  $i$  点，则该片不能通过添加  $v$  边或  $i$  边与其他片连通，这与“ $t_{cv}$  和  $t_{ci}$  为树”矛盾。

(c) 根据主点和根片的定义，根片必不含任何  $v$  和  $i$  主点；再据性质 2，根片至少含一  $v$  副点和一  $i$  副点(图 3(c) 中根片含  $\square_6, \Delta_1, \Delta_3$  和  $\Delta_6$ )。

(d) 在定义  $v$  主点时要使  $t_{cv}$  变成  $t_{cv}^\uparrow$ ，去掉所有  $v$  边后每个非根片就是一个正根子树，它有唯一的正根，该根也是原接  $v$  边的终端，即  $v$  主点  $\square_j$ 。同理可证每个非根片恰含一个  $i$  主点  $\Delta_k$ ，从而恰含一条  $\square_j \rightarrow \Delta_k$ ，如图 3(c) 和图 4(c) 所示。

(e) 从任一主边  $\Delta_{j_1} \rightarrow \square_{i_1}$  开始，据性质 4 有  $\square_{i_1} \rightarrow \Delta_{j_2}$  接上。若  $j_2 \neq j_1$ ，可继续接上主边和主通路，因主边数  $a$  有限，最终必形成一条单向回路  $c_1$ 。若还有主边不属于  $c_1$ ，可从它开始生成  $c_2, \dots$ ，直到  $a$  条主边用完为止。

(f) 若性质 6 不成立，则从任一  $i$  边  $\Delta_{j_1} \rightarrow \Delta_{i_1}$  开始；交替接上通路  $\Delta_{j_1} \rightarrow \Delta_{i_2}$  和  $i$  边  $\Delta_{i_2} \rightarrow \Delta_{j_3}, \dots$ ，将形成一条回路。这与“ $t_{ci}$  为树”矛盾。同理可证  $v$  副点情况。

### 三、正(负)根完全有向树

设  $g_{pr}$  的含有  $c_\mu$  的连通片记作  $d_\mu$ 。从根片  $t_{sr}$  中任取一个  $i$  副点  $\Delta_{i_1}$  ( $v$  副点  $\square_{k_1}$ )，若  $\Delta_{i_1}(\square_{k_1}) \in d_{\mu_1}$ ，则用边  $e_{j_1} = \Delta_{i_1} \rightarrow \square_{i_1}$  代替  $e_{pj_1} = \Delta_{i_1} \rightarrow \square_{i_1}$  (用  $e_{k_1} = \Delta_{k_1} \rightarrow \square_{k_1}$

