

# 一种基于互局部化 Wigner-Ville 分布的瞬时频率估计<sup>1</sup>

徐春光 谢维信\*

(西安电子科技大学工程学院 西安 710071)

\*(深圳大学 深圳 518060)

**摘要** 本文提出一种基于互局部化 Wigner-Ville 分布 (Cross Localized Wigner-Ville Distribution, X-LWVD) 的迭代瞬时频率估计方法, 以解析方法分析了无噪声情况下该方法的收敛性, 用计算机仿真方法比较了在噪声背景中其与谱图 (Spectrogram) 峰值检测、Wigner-Ville 分布 (Wigner-Ville Distribution, WVD) 峰值检测的性能, 证明了该方法是一种统计有效的瞬时频率估计方法。

**关键词** 互局部化 Wigner-Ville 分布, 迭代瞬时频率估计

**中图分类号** TN911.7

## 1 引言

瞬时频率 (Instantaneous Frequency, IF) 是描述信号时变特征的基本参数<sup>[1]</sup>, 被广泛应用于许多工程应用领域: 如地震、雷达、声纳、通信和生物应用等。在时频信号分析中瞬时频率也有许多应用: (1) 采用匹配于信号 IF 的线性频率调制窗函数的谱图, 其性能优于通常的采用低通型窗函数的谱图; (2) 对于单元信号, IF 可以用来获得高度聚集于信号 IF 的时频分布。

文献中已有一些基于时频分析的 IF 估计方法<sup>[2-5]</sup>: 基于互 WVD 的 IF 估计方法对于线性调频信号能够获得良好的估计性能, 而对于非线性频率调制信号其性能将下降; 基于互多项式 WVD 的 IF 估计方法可适用于二次和三次频率调制信号, 但是其高阶非线性使计算复杂度急剧增加。

本文提出一种基于互局部化 WVD 的迭代 IF 估计方法, 适用于线性调频信号和二次频率调制信号。本文第 2 节提出了互局部化 WVD 的定义; 第 3 节提出了本文的迭代 IF 估计方法, 分析了在无噪声情况下该方法的收敛性; 第 4 节用计算机仿真方法研究了在噪声背景中该方法的性能, 并与其它方法进行了比较; 最后给出了本文的结论。

## 2 互局部化 WVD

对于时变信号

$$x(t) = e^{j2\pi\phi(t)}. \quad (1)$$

信号的 IF 通常定义为

$$f(t) = \phi'(t). \quad (2)$$

因而信号的“理想”时频分布可表示为

$$P_x(t, f) = \delta[f - \phi'(t)]. \quad (3)$$

<sup>1</sup> 1998-11-16 收到, 1999-06-27 定稿  
国防科技预研项目资助

对于线性调频信号, 即  $\phi(t)$  为二次多项式时, WVD 可以获得理想的时频分布. 而当  $\phi(t)$  为高于二次的多项式时, WVD 中存在大量的交叉项, 不能获得理想的时频表示. 为了克服这一缺陷, 可以采用高阶时频分布方法.

局部化 WVD(Localized Wigner-Ville Distribution, LWVD)<sup>[6]</sup> 是采用四次瞬时相关函数的一种时频分布, 定义为

$$R_x(t, \tau) = x(t + b_0\tau)x(t + b_1\tau)x^*(t + b_2\tau)x^*(t + b_3\tau), \quad (4)$$

$$L_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t, \tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (5)$$

$R_x(t, \tau) = x(t + b_0\tau)x(t + b_1\tau)x^*(t + b_2\tau)x^*(t + b_3\tau)$  为瞬时相关函数,  $L_x(t, f)$  为局部化 WVD,  $b_i$  为待定参数. 如果信号  $x(t)$  是一个二次频率调制信号 (即  $\phi(t)$  为三次多项式), 那么

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi}j\ln R_x(t, \tau) &= \tau\phi'(t)(b_0 + b_1 - b_2 - b_3) + \frac{1}{2}\tau^2\phi''(t)(b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) \\ &+ \frac{1}{6}\tau^3\phi'''(t)(b_0^3 + b_1^3 - b_2^3 - b_3^3). \end{aligned} \quad (6)$$

