第 25 卷 第 10 期　　电子与信息学报　　Vol.25 No.10
2003 年 10 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS AND INFORMATION TECHNOLOGY　　Oct. 2003

神经网络指数稳定性分析及收敛率估计 [1]

谭晓惠　　张继业*　　杨翊仁

(西南交通大学应用力学与工程系　成都　610031)
*(西南交通大学牵引动力国家重点实验室　成都　610031)

摘　要　该文通过李雅普诺夫直接方法，研究了一类 Hopfield 神经网络平衡点的存在性、唯一性与指数稳定性. 文中假设神经网络系统的激励函数为单调增 Lipschitz 连续函数，在自反馈项为非线性函数的条件下，研究其指数稳定性，同时给出了收敛率估计式.

关键词　神经网络，全局指数稳定性，李雅普诺夫直接方法

中图号　TN-052

1 前　言

由于人工神经网络在复杂系统控制，信号和图像处理以及优化计算上的应用前景，使得神经网络的研究引起人们的极大兴趣 [1-6]．根据其不同的应用，需要做出不同类型的定性分析．对于最优化计算神经网络，理想情形是有且只有一个全局渐近稳定的平衡点．此时，定性分析的目的是在何种条件下，网络具有全局渐近稳定的平衡点．一般而言，具有指数稳定性的系统，具有更快的收敛性，从而更具实用价值．但是由于神经网络是一非线性系统，所以由其渐近稳定性并非总能推得其指数稳定性．最近有不少关于这方面的研究结果发表 [7-12]．本文不要求激励函数连续可微或有界，而是采用下面的假设 2，从而放宽了对激励函数的限制．另一方面，在电路的硬件实现中，由于电路硬件线性范围的有限性，在使用过程中有可能超出线性范围而进入非线性区域．因此本文不采用以往的自反馈项为线性的假设 [1-12]，而采用下面的假设 1 所描述的一类非线性函数．本文基于自反馈项与激励函数的非线性假设的改进，对 Hopfield 神经网络的指数稳定性进行了研究，并给出了收敛率估计式．

我们研究如下的 Hopfield 神经网络系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{I} \tag{1}$$

其中： $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = (d_1(x_1), d_2(x_2), \cdots, d_n(x_n))^T$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n))^T$, $\boldsymbol{I} = (I_1, I_2, \cdots, I_n)^T$．

对于系统 (1) 式的自反馈函数 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ 和激励函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 做如下基本假设：

假设 1　对于系统 (1) 式中的自反馈函数 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = (d_1(x_1), d_2(x_2), \cdots, d_n(x_n))^T$, $d_i(x_i): R \to R$ 为单调增函数，且存在常数 l_i, l_i', $0 < l_i' < l_i < +\infty (i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得对任意 u, $v \in R$, $u \neq v$ 有

$$l_i' \le [d_i(u) - d_i(v)]/(u - v) \le l_i \tag{2}$$

并记 $L' = \mathrm{diag}(l_1', l_2', \cdots, l_n')$, $L = \mathrm{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_n)$．

假设 2　对于系统 (1) 式中的函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n))^T$，存在常数 m_i，$0 < m_i < +\infty (i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得对任意 $u, v \in R$, $u \neq v$，有

$$0 \le [f_i(u) - f_i(v)]/(u - v) \le m_i \tag{3}$$

[1] 2002-04-27 收到，2002-10-08 改回
西南交通大学科研基金资助 (No.2001B09)

并记 $M=\mathrm{diag}(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 。

2 Hopfield 神经网络系统的指数稳定性

定义 1 若矩阵 A 的所有主子式为正，则称矩阵 A 属于 P 类矩阵，记为 $A\in P$ 。

命题 1[13] 若矩阵 A 属于 P 类矩阵，则对任意阵 $K=\mathrm{diag}(k_1,k_2,\cdots,k_n)\geq 0$ ，有 $\det(K+A)\neq 0$ 。

仿文献 [3, 13] 可以得到以下引理：

引理 1 设 A 为 n 阶方阵， L' 和 M 是正定对角阵，如果 $-A+L'M^{-1}\in P$ ，则对任意满足 $0<L'\leq K_1, 0\leq K_2\leq M$ 的对角阵 K_1, K_2, 有

$$\det(-AK_2+K_1)\neq 0 \tag{4}$$

为方便系统 (1) 式的平衡点的存在性与唯一性研究，我们引入以下函数

$$H(x)=-D(x)+Af(x)+I \tag{5}$$

上式中符号的意义与系统 (1) 式相同.