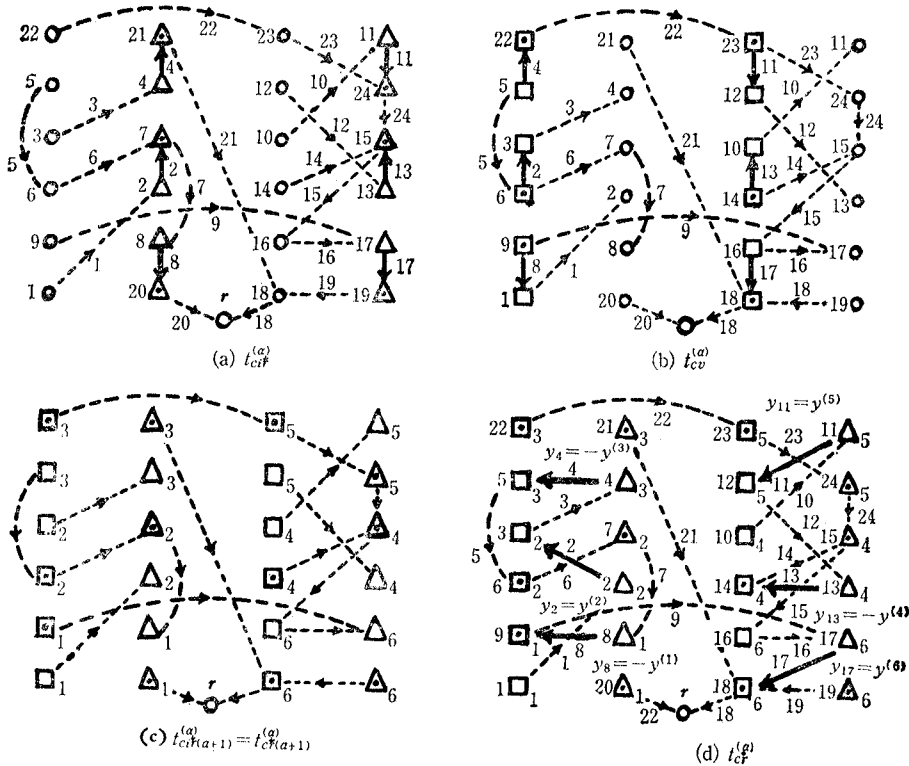


图 4 负根完全有向树的产生

代替  $e_{pk_1} = \Delta_{k_1} \rightarrow \square_{k_1}$ , 将使  $t_{sr} \cup d_{\mu_1}$  变成一个正(负)根子树  $t_{sr_1}^\uparrow(t_{sr_1}^\downarrow)$ . 若后者含  $\Delta_{i_2}(\square_{k_2})$  但不含  $\Delta_{i_2}(\square_{k_2})$  且  $\Delta_{i_2}(\square_{k_2}) \in D_{\mu_2}$ , 则用  $e_{i_2}$  代替  $e_{pi_2}$  ( $e_{k_2}$  代替  $e_{pk_2}$ ), 将使  $t_{sr_1}^\uparrow(t_{sr_1}^\downarrow) \cup d_{\mu_2}$  变成一个正(负)根子树  $t_{sr_2}^\uparrow(t_{sr_2}^\downarrow), \dots$ , 直到全部  $v, i$  主副点都联成一片为止. 全部主回路都被开断了,  $g_{pr}$  变成一个正(负)根树  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$ , 称为  $G_c$  的对应于  $t_c$  的一个正(负)根完全有向树, 简称完全正(负)根树. 例如在图 3(图 4)(c) 中添上所有主边后即变成主子图, 从它用上述生长有向树的方法可生成一个完全正(负)根树如图 3(图 4)(d) 所示.  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  的存在性是定理 1 的推论.

对应于一个  $t_c$  的  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  可能多于一个, 它们的集合称为对应于该  $t_c$  的完全正(负)根树类, 记作  $\hat{t}_{cr}^\uparrow(\hat{t}_{cr}^\downarrow)$ . 一个  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  的所有树支导纳的乘积称为完全正(负)根树权, 记作  $\hat{t}_{cr}^\uparrow(y)(\hat{t}_{cr}^\downarrow(y))$ . 显然, 一个  $\hat{t}_{cr}^\uparrow(\hat{t}_{cr}^\downarrow)$  的所有  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  具有相同的权, 可称为该  $\hat{t}_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  的权, 记作  $\hat{t}_{cr}^\uparrow(y)(\hat{t}_{cr}^\downarrow(y))$ .

从  $g_{pr}$  生成  $t_{cr}^\uparrow(t_{cr}^\downarrow)$  时, 每条主回路  $c_\mu$  被开断, 变成一条单向通路, 记作  $p_\mu = p^{(w) \uparrow}_{\Delta_j}$  ( $p^{(w) \downarrow}_{\square_k}$ ), 这里  $\Delta_j(\square_k)$  表示  $p_\mu$  的始(终)点, 它的终(始)点是  $\Delta_j(\square_k)$ .  $p_\mu$  所含受控源边的数目记作  $w_\mu$ . Chen 的完全有向树定义<sup>[6]</sup> 相当于这里所有  $w_\mu \geq 2$  的特殊情况.

**定理 2 (完全有向树权)** 正根和负根完全有向树类权都等于对应的带号完全树权, 即

$$\hat{t}_{cr}^{(a) \uparrow}(y) = \hat{t}_{cv}^{(a) \downarrow}(y) = \det A(t_{ci}^{(a)}) \det A(t_{cv}^{(a)}) t_c^{(a)}(y) = \hat{t}_c^{(a)}(y), \quad (3)$$

而且它们不随  $t_c^{(a)}$  中根  $r$  的变换而变.

证：参看图 4。选择各边方向使  $t_{ci}^{(\alpha)}$  成为  $t_{ci}^{(\alpha)\downarrow}$ ，从它产生  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$ 。从  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$  的 1 号单向通路  $p_1^{(\alpha)\downarrow}$  的始点  $\square$  (标作点 1) 开始，顺向走过各个单向通路及其有关边，依次给各点和各边编号，使得每边编号与其主点编号相同。选择  $t_{ci}^{(\alpha)\downarrow}$  和  $t_{cv}^{(\alpha)}$  的点和非  $i, v$  边的编号与  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$  中的相同， $i, v$  边的编号与  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$  中对应受控源边的编号相同。

在这样选择边方向和点、边编号情况下， $t_{crp}^{(\alpha)\downarrow}$  与  $t_{cip}^{(\alpha)}$  相同，且是负根星形树，因此有

$$\Delta(t_{crp}^{(\alpha)\downarrow}) = A(t_{cip}^{(\alpha)}) = I \tag{4.1}$$

$$\det A(t_{crp}^{(\alpha)\downarrow}) = \det A(t_{cip}^{(\alpha)}) = 1 \tag{4.2}$$

式中  $I$  是单位方阵。

$A(t_{cvp}^{(\alpha)})$  是分块对角阵。例如图 4(b) 所示  $t_{cvp}^{(\alpha)}$  所对应的  $A(t_{cvp}^{(\alpha)})$  如式 (5) 所示(式中空位皆为 0)。每条  $p_\mu$  所含边及其主点对应于  $A(t_{cvp}^{(\alpha)})$  的一个阶数  $\geq 2$  的分块。其余每条

$$\begin{array}{c}
 \text{边} \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \\
 \text{点} \\
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline 9 \\ \hline 10 \\ \hline 11 \\ \hline 12 \\ \hline 13 \\ \hline 14 \\ \hline 15 \\ \hline 16 \\ \hline 17 \\ \hline 18 \\ \hline 19 \\ \hline 20 \\ \hline 21 \\ \hline 22 \\ \hline 23 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 A(t_{cvp}^{(\alpha)}) =
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline 1 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline 1 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}
 \tag{5}$$