如果有下面的联立方程成立

$$\left. \begin{aligned} b_0 + b_1 - b_2 - b_3 &= 1, \\ b_0^2 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 &= 0, \\ b_0^3 + b_1^3 - b_2^3 - b_3^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

那么  $R_x(t, \tau) = e^{j2\pi\tau\phi'(t)}$ , 从而得到理想的时频分布  $L_x(t, f) = \delta[f - \phi'(t)]$ . 求解 (7) 式有

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3} \frac{3b_0 - 1}{2b_0 - 1}; \\ b_2 &= [-1 + b_0 + b_1 \pm \sqrt{(b_0 - b_1)^2 + 2b_0 + 2b_1 - 1}]/2; \\ b_3 &= b_0 + b_1 - b_2 - 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$b_0$  为自由参数. 如果  $b_0$  满足

$$b_0 \geq (\sqrt{3}/6)(-1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}) \quad (9a)$$

或

$$b_0 \geq (\sqrt{3}/6)(-1 - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}). \quad (9b)$$

则  $b_1, b_2, b_3$  为实数.

局部化 WVD 对于线性调频信号和二次频率调制信号均可以获得理想的时频表示, 信号的时频分布聚集于信号瞬时频率的局部区域内, 这一方面说明了该时频分布名称的由来, 另一方面说明可以用该时频分布有效地估计此类信号的瞬时频率. 但是如果信号中混有噪声, 由于局部化 WVD 的高阶非线性性质, 局部化 WVD 难以反映出信号的时变特征. 为利用 LWVD 的优越性估计噪声背景中信号的 IF, 本文提出互局部化 WVD

$$C_{x,y}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + b_0\tau)y(t + b_1\tau)y^*(t + b_2\tau)y^*(t + b_3\tau)e^{-j2\pi f\tau} dt, \quad (10)$$

式中的  $x(t)$  为待分析信号,  $y(t)$  为参考信号. 对于信号  $x(t)$ ,  $C_{x,y}(t, f)$  是一个线性函数, 即

$$C_{ax_1+bx_2,y}(t, f) = aC_{x_1,y}(t, f) + bC_{x_2,y}(t, f). \quad (11)$$

### 3 基于 X-LWVD 的 IF 估计算法及收敛性

#### 3.1 算法

基于 X-LWVD 的 IF 估计算法可用表 1 来描述.

信号瞬时频率的初始估计可以采用已有的各种方法得到. 本文采用谱图峰值检测方法来获得信号的初始 IF 估计. 允许误差  $\varepsilon$  的大小控制着 IF 估计精度和迭代次数之间的折衷.

表 1 基于 X-LWVD 的 IF 估计算法流程图

输入:	$x(t)$ — 待观察信号 $\varepsilon$ — 允许误差
算法:	获得瞬时频率的初始估计, 建立初始参考信号 $y^{(0)}(t)$ ; $m = 0$ ; 迭代: (1) 计算 X-LWVD, $C_{x,y^{(m)}}(t, f)$ ; (2) 利用峰值检测估计 IF ( $\forall t$ ) $\hat{f}^{(m+1)}(t) = \arg \max_f  C_{x,y^{(m)}}(t, f) $ ; (3) 合成参考信号 $y^{(m+1)}(t) = \exp[j2\pi \int_0^t \hat{f}^{(m+1)}(u) du]$ . 直到: $\int  \hat{f}^{(m+1)}(t) - \hat{f}^{(m)}(t) ^2 dt < \varepsilon$ ; $m = m + 1$ ;
输出:	瞬时频率估计值 $\hat{f}^{(m+1)}(t)$ 或时频表示 $C_{x,y^{(m+1)}}(t, f)$ .