命题 2[13] 如果函数 $H(x)\in C^0$ 满足以下条件： (1) $H(x)$ 是 R^n 上的单射； (2) 当 $\|x\|\to+\infty$ 时， $\|H(x)\|\to\infty$, 则函数 $H(x)$ 是 R^n 上的同胚映射.

定义 2 若对于矩阵 A ，存在一个对角矩阵 $\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)>0$ ，使得 $[\alpha A]^s>0$(其中 $[\alpha A]^s=(A^T\alpha+\alpha A)/2$ ，则称矩阵 A 为李雅普诺夫对角稳定，记为 $A\in\mathrm{LDS}$ 。

定理 1 若系统 (1) 中的函数 $D(x)$ 及 $f(x)$ 分别满足假设 1 及 2 ，且 $-A+L'M^{-1}\in P$ ，则对任意输入 $I\in R^n$ ，系统有唯一平衡点 x^e 。

证明 首先证明 $H(x)$ 为 R^n 上的单射，用反证法．设存在 $x,y\in R^n(x\neq y)$ 使 $H(x)=H(y)$ 。由 (5) 式得 $-[D(x)-D(y)]+A[f(x)-f(y)]=0$ 。由于函数 $D(x)$ 和 $f(x)$ 分别满足假设 1 和 2 ，故存在对角阵 K_1, K_2 ，使 $D(x)-D(y)=K_1(x-y)$, $f(x)-f(y)=K_2(x-y)$ ，其中 $0<L'\leq K_1\leq L$, $0\leq K_2\leq M$ ，且 $-K_1(x-y)+AK_2(x-y)=0$ 。由于 $-A+L'M^{-1}\in P$ ，由引理 1 知 $\det(-AK_2+K_1)\neq 0$ 。从而 $x=y$ ，但这与假设矛盾．故当 $x\neq y$ 时有 $H(x)\neq H(y)$ ，函数 $H(x)$ 为 R^n 上的单射.

下面证明 $H(x)$ 在 R^n 上满射．为证明 $H(x)$ 在 R^n 上的满射，只需证明 $\overline{H}(x)=-[D(x)-D(0)]+A[f(x)-f(0)]$ 在 R^n 上的满射．由命题 2 知，要证明 $\overline{H}(x)$ 在 R^n 上满射，只需证明当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $\|\overline{H}(x)\|\to\infty$ 即可．下面用反证法进行证明.

设存在数列 $\|x_p\|\to\infty$ ，使 $\|\overline{H}(x_p)\|$ 有界，即 $\|\overline{H}(x_p)\|\leq\overline{h}$ $(\overline{h}>0)$ 。因此，无穷数列 $\{x_p\}$ 中存在一个无穷子列 $\{x_p^0\}$ ，使得

$$\text{当}\|x_p^0\|\to\infty\text{时},\quad \overline{H}(x_p^0)\to h \tag{6}$$

其中 h 是某一常向量．由于函数 $D(x)$ 和 $f(x)$ 满足假设 1 和 2 ，所以对于向量 x_p^0 ，存在对角

矩阵 $\overline{\boldsymbol{K}}_1(x_p^0)$ 和 $\hat{\boldsymbol{K}}_2(x_p^0)$ 分别满足 $0<\boldsymbol{L}'\leq\overline{\boldsymbol{K}}_1(x_p^0)\leq\boldsymbol{L}$, 和 $0\leq\hat{\boldsymbol{K}}_2(x_p^0)\leq\boldsymbol{M}$ 成立，其中