边及其主点对应于一个对角线元素 1 (因为这些边的主点在  $t_{cv}^{(\alpha)}$ 、 $t_{ci}^{(\alpha)\downarrow}$  和  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$  中是一样的)，它们对  $\det A(t_{cvp}^{(\alpha)})$  的贡献因子是 (+1)。考虑 1 号单向通路  $p_1$ ，设它有  $l$  条边： $e_1, e_2, \dots, e_l$ 。在  $t_{cr}^{(\alpha)\downarrow}$  和  $t_{ci}^{(\alpha)\downarrow}$  中  $e_1, e_2, \dots, e_l$  的主点为  $1, 2, \dots, l$ ，在  $t_{cv}^{(\alpha)}$  中则为  $2, 3, \dots, l, 1$ ，二者形成一个主点独立循环置换  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l-1 & l \\ 2 & 3 & \dots & l & 1 \end{pmatrix}$ 。  $p_1$  所对应的分块  $A^{(1)}(t_{cvp}^{(\alpha)})$  一般具有下面的形式：

$$A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)}) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & \cdots & e_k & e_{k+1} & e_{k+2} & \cdots & e_{l-1} & e_l \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ \vdots \\ l-1 \\ l \end{matrix} & & & & & & & & & \pm 1 \\ & -1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \pm 1 & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & -1 \end{matrix}, \quad (6)$$

式中空位皆为 0。从  $t_{cr}^{(a)\downarrow}(t_{ci}^{(a)\downarrow})$  变成  $t_{cv}^{(a)}$  时, 每条非受控源边  $e_j$  的前方受控源边 ( $i$  边) 移去了, 换成  $v$  边, 必须反向走过  $e_j$  才能通到根  $r$ , 所以  $e_j$  从射出主点  $i$  变成射入主点  $j+1$ , 它对  $A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$  贡献元素  $(j+1, j) = -1$ , 从而对  $\det A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$  贡献因子  $(-1)^{(j+1)+j}(-1) = 1$  (这可从按第  $j$  列展开  $\det A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$  得到)。主受控源边  $(k, k+1)$  和主-副受控源边  $(l, l+1)$  的对应  $v$  边及其主点对  $A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$ 、从而对  $A(t_{cvp}^{(a)})$  贡献的元素与对  $\det A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$ 、从而对  $\det A(t_{cvp}^{(a)})$  贡献的因子共有四种情况如表 1 所示。比较表 1 第 1 列中  $y^{(h)}$ 、 $y^{(l)}$  前的符号与第 4 列中的因子, 可见二者是一致的。由此推得  $\tilde{z}_{cr}^{(a)\downarrow}(y) = \tilde{z}_c^{(a)}(y)$ 。类似地, 从  $t_{cvr}^{(a)\uparrow}$  出发可证  $\tilde{z}_{cr}^{(a)\uparrow}(y) = \tilde{z}_c^{(a)}(y)$ 。再据式 (1) 下的说明, 即得定理 2。

表 1

$t_{ci}^{(a)\downarrow}$ 的受控源边及其主点 $\Delta$	$t_{cv}^{(a)}$ 的对应 $v$ 边及其主点 $\square$	对 $A(t_{cvp}^{(a)})$ 贡献的元素	对 $\det A(t_{cvp}^{(a)})$ 贡献的因子
		$(k+1, k) = -1$	$(-1)^{(k+1)+k}(-1) = 1$
		$(k+1, k) = 1$	$(-1)^{(k+1)+k}(+1) = -1$
		$(1, l) = -1$	$-1$ $\because A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$ 对前 $l-1$ 列展开后, 只剩下元素 $(1, l) = -1$
		$(1, l) = 1$	$1$ $\because A^{(1)}(t_{cvp}^{(a)})$ 对前 $l-1$ 列展开后, 只剩下元素 $(1, l) = 1$

注:  $y^{(h)}$  表示受控源  $S_h$  的互导。

**推论 1**  $t_{ci}^{(a)}$  各边主点与  $t_{cv}^{(a)}$  对应边主点组成一个置换(称为完全树主点置换)。它

可以分解为一些独立循环置换<sup>[7]</sup>的乘积: 每个多位独立循环置换对应于一条含源单向通路  $p_\mu$ , 每个一位不变置换对应于一条不属于任何  $p_\mu$  的树支。

从定理 2、式 (1) 和  $Y$  的等余因式性<sup>[5]</sup> 可推得

**定理 3** ( $Y_{(i_1, i_1)}$  的完全有向树表达式) 线性有源网络  $N$  的伴随不定导纳阵  $Y$  的一阶余因式可表达成

$$Y_{(i_1, i_1)} \triangleq (-1)^{i_1+i_1} |Y_{i_1, i_1}| = \sum_{\alpha} \hat{z}_{cr}^{(\alpha)\uparrow}(y) = \sum_{\alpha} \hat{z}_{cr}^{(\alpha)\downarrow}(y), \quad (7)$$

式中  $\hat{z}_{cr}^{(\alpha)\uparrow}(y)$  和  $\hat{z}_{cr}^{(\alpha)\downarrow}(y)$  分别是  $N$  的伴随混合图  $G_c$  的正根和负根完全有向树类权。