#### 3.2 无噪声情况算法的收敛性

本节以解析方法分析在无噪声情况下本文迭代算法对二次频率调制信号的收敛性. 假定待分析的信号为

$$x(t) = A \exp\{j[2\pi(f_0 t + \alpha t^2 + \beta t^3) + \phi_0]\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

其中  $\phi_0$  为初始相位, 瞬时频率为  $f(t) = f_0 + 2\alpha t + 3\beta t^2$ . 设初始参考信号为

$$y^{(0)}(t) = \exp\{j2\pi[(f_0 + \Delta f)t + (\alpha + \Delta\alpha)t^2 + (\beta + \Delta\beta)t^3]\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

式中  $\Delta f$ ,  $\Delta\alpha$  和  $\Delta\beta$  表示对 IF 系数估计的初始误差. 由定义 (4) 式可得到某一时刻  $t_0$  的瞬时相关函数为

$$\begin{aligned} R_{x,y^{(0)}}(t_0, \tau) &= A \exp[j\phi_0 + j2\pi(\Delta f t_0 + \Delta\alpha t_0^2 - \Delta\beta t_0^3)] \\ &\times \exp\{j2\pi[f_0 + (1 - b_0)\Delta f + 2\alpha t_0 + 2(1 - b_0)\Delta\alpha t_0 + 3\beta t_0^2 + 3(1 - b_0)\Delta\beta t_0^2]\tau\} \\ &\times \exp[-j2\pi(b_0^2\Delta\alpha + 3b_0^2\Delta\beta t_0)\tau^2] \exp(-j2\pi b_0^3\Delta\beta\tau^3). \end{aligned} \quad (14)$$

对于变量  $\tau$ , 瞬时相关函数  $R_{x,y^{(0)}}(t_0, \tau)$  具有时变频率:

$$\begin{aligned} f(t_0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \arg[R_{x,y^{(0)}}(t_0, \tau)] \\ &= f_0 + (1 - b_0)\Delta f + 2[\alpha + (1 - b_0)\Delta\alpha]t_0 + 3[\beta + (1 - b_0)\Delta\beta]t_0^2 \\ &\quad - 2b_0^2(\Delta\alpha + 3\Delta\beta t_0)\tau - 3b_0^3\Delta\beta\tau^2. \end{aligned} \quad (15)$$

可见由于初始估计误差的存在,  $R_{x,y^{(0)}}(t_0, \tau)$  的瞬时频率  $f(t_0, \tau)$  是  $\tau$  的二次函数. X-LWVD 的幅度即为

$$|C_{x,y^{(0)}}(t_0, f)| = |F_{\tau \rightarrow f}[R_{x,y^{(0)}}(t_0, \tau)]|. \quad (16)$$

瞬时频率的估计就是检测  $|C_{x,y^{(0)}}(t_0, f)|$  的峰值, 即  $\arg \max_f |C_{x,y^{(0)}}(t_0, f)|$ . 假定在  $t = t_0$  时刻得到频率估计为  $f^{(1)}(t_0) = f(t_0, T)$ , 并且进一步假定每一时刻瞬时频率估计都得到  $\tau = T$  时的  $f(t, \tau)$  的值 (这是最坏的情况). 那么新的参考信号为

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \exp\{j2\pi \int_0^t f^{(1)}(u) du\} \\ &= \exp\{j2\pi[f_0 + (1-b_0)\Delta f - 2b_0^2\Delta\alpha T - 3b_0^3\Delta\beta T^2]t\} \\ &\quad \times \exp\{j2\pi[\alpha + (1-b_0)\Delta\alpha - 3b_0^2\Delta\beta T]t^2\} \exp\{j2\pi[\beta + (1-b_0)\Delta\beta]t^3\}. \end{aligned} \quad (17)$$