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{K}}_1(x_p^0)&=\mathrm{diag}(\frac{d_1(x_{p1}^0)-d_1(0)}{x_{p1}^0},\frac{d_2(x_{p2}^0)-d_2(0)}{x_{p2}^0},\cdots,\frac{d_n(x_{pn}^0)-d_n(0)}{x_{pn}^0})\\&=\mathrm{diag}(\overline{k}_1(x_{p1}^0),\overline{k}_2(x_{p2}^0),\cdots,\overline{k}_n(x_{pn}^0))\\\hat{\boldsymbol{K}}_2(x_p^0)&=\mathrm{diag}(\frac{f_1(x_p^0)-f_1(0)}{x_{p1}^0},\frac{f_2(x_p^0)-f_2(0)}{x_{p2}^0},\cdots,\frac{f_n(x_p^0)-f_n(0)}{x_{pn}^0})\\&=\mathrm{diag}(\hat{k}_1(x_{p1}^n),\hat{k}_2(x_{p2}^n),\cdots,\hat{k}_n(x_{pn}^n))\end{aligned}$$

上式中假定 $x_{pi}^0\neq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 如果 $x_{pj}^0=0$ $(j\in[1,n])$ ，那么就令 $\overline{k}_j(x_{pj}^0)=l_j'$, $\hat{k}_j(x_{pj}^{0n})=0$. 从而在无穷子列 $\{\boldsymbol{x}_p^0\}$ 中存在无穷子列 $\{\boldsymbol{x}_p^1\}$ 使得

$$\overline{\boldsymbol{K}}_1(\boldsymbol{x}_p^1)\to\boldsymbol{K}_1,\quad\hat{\boldsymbol{K}}_2(\boldsymbol{x}_p^1)\to\boldsymbol{K}_2,\qquad 当\|\boldsymbol{x}_p^1\|\to\infty时\tag{7}$$

且 $\boldsymbol{L}'\leq\boldsymbol{K}_1\leq\boldsymbol{L}$, $0\leq\boldsymbol{K}_2\leq\boldsymbol{M}$. 由引理 1 知 $\det(-\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_1)\neq0$. 又因为 $\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}_q^1)=-\overline{\boldsymbol{K}}_1(\boldsymbol{x}_p^1)\boldsymbol{x}_p^1+\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{K}}_2(\boldsymbol{x}_p^1)\boldsymbol{x}_p^1$, 因此 $\boldsymbol{h}=\lim_{\|\boldsymbol{x}_p^1\|\to\infty}\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}_p^1)=(-\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_2)\lim_{\|\boldsymbol{x}_p^1\|\to\infty}\boldsymbol{x}_p^1$ ，即 $\lim_{\|\boldsymbol{x}_p^1\|\to\infty}\boldsymbol{x}_p^1=\boldsymbol{h}(-\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_2)^{-1}$, 两边取范数得

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}_p^1\|\to\infty}\|\boldsymbol{x}_p^1\|=\|\boldsymbol{h}(-\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_2)^{-1}\|\tag{8}$$

(8) 式左端项无穷，而右端项为有限值，故矛盾. 因此，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时，有 $\|\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x})\|\to\infty$ ，即 $\|\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x})\|\to\infty$.

以上证明保证了函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 在 R^n 上的单射及满射，故在 R^n 内一定能找到满足 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$ 的平衡点 $\boldsymbol{x}^e$ ，即对于任意输入 $\boldsymbol{I}\in R^n$ ，系统 (1) 式存在唯一的平衡点. 证毕

引理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{L}'$ 及 $\boldsymbol{M}$ 是正定对角阵，并使 $-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}\in\mathrm{LDS}$ ，则存在 $k>0$ ，n 阶非奇异阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 以及三个对称正定矩阵 γ_0 ，$\boldsymbol{P}$ 和 Π 使

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{L}')+(-\boldsymbol{L}')\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T\\&\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Gamma}+k\alpha(-\boldsymbol{L}')+\gamma_0\\&\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Gamma}+\Pi=2k[\alpha(-\boldsymbol{A})]^S+2\gamma_0\boldsymbol{M}^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