#### 四、完全 $k$ 树和正(负)根完全有向 $k$ 树

图  $G_i$  的点  $i_1, \dots, i_k$  各在一片中的一个  $k$  树  $t_{ci(i_1, \dots, i_k)}$  称为**完全电流  $k$  树**, 若把其中所有  $i$  边换成对应的  $v$  边会得到  $G_v$  的点  $i_1, \dots, i_k$  各在一片中的一个  $k$  树  $t_{cv(i_1, \dots, i_k)}$ 。后者称为前者的对应**完全电压  $k$  树**。二者是一一对应的, 组成  $G_r$  的一个**完全  $k$  树对**, 简称**完全  $k$  树**, 记作

$$t_{c(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)} = \{t_{ci(i_1, \dots, i_k)}, t_{cv(i_1, \dots, i_k)}\}.$$

它们的权相等, 称为**完全  $k$  树权**, 即

$$t_{c(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)}(y) = t_{ci(i_1, \dots, i_k)}(y) = t_{cv(i_1, \dots, i_k)}(y). \quad (8)$$

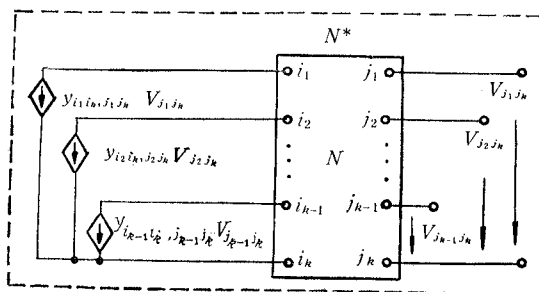


图 5 网络  $N$  的增广网络  $N^*$

设  $2k$  端网络  $N$  的端点为  $i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k$ , 外接  $k-1$  个互导纳为  $y_{i_h i_k, j_h j_k}$  ( $h=1, 2, \dots, k-1$ ) 的压控流源到  $N$  的  $2k$  端所得网络  $N^*$  (图 5) 称为网络  $N$  的**增广网络**。根据上述定义显然有

**引理 1** 设线性网络  $N$  的增广网络为  $N^*$ , 从  $N^*$  的合成图  $G_r^*$  的含有  $k-1$  个外接受控源电流(电压)边  $y_{i_h i_k, j_h j_k}$  ( $h=1, 2, \dots, k-1$ ) 的任一完全电流(电压)树  $t_{ci}^{*(\alpha)}(t_{cv}^{*(\alpha)})$  中去掉电流(电压)边  $y_{i_h i_k, j_h j_k}$  ( $h=1, \dots, k-1$ ), 就得到  $N$  的合成图  $G_r$  的一个对应完全电流(电压)  $k$  树  $t_{ci}^{(\alpha)}(t_{cv}^{(\alpha)})$ , 而且二者的权有如下关系:

$$t_{c(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)}^{(\alpha)}(y) = t_c^{*(\alpha)}(y) \prod_{h=1}^{k-1} y_{i_h i_k, j_h j_k}. \quad (9)$$

根据引理 1, 可以通过找  $G_r^*$  的完全树(这已有现成算法<sup>[8]</sup>) 来求得  $G_r$  的完全  $k$  树。



**引理 2** 设  $t_c^{*(\alpha)} = \{t_{ci}^{*(\alpha)}, t_{cv}^{*(\alpha)}\}$  是  $G_r^*$  中含有  $k-1$  个边  $y_{ihik}j_{hik}$  ( $h = 1, \dots, k-1$ ) 的一个完全树, 分别选择各边方向使  $t_{ci}^{*(\alpha)}$  成为以  $i_k$  为负根的有向树  $t_{ci}^{*(\alpha)\downarrow} t_{ik} t_{cv}^{*(\alpha)}$  成为以  $i_k$  为正根的有向树  $t_{cv}^{*(\alpha)\uparrow} t_k$ , 从它们出发分别构造一个负根完全有向树类  $\hat{t}_c^{*(\alpha)\downarrow}$  和一个正根完全有向树类  $\hat{t}_c^{*(\alpha)\uparrow}$ , 那么去掉受控源边  $y_{ihik}j_{hik}$  ( $h = 1, \dots, k-1$ ), 就得到一个以  $i_1, \dots, i_k$  为负根的有向  $k$  树类  $\hat{t}_c^{(\alpha)\downarrow}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$  (称为  $G_c$  的负根完全有向  $k$  树类) 和一个以  $i_1, \dots, i_k$  为正根的有向  $k$  树类  $\hat{t}_c^{(\alpha)\uparrow}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$  (称为  $G_c$  的正根完全有向  $k$  树类); 它们的权为

$$\hat{t}_c^{(\alpha)\downarrow}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y) = \frac{\hat{t}_c^{*(\alpha)\downarrow}(y)}{\prod_{h=1}^{k-1} y_{ihik}j_{hik}} = \frac{\hat{t}_c^{*(\alpha)\uparrow}(y)}{\prod_{h=1}^{k-1} y_{ihik}j_{hik}} = \hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y). \quad (10)$$