重复上述过程,  $m$  次迭代之后得到瞬时频率估计为

$$\begin{aligned} f^{(m)}(t) &= 3[\beta + (1-b_0)^{m+1}\Delta\beta]t^2 + 2[\alpha + (1-b_0)^{m+1}\Delta\alpha - 3(m+1)b_0^2(1-b_0)^m\Delta\beta T]t \\ &\quad + f_0 + (1-b_0)^{m+1}\Delta f - 2(m+1)b_0^2(1-b_0)^m\Delta\alpha T - 3(m+1)b_0^3(1-b_0)^m\Delta\beta T^2 \\ &\quad + 3m(m+1)b_0^4(1-b_0)^{m-1}\Delta\beta T^2. \end{aligned} \quad (18)$$

只要选择  $0 < b_0 < 1$ , 那么随着迭代次数的增加, 瞬时频率估计值将趋近于真实值.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f^{(m)}(t) = f(t) = f_0 + 2\alpha t + 3\beta t^2. \quad (19)$$

结合 (9a) 式是对参数  $b_0$  的限制, 其选择范围应限制在  $(\sqrt{3}/6)(-1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}) \leq b_0 < 1$ . 算法的收敛速度不仅依赖于未知的初始估计误差  $\Delta f$ ,  $\Delta\alpha$  和  $\Delta\beta$ , 而且依赖于参数  $b_0$  的选择.

为了验证本文迭代方法的收敛性, 以一个二次频率调制信号的 IF 估计为例. 图 1(a) 中的实线为信号的瞬时频率, 虚线为初始参考信号  $y^{(0)}(t)$  的瞬时频率. 采用本文的迭代算法估计  $t = t_0$  时刻的瞬时频率, 图 1(b) 显示出前 15 次迭代的结果. 由此可见, 即使在初始瞬时频率估计偏差很大的情况下, 本文的迭代方法仍能有效地估计信号的瞬时频率.

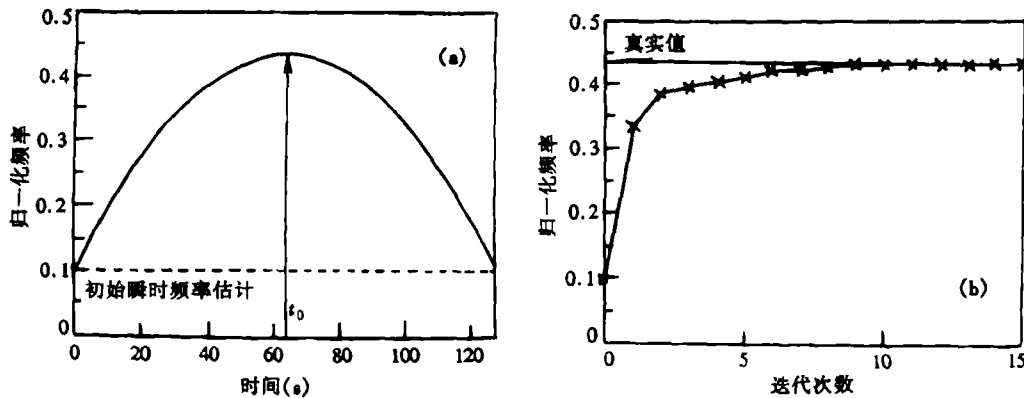


图 1 迭代瞬时频率估计的收敛实例

(a) 实线为待估计的瞬时频率, 虚线为初始瞬时频率估计值

(b) 在  $t = t_0$  时刻, 迭代算法得到的频率估计值随迭代次数的变化曲线

#### 4 在噪声背景中迭代算法的特性

在实际应用中,总是要在噪声背景中估计信号的瞬时频率。此时,初始参考信号  $y^{(0)}(t)$  的估计对迭代算法的收敛性有着重要的影响,由于基于谱图的峰值检测方法具有较低的信噪比门限,所以本文采用此方法估计初始参考信号  $y^{(0)}(t)$  的瞬时频率。

此外,由于时频分布的边缘效应(在信号的起始和结束段不能获得高度聚集的时频分布),在信号边缘处的 IF 估计偏差较大,影响了迭代过程的收敛。本文以信号中间部分的瞬时频率做曲线拟合,外推出信号边缘处的 IF。