证明 选择正数 k 使

$$k>\lambda_M\{((\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A}\}/(8\mu)\tag{10}$$

其中 $\mu=\lambda_m\{\alpha[-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}]^S\}>0$, $\lambda_M\{\ \}$, $\lambda_m\{\ \}$ 分别表示矩阵的最大、最小特征值。在 (9) 式中，取 $\gamma_0=k\alpha\boldsymbol{L}'>0$, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{L}')^{-1}/2$, $\boldsymbol{\Gamma}=(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A}/2$ 则有

$$\begin{aligned}\Pi=\Pi^T&=2k[\alpha(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1})]^S-((\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A}/4\\&\geq2k\mu\boldsymbol{E}_n-((\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A})^T(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{A}/4\end{aligned}$$

由 (10) 式知，$\Pi>0$. 证毕

定理 2 若系统 (1) 式中的函数 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 分别满足假设 1 和假设 2 , 且 $-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}\in\mathrm{LDS}$ ，则对任意 $\boldsymbol{I}\in R^n$ ，系统 (1) 式有唯一平衡点且为全局指数稳定的.

证明 当 $-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}\in$ LDS 时，由文献 [14] 知，$-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}\in P$ 。由定理 1 知系统 (1) 式存在唯一平衡点 $\boldsymbol{x}^e$ 。做坐标平移 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^e$ ，则 (1) 式可变为

$$\dot{\boldsymbol{z}}=-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z})+\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z})=(w_1(z_1),\cdots,w_n(z_n))^T$, $w_i(z_i)=d_i(z_i+x_i^e)-d_i(x_i^e)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})=(F_1(z_1),\cdots,F_n(z_n))^T$, $F_i(z_i)=f_i(z_i+x_i^e)-f_i(x_i^e)$, $i=1,\cdots,n$ 。显然函数 $\boldsymbol{W}$ 仍满足假设 1 ，函数 $\boldsymbol{F}$ 仍满足假设 2 。系统 (11) 式有唯一的平衡点 $z=0$ 。

由 $-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1}\in$ LDS 知，存在 $\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)>0$ 使 $[\alpha(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1})]^S>0$ 。取如下 Lurie 型李雅普诺夫函数 [13] $V(z)=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}+2k\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_0^{z_i}F_i(\rho)\mathrm{d}\rho$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 可取为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{L}')^{-1}/2$ ，k 为正常数。而 $2k\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_0^{z_i}F_i(\rho)\mathrm{d}\rho\le k\sum_{i=1}^n\alpha_iM_iz_i^2$ 。令 $\mu_1=\min_{1\le i\le n}(\frac{1}{2l_i'})$, $\mu_2=\max_{1\le i\le n}(\frac{1}{2l_i'}+k\alpha_iM_i)$ ，当系统 (11) 式中的函数 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z})$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$ 分别满足假设 1 和 2 时，有 $\mu_1\|\boldsymbol{z}\|^2\le V(z)\le\mu_2\|\boldsymbol{z}\|^2$ ，且 $-\boldsymbol{F}^T(z)\boldsymbol{W}(z)\le-\boldsymbol{F}^T(z)\boldsymbol{L}'\boldsymbol{z}$ 。又 $|F_i(z_i)|\le M_i|z_i|$ ，$z_iF_i(z_i)\ge 0$ ，故

$$\boldsymbol{F}^T(z)\gamma_0\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{F}(z)\le\boldsymbol{z}^T\gamma_0\boldsymbol{F}(z) \tag{12}$$

其中，$\gamma_0=\mathrm{diag}(\gamma_{01},\cdots,\gamma_{0n})>0$ 。将 $V(z)$ 沿 (11) 式求导并做适当的处理得