证: 因  $t_{ci}^{*(\alpha)\uparrow} t_k (t_{cv}^{*(\alpha)\downarrow} t_k)$  以  $i_k(i_k)$  为正(负)根,  $i_k(i_k)$  的入(出)度必为 0, 受控源边  $y_{ihik}j_{hik}$  ( $h = 1, \dots, k-1$ ) 不能射入(出)  $i_k(i_k)$ , 只能射入  $i_h$  (射出  $i_h$ ), 故去掉边  $y_{ihik}j_{hik}$  后,  $i_1, \dots, i_k$  各在一片中,  $j_1, \dots, j_k$  也各在一片中, 而且  $i_1, \dots, i_k$  的  $\lambda$  度为 0 ( $i_1, \dots, i_k$  的出度为 0), 即  $i_1, \dots, i_k$  为正根( $i_1, \dots, i_k$  为负根). 据定理 2 有  $\hat{t}_c^{*(\alpha)\downarrow}(y) = \hat{t}_c^{*(\alpha)\uparrow}(y)$ , 再据完全有向  $k$  树类的定义, 即可推得式 (10).

根据定理 2 和式 (9)、(10) 容易推得

**定理 4** (完全有向  $k$  树权) 正(负)根完全有向  $k$  树类权(即该类中任一完全有向  $k$  树的权)等于其对应完全  $k$  树的带号完全  $k$  树权, 即

$$\hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y) = \hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y) \\ = \det A(t_{cip}^{*(\alpha)}) \det A(t_{cvp}^{*(\alpha)}) t_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y), \quad (11)$$

式中  $t_{cip}^{*(\alpha)}$  和  $t_{cvp}^{*(\alpha)}$  各是  $t_{ci}^{*(\alpha)}$  和  $t_{cv}^{*(\alpha)}$  的伴随主树.

**定理 5** ( $Y_{(i_1, \dots, i_k)j_k}$  的完全有向  $k$  树表达式) 线性网络  $N$  的伴随不定导纳阵  $Y$  的  $k$  阶余因式  $Y_{(i_1, \dots, i_k)j_k}$  可用完全  $k$  树和完全有向  $k$  树表示为:

$$Y_{(i_1, \dots, i_k)j_k} = \left( \prod_{h=1}^{k-1} y_{ihik}j_{hik} \right)^{-1} \sum_{\alpha} \det A(t_{cip}^{*(\alpha)}) \det A(t_{cvp}^{*(\alpha)}) t_c^{*(\alpha)}(y) \quad (12 a)$$

$$= \sum_{\alpha} \det A(t_{cip}^{*(\alpha)}) \det A(t_{cvp}^{*(\alpha)}) t_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y), \quad (12 b)$$

$$Y_{(i_1, \dots, i_k)j_k} = \left( \prod_{h=1}^{k-1} y_{ihik}j_{hik} \right)^{-1} \sum_{\alpha} \hat{t}_c^{*(\alpha)\uparrow}(y) = \left( \prod_{h=1}^{k-1} y_{ihik}j_{hik} \right)^{-1} \sum_{\alpha} \hat{t}_c^{*(\alpha)\downarrow}(y) \quad (13 a)$$

$$= \sum_{\alpha} \hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y) = \sum_{\alpha} \hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)(y), \quad (13 b)$$

式 (12 a) 和 (13 a) 的求和是分别对所有含  $k-1$  条边  $y_{ihik}j_{hik}$  ( $h = 1, \dots, k-1$ ) 的完全树  $t_c^{*(\alpha)}$  和正(负)根完全有向树类  $\hat{t}_c^{*(\alpha)\uparrow}$  ( $\hat{t}_c^{*(\alpha)\downarrow}$ ) 进行的; 式 (12 b) 和 (13 b) 的求和是分别对  $i_1, \dots, i_k$  各在一片,  $j_1, \dots, j_k$  也各在一片的所有完全  $k$  树  $t_c(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$  和正(负)根完全有向  $k$  树类  $\hat{t}_c^{(\alpha)}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$  ( $\hat{t}_c^{(\alpha)\downarrow}(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$ ) 进行的.

**证** 设  $y_{(h)} = y_{ihik}j_{hik}$  则图 5 所示  $N^*$  的不定导纳阵为

$$Y^* = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i_1 \\ \vdots \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{k-1} \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_{k-1} & \cdots & j_k & \cdots & n \\ & & y^{(1)} & & & & & & -y^{(1)} & & \\ & & & & y^{(2)} & & & & -y^{(2)} & & \\ & & & & & & y^{(k-1)} & & -y^{(k-1)} & & \\ & & & & & & & & & & \sum_{h=1}^{k-1} y^{(h)} \\ & & & & -y^{(1)} & -y^{(2)} & -y^{(k-1)} & & & & \end{bmatrix} + Y, \quad (14)$$

式中  $Y$  为网络  $N$  的不定导纳阵；右边第一个  $n$  阶方阵为  $N$  的外接  $k-1$  个压控流源的不定导纳阵，其中空位皆为 0， $n$  为  $N$  的顶点数。求  $Y^*$  中元素  $(i_k, j_k)$  的余因式  $Y_{(i_k j_k)}^*$  内含  $\prod_{h=1}^{k-1} y^{(h)}$  的那些项，可得

$$Y_{(i_k j_k)}^* = \left( \prod_{h=1}^{k-1} y^{(h)} \right)^{-1} \sum Y_{(i_k j_k)}^* \text{ 内含 } \prod_{h=1}^{k-1} y^{(h)} \text{ 的项} \quad (15)$$