在噪声背景中迭代算法的收敛性难以用解析的方法分析,本文以蒙特卡罗仿真试验结果比较了迭代方法与谱图峰值检测、WVD 峰值检测方法的性能。待估计信号仍采用图 1 中的信号,噪声为复高斯白噪声。谱图方法和本文迭代方法中初始参考信号的估计均采用 31 点汉宁窗。定义整体均方误差为

$$E_{\text{MSE}}[f(t)] = \int E\{[f(t) - \hat{f}(t)]^2\} dt, \quad (21)$$

式中  $E\{\}$  表示均值算子。图 2 给出了三种 IF 估计方法的整体均方误差随信噪比的变化曲线。在特定信噪比下,每种 IF 估计方法都进行 100 次独立的实验来获得整体均方误差。可以看到,当信噪比高于  $-2\text{dB}$  后本文迭代方法的整体均方误差小于其它两种方法;当信噪比高于  $1\text{dB}$ ,迭代算法的性能几乎不受信噪比的影响。

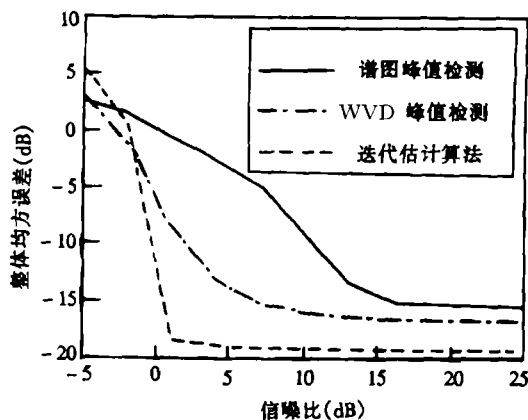


图 2 在噪声背景中三种算法的性能比较;整体均方误差随信噪比的变化曲线

#### 5 结 论

本文提出了一种基于互局部化 WVD 的迭代瞬时频率估计方法,理论分析和计算机仿真结果证明了该方法的统计有效性。

## 参 考 文 献

- [1] Boashash B. Interpreting and estimating the instantaneous frequency of a signal: Part I: Fundamentals. Proc. of IEEE, 1992, 80(4): 520-538.
- [2] Boashash B. Interpreting and estimating the instantaneous frequency of a signal: Part II: Algorithms. Proc. of IEEE, 1992, 80(4): 540-568.
- [3] Boashash B, O'Shea P. Use of the cross Wigner-Ville distribution for estimation of instantaneous frequency. IEEE Trans. on Signal Processing, 1993, SP-41(3): 1439-1445.
- [4] Ristic B, Boashash B. Instantaneous frequency estimation of quadratic and cubic FM signals using the cross polynomial Wigner-Ville distribution. IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, SP-44(6): 1549-1553
- [5] Emresoy M K, El-Jaroudi A. Iterative instantaneous frequency estimation and adaptive matched spectrogram. Signal Processing, 1998, 64(2): 157-165.
- [6] O'Neill J C, Flandrin P. Two excursions into the quartic domain. Proc. IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Pittsburgh: 1998, 321-324.

AN INSTANTANEOUS FREQUENCY ESTIMATION METHOD  
BASED ON CROSS LOCALIZED WIGNER-VILLE  
DISTRIBUTIONS

Xu Chunguang    Xie Weixin\*

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

\*(Shenzhen University, Shenzhen 518060)

**Abstract** This paper presents an iterative instantaneous frequency estimation based on a cross localized Wigner-Ville distribution(X-LWVD). The convergence of this method is examined analytically and the performance in noise is compared with the peak detection of spectrogram and the peak detection of Wigner-Ville distribution (WVD) by computer simulation. It is demonstrated that this algorithm is an statistically effective method.

**Key words** Iterative instantaneous frequency estimation, Cross localized Wigner-Ville distribution

徐春光: 男, 1971 年生, 博士, 研究方向为雷达信号处理、时频分析和智能信息处理。

谢维信: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 研究领域为模糊、智能信息处理和雷达目标识别等。