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)\le&\boldsymbol{z}^T[\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{L}')+(-\boldsymbol{L}')\boldsymbol{P}]\boldsymbol{z}-2\boldsymbol{z}^T[\boldsymbol{P}(-\boldsymbol{A})-k\alpha(-\boldsymbol{L}')-\gamma_0]\boldsymbol{F}(z)\\&-\boldsymbol{F}^T(z)\{2k[\alpha(-\boldsymbol{A})]^S+2\gamma_0\boldsymbol{M}^{-1}\}\boldsymbol{F}(z)-2[\boldsymbol{z}^T\gamma_0\boldsymbol{F}(z)-\boldsymbol{F}^T(z)\gamma_0\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{F}(z)]\end{aligned} \tag{13}$$

由引理 2 及其证明过程知存在 $k>0$ ，n 阶非奇异阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 以及三个对称正定矩阵 $\gamma_0=k\alpha\boldsymbol{L}'>0$, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{L}')^{-1}/2$, $\Pi=\Pi^T$ 使 (13) 式的前三项可写为

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}+2\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)-\boldsymbol{F}^T(z)\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)-\boldsymbol{F}^T(z)\Pi\boldsymbol{F}(z)\\&=-[\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)]^T[\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)]-\boldsymbol{F}^T(z)\Pi\boldsymbol{F}(z)\end{aligned}$$

所以 (13) 式可化为

$$\begin{aligned}\dot{V}(z)\le&-[\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)]^T[\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}(z)]-\boldsymbol{F}^T(z)\Pi\boldsymbol{F}(z)\\&-2\lfloor\boldsymbol{z}^T\gamma_0\boldsymbol{F}(z)-\boldsymbol{F}^T(z)\gamma_0\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{F}(z)\rfloor\end{aligned}$$

由 (12) 式知，上式的最后一项非正。如果 $\boldsymbol{F}(z)\ne 0$ ，则 $-\boldsymbol{F}^T(z)\Pi\boldsymbol{F}(z)<0$ 。如果存在某些 $z\ne 0$ 使 $\boldsymbol{F}(z)=0$ ，则 $\dot{V}(z)=-\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}<0$ 。令 $\overline{\lambda}=\min\{\lambda_m\{\Pi\},\lambda_m\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T\}\}$ ，故 $\dot{V}(z)\le-(\overline{\lambda}/\mu_2)V(z)$ ，从而有 $V(z)\le V(z_0)\exp[-(\overline{\lambda}/\mu_2)(t-t_0)]$ ，故

$$\|\boldsymbol{z}\|\le\sqrt{V(z_0)/\mu_1}\exp[-[\overline{\lambda}/(2\mu_2)](t-t_0)]$$

从而系统 (11) 式的零解是全局指数稳定的，即对于任意输入 $\boldsymbol{I}\in R^n$ ，系统 (1) 式存在唯一平衡点且为全局指数稳定。 证毕

注 文献 [8] 在要求激励函数连续可微的条件下，估计了连续反馈联想记忆模式的吸引域及其中每一点趋向记忆模式的指数收敛速度。文献 [9] 在激励函数为单调非降且有界的基础上，研究了神经网络系统的全局指数稳定性。显然文献 [7-9] 对激励函数的要求都比我们这里所采用的激励函数要苛刻。而且将系统 (1) 式退化至线性系统后与各相关文献 [7-11] 比较，可发现，定理 2 的结论与各文献结论是互不包容的。

例 1 考虑下面的二阶神经网络系统：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1 + (1/2)f_1(x_1(t)) + 2f_2(x_2(t)) + I_1\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2 - 2f_1(x_1(t)) + (1/2)f_2(x_2(t)) + I_2\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其中 $0 \le \frac{f_i(x)-f_i(y)}{x-y} \le 1, i = 1,2$. 显然 $M = \mathrm{diag}(1,1)$. 当 $\alpha = \mathrm{diag}(1,1)$ 时，有 $\lfloor\alpha(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1} - \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1} - \boldsymbol{A})^T\alpha\rfloor > 0$ ，所以 $\boldsymbol{L}'\boldsymbol{M}^{-1} - \boldsymbol{A} \in \mathrm{LDS}$ ，由定理 2 知系统 (13) 式全指数稳定. 文献 [11] 中定理 1 不能用于系统 (13) 式的指数稳定性判定.