从上式和式(1)，考虑到  $Y_{(i_k j_k)}^* = Y_{(r r)}^*$ ，可推得(12 a)；再用式(9)，即得(12 b)；再用式(11)和(10)，即得(13 b)和(13 a)，证毕。

式(12)是 Mayeda 关于二阶余因式的完全  $\omega$  树表达式<sup>[1,2]</sup>的推广。若  $N$  中各元件参数的代表符号皆相异，则式(12)和(13)没有对消项。完全有向  $k$  树表达式(13)远比完全  $k$  树表达式(12)和有向  $k$  树表达式<sup>[5]</sup>简单。

### 五、网络函数的完全有向树表达式

考虑二口网络  $N$ (图 6)。设在口  $i_1 i_2$  外加独立电流源  $I_{i_1 i_2}$ ，求从口  $i_1 i_2$  到  $j_1 j_2$  的**开路转移阻抗**  $Z_{0, i_1 i_2 \rightarrow j_1 j_2}$ 。设想用正反馈压控流源  $y_{i_1 i_2, j_1 j_2} V_{j_1 j_2} = -I_{i_1 i_2}$  代替独立电流源  $I_{i_1 i_2}$ ，仍可维持  $N$  的工作状态不变。这时  $N^*$  没有外加独立源，而其节点方程有非零解，它的节点导纳行列式  $Y_{(j_2 j_2)}^*$  必为 0，从而据定理 3 有

$$Y_{(j_2 j_2)}^* = \sum_{\alpha} \hat{t}_{e_{j_2}^{\alpha}}^*(y) + \sum_{\alpha_{11}} \hat{t}_{e_{j_2}^{\alpha_{11}}}^*(y) = 0, \quad (16)$$

式中  $\hat{t}_{e_{j_2}^{\alpha}}^*$  是  $G_c^*$  的不含边  $y_{i_1 i_2, j_1 j_2}$  的(即  $N$  的伴随混合图  $G_c$  的)完全有向树类， $\hat{t}_{e_{j_2}^{\alpha_{11}}}^*$  是  $G_c^*$  中含受控源边  $y_{i_1 i_2, j_1 j_2}$  的完全有向树类。从上式可求得  $N$  的**开路转移阻抗**

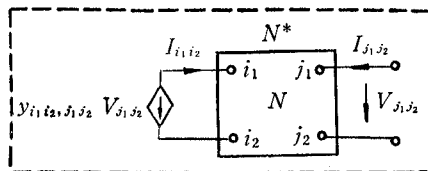


图 6 带受控源  $y_{i_1 i_2, j_1 j_2} V_{j_1 j_2}$  的网络

$$Z_{0,i_1i_2 \rightarrow j_1j_2} \triangleq \frac{V_{i_1i_2}}{I_{i_1i_2}} \Big|_{j_1j_2=0} = -y_{i_1i_2,j_1j_2}^{-1} = \frac{y_{i_1i_2,j_1j_2}^{-1} \sum_a \hat{z}^{*(\alpha_{21})\uparrow}_2(y)}{\sum_a \hat{z}^{(\alpha_{21})\uparrow}_2(y)}. \quad (17)$$

若把负导纳  $y_{i_1i_2}$  接到  $N$  的口  $i_1i_2$  上, 形成一个增广网络  $N^{**}$ , 则类似地可求得口  $i_1i_2$  的**开路输入阻抗**的表达式. 把下标  $i, j$  对换, 可得另外两个开路阻抗表达式. 因此得  $N$  的**开路阻抗矩阵**

$$Z_0 = \begin{bmatrix} Z_{0,i_1i_2} & Z_{0,i_1i_2 \rightarrow j_1j_2} \\ Z_{0,i_1i_2 \rightarrow j_1j_2} & Z_{0,i_1i_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} W_{i_1i_2} & W_{j_1j_2,i_1i_2} \\ W_{i_1i_2,j_1j_2} & W_{i_1i_2} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中

$$V \triangleq Y_{(j_1j_2)} = \sum_a \hat{z}^{(\alpha_{21})\downarrow}_2(y) = \sum_a \hat{z}^{(\alpha_{21})\downarrow}_2(y), \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} W_{i_1i_2,j_1j_2} &\triangleq Y_{(i_1i_2,i_1i_2)} = y_{i_1i_2,j_1j_2}^{-1} \sum_a \hat{z}^{*(\alpha_{21})\uparrow}_2(y) = y_{i_1i_2,j_1j_2}^{-1} \sum_a \hat{z}^{*(\alpha_{21})\downarrow}_2(y) \\ &= \sum_{\alpha_{21}} \hat{z}^{(\alpha_{21})\downarrow}_2(i_1,i_2; \uparrow_1, \uparrow_2)(y) = \sum_{\alpha_{21}} \hat{z}^{(\alpha_{21})\downarrow}_2(i_1, \downarrow_1; i_2, \downarrow_2)(y), \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\begin{aligned} W_{i_1i_2} &\triangleq Y_{(i_1i_2,i_1i_2)} = y_{i_1i_2}^{-1} \sum_{\alpha_{11}} \hat{z}^{*(\alpha_{11})\uparrow}_2(y) = y_{i_1i_2}^{-1} \sum_{\alpha_{11}} \hat{z}^{*(\alpha_{11})\downarrow}_2(y) \\ &= \sum_{\alpha_{11}} \hat{z}^{(\alpha_{11})\downarrow}_2(i_1, \uparrow_1; \uparrow_2)(y) = \sum_{\alpha_{11}} \hat{z}^{(\alpha_{11})\downarrow}_2(i_1, \downarrow_1; i_2)(y). \end{aligned} \quad (19c)$$