3 结 论

本文研究了一类 Hopfield 神经网络平衡点的存在性、唯一性与指数稳定性. 通过利用矩阵的李雅普诺夫对角稳定的性质，得到了该类神经网络指数稳定的充分条件. 这里在不要求激励函数满足连续可微或有界等条件下，得到了当自反馈为非线性函数时 Hopfield 型神经网络系统指数稳定的充分条件，并给出了指数收敛率的估计式.

参 考 文 献

[1] Zhang Jiye, Yang Yiren, Global stability analysis of bi-directional associative memory neural networks with time delay [J], International Journal of Circuit Theory and Application, 2001, 29(3), 185–196.

[2] Qiao Hong, Peng Jigen, Xu Zong-Ben, Nonlinear measures: a new approach to exponential stability analysis for Hopfield-type neural networks [J], IEEE Trans. on Neural Networks, 2001, 12(2), 360–370.

[3] M. Forti, A. Tesi, New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems [J], IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1995, 42(7), 354–366.

[4] Liang Xue-Bin, Si Jennie, Global exponential stability of neural networks with globally Lipschitz continuous activations and its application to linear variational inequality problem [J], IEEE Trans. on Neural Networks, 2001, 12(2), 349–359.

[5] Chen Tianping, Amari Shun Ichi, Stability of asymmetric Hopfield networks [J], IEEE Trans. on Neural Networks, 2001, 12, 159–163.

[6] 廖晓昕， Hopfield 神经网络的稳定性 [J], 中国科学 (A), 1993, 23(10), 1025–1035.

[7] 梁学斌，吴立德， Hopfield 型神经网络的全局指数稳定性及其应用 [J], 中国科学 (A), 1995, 25(5), 523–532.

[8] 梁学斌，吴立德，连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用 [J], 电子科学学刊， 1996, 18(1), 1–6.

[9] 梁学斌，吴立德， Hopfield 连续联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计及其应用 [J], 电子学报， 1996, 24(1), 40–43.

[10] 周冬明，曹进德，李继彬，连续反馈联想记忆的吸引域和指数收敛速度的估计 [J], 应用数学和力学， 2001, 23(3), 275–279.

[11] 张强，许进，细胞神经网络的全局指数稳定性 [J], 电子科学学刊， 2000, 22(5), 434–438.

[12] Liang Xue-Bin, Wang Jun, An additive diagonal-stability condition for absolute exponential stability of a general class of neural networks[J], IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 2001, 48(11), 1308–1317.

[13] 舒仲周，张继业，曹登庆，运动稳定性 [M], 北京，中国铁道出版社， 2001, 202–215.

[14] D. Hershkowitz, Recent directions in matrix stability [J], Linear Algebra and Its Applications, July 1, 1992, Vol.171, 161–186.

STUDY ON GLOBAL EXPONENTIAL STABILITY OF NEURAL NETWORKS AND ITS CONVERGENCE ESTIMATE

Tan Xiaohui Zhang Jiye* Yang Yiren

(*Dept. of Appl. Mech. and Eng., Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

*(*National Power Traction Lab., Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

Abstract In this paper, the existence, uniqueness and global exponential stability of the equilibrium point of a class of Hopfield neural networks are investigated by using Liapunov direct method. Lipschitz continuous activations are considered and the limit on self-feedback is released. It can be nonlinear instead of linear in this paper. And under this condition, some sufficient conditions and convergence estimate for global exponential stability of neural networks are obtained.

Key words Neural networks, Global exponential stability, Liapunov direct method

谭晓惠: 女, 1978 年生, 硕士生, 主要研究动力系统的控制与稳定性, 神经网络及其应用.
张继业: 男, 1965 年生, 教授, 主要研究动力系统的控制与稳定性, 神经网络及其应用.
杨翊仁: 男, 1959 年生, 教授, 主要研究复杂系统动力学, 智能计算及其应用.