把后两式中下标  $i, j$  对换, 可得  $W_{j_1j_2,i_1i_2}$  和  $W_{j_1j_2}$  的表达式.

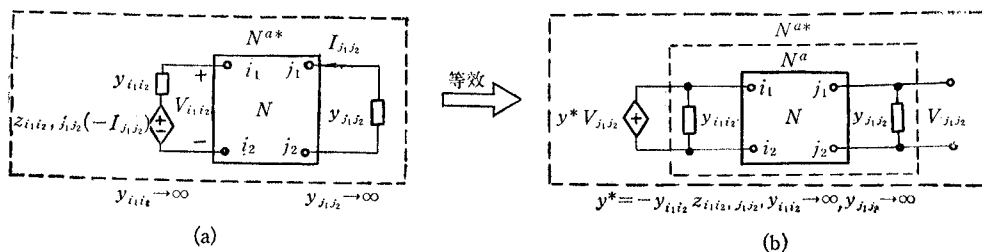


图7 带受控源  $Z_{i_1i_2,j_1j_2}(-I_{j_1j_2})$  的网络

设在  $N$  的口  $i_1i_2$  外加独立电压源  $V_{i_1i_2}$ , 求从口  $i_1i_2$  到口  $j_1j_2$  的**短路转移导纳**  $Y_{s,i_1i_2 \rightarrow j_1j_2}$ . 设想用正反馈流控压源  $Z_{i_1i_2,j_1j_2}(-I_{j_1j_2}) = V_{i_1i_2}$  代替独立电压源  $V_{i_1i_2}$ , 仍可维持  $N$  的工作状态(图7(a),  $y_{i_1i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1j_2} \rightarrow \infty$ ). 这时网络  $N^{a*}$  的节点导纳行列式  $Y_{(j_1j_2)}^{a*} |_{y_{i_1i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1j_2} \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . 为了便于计算, 把流控压源变成压控流源(图7(b)). 当  $y_{i_1i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1j_2} \rightarrow \infty$  时,  $N^{a*} \rightarrow N^s$ ,  $N^s$  是  $N$  的两个口都短路时得到的网络. 有关  $N^s$  的行列式和有向树都添上右上标  $s$ . 令  $\hat{z}^{a(\beta)}\uparrow_2$  表示  $N^a$  的伴随混合图  $G_c^a$  中含边  $y_{i_1i_2}$  和  $y_{j_1j_2}$  的完全有向树类,  $\hat{z}^{*(\beta_{21})\uparrow}_2$  表示  $N^{a*}$  的伴随混合图  $G_c^{a*}$  中含受控源边  $y^*$  (从而不含边  $y_{i_1i_2}$  和  $y_{j_1j_2}$ ) 的完全有向树类,  $\hat{z}^{a(\beta)}\downarrow_2$  表示  $G_c^a$  中不含或仅含边  $y_{i_1i_2}$  和  $y_{j_1j_2}$  之一的完全有向树类, 则据定理3有

$$\frac{Y_{(j_1j_2)}^{a*}}{y_{i_1i_2}y_{j_1j_2}} \Big|_{y_{i_1i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1j_2} \rightarrow \infty} = \left[ \frac{\sum_{\beta} \hat{z}^{a(\beta)}\uparrow_2(y)}{y_{i_1i_2}y_{j_1j_2}} + \frac{\sum_{\beta_{21}} \hat{z}^{*(\beta_{21})\uparrow}_2(y)}{y_{i_1i_2}y_{j_1j_2}} + \frac{\sum_{\beta} \hat{z}^{a(\beta)}\downarrow_2(y)}{y_{i_1i_2}y_{j_1j_2}} \right] \Big|_{y_{i_1i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1j_2} \rightarrow \infty}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\beta} \hat{z}^{s(\beta)}_{c_j^2}(\mathbf{y}) + (-Z_{i_1 i_2, j_1 j_2}) \left[ \mathbf{y}^{*-1} \sum_{\beta_{21}} \hat{z}^{*(\beta_{21})}(\mathbf{y}) \right]_{y_{i_1 i_2} \rightarrow \infty, y_{j_1 j_2} \rightarrow \infty} \\
 &= V^s + (-Z_{i_1 i_2, j_1 j_2}) W_{i_1 i_2, j_1 j_2} = 0.
 \end{aligned} \quad (20)$$

从上式可求得  $N$  的短路转移导纳

$$Y_{s, i_1 i_2 \rightarrow j_1 j_2} \triangleq \frac{I_{i_1 i_2}}{V_{i_1 i_2}} \Big|_{v_{j_1 j_2} = 0} = -Z_{i_1 i_2, j_1 j_2}^{-1} = -\frac{W_{i_1 i_2, j_1 j_2}}{V^s}. \quad (21)$$

若把口  $i_1 i_2$  短路, 在口  $i_1 i_2$  外接这样一个负导纳  $y_{i_1 i_2}$  (图 8), 使得  $N^{b*}$  的节点导纳行列式  $Y_{(j_2)}^{b*} = 0$ , 也可得非零解。令  $\hat{z}^{b*(\beta)}_{c_j^2}$  表示  $N^{b*}$  的伴随混合图  $G_c^{b*}$  中含  $y_{i_1 i_2}$  的完全有向树类,  $\hat{z}^{b(\beta_{11})}_{c_j^2}$  表示  $G_c^{b*}$  中不含  $y_{i_1 i_2}$  的 (即  $G_c^b$ ) 的完全有向树类, 则有

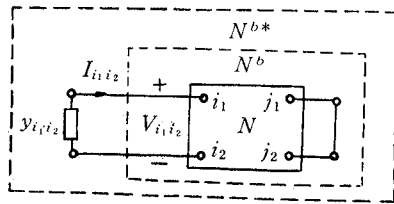


图 8 带负导纳  $y_{i_1 i_2}$  的网络

$$\begin{aligned}
 Y_{(j_2)}^{b*} &= \sum_{\beta} \hat{z}^{b*(\beta)}_{c_j^2}(\mathbf{y}) + \sum_{\beta_{11}} \hat{z}^{b(\beta_{11})}_{c_j^2}(\mathbf{y}) \\
 &= y_{i_1 i_2} \sum_{\beta} \hat{z}^{s(\beta)}_{c_j^2}(\mathbf{y}) + \sum_{\beta_{11}} \hat{z}^{(\beta_{11})}_{c(j_1, j_2)}(\mathbf{y}) = y_{i_1 i_2} V^s + W_{i_1 i_2} = 0.
 \end{aligned} \quad (22)$$

从上式可求得  $N$  的短路输入导纳

$$Y_{s, i_1 i_2} \triangleq \frac{I_{i_1 i_2}}{V_{i_1 i_2}} \Big|_{v_{j_1 j_2} = 0} = -y_{i_1 i_2} = \frac{W_{i_1 i_2}}{V^s}. \quad (23)$$

在式(21)和(23)中对换下标  $i, j$ , 可得另外两个短路导纳表达式。因此得  $N$  的短路导纳矩阵

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} Y_{s, i_1 i_2} & Y_{s, j_1 j_2 \rightarrow i_1 i_2} \\ Y_{s, i_1 i_2 \rightarrow j_1 j_2} & Y_{s, j_1 j_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{V^s} \begin{bmatrix} W_{i_1 j_2} & -W_{i_1 j_2, i_1 i_2} \\ -W_{i_1 i_2, j_1 j_2} & W_{i_1 i_2} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中  $W$  参数表达式与式 (19b-c) 相同, 而

$$V^s \triangleq Y_{(j_2)}^s = \sum_{\beta} \hat{z}^{s(\beta)}_{c_j^2}(\mathbf{y}) = \sum_{\beta} \hat{z}^{s(\beta)}_{c_j^2}(\mathbf{y})$$

是  $N^s$  的伴随有向图  $G_c^s$  的正或负根完全有向树类权之和

限于篇幅, 其他网络函数表达式和应用举例从略。

本文提出的产生完全有向树和完全有向  $k$ -树的方法要求先产生完全树。如何更直接更有效地产生完全有向树? 这是一个具有重要实际意义的研究课题。

## 参 考 文 献

- [1] W. Mayeda, Graph Theory, John Wiley and Sons, Inc., 1972, Ch. 8.
- [2] S. P. Chan, Introductory Topological Analysis of Electrical Networks, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969, Ch. 8.
- [3] W. K. Chen, Applied Graph Theory, Amsterdam: North-Holland, 1976, Ch. 4.

- [ 4 ] 陈树柏主编,网络图论及其应用,科学出版社,1982,第七章.  
[ 5 ] 黄汝激,有源网络不定导纳矩阵一般 $k$ 阶余因式的拓扑表达式,电子科学学刊, 2(1985),81.  
[ 6 ] W. K. Chen, *IEEE Trans. on CT*, CT-19 (1972), 241.  
[ 7 ] 黄汝激, Chan-Mai 图定理的改进,北京钢铁学院学报, 1982年, 第2期,第 83 页.  
[ 8 ] W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen and N. Deo, *IEEE Trans. on CT*, CT-15 (1968), 101

## COMPLETE DIRECTED TREES ANALYSIS METHOD FOR LINEAR ACTIVE NETWORKS

Huang Ruji

(Beijing Steel-Iron College)

The concepts of positive (negative) root complete directed trees and positive (negative) root complete directed  $k$ -trees and a positive (negative) root complete directed trees analysis method for linear active networks are presented. This method is the unification of complete trees method and directed trees method. It does not involve any sign problem and cancellation terms problem.