

多带通信号直接均匀欠采样技术¹

黄 勇 肖先赐 林云松

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

摘 要 该文讨论了宽带数字接收机中对多个复或实的带通信号的直接均匀采样, 对这多个通带位置及带宽均是任意的实或复的带通信号给出了采样率应满足的关系, 用此采样率采样使输入数据得到有效的压缩, 同时结合滤波器将频谱进行搬移, 最后给出了实例。

关键词 带通信号, 均匀采样, 混叠

中图分类号 TN911.72

1 引 言

带通信号的数字处理广泛应用于通讯^[1-3]、雷达^[4]、生物信号处理、声纳、光学及测量技术等方面。在宽带数字接收机中, 为保留原始信息, 前端使用高速模数转换器 (ADC) 以观察带内最高频率的两倍以上采样, 得到大量数据, 而后续处理却跟不上。在监视的带宽是吉赫 (GHz), 如雷达截获数字式接收机^[4]、软件无线电 (Software Radio) 思想的新一代电子系统, 利用尽可能接近天线带宽的 A/D, D/A 转换器, 使更多的电子系统功能在一个开放性模块平台上由软件实现, 以解决当前电子系统中所存在的不兼容性等技术难题。GSM 基站的软件化处理^[5], 所要处理的均是多个带通信号同时存在的情况。这时, 实际有用信号带宽只有兆赫 (MHz) 量级, 一般通用的方法是各个带通信号变频到低端来处理。而带通信号的欠采样技术, 将带通信号都压缩到 $0 \sim f_s$ 频带内, 采样率 f_s 可远远小于两倍带内最高频率的奈奎斯特采样率, 结合数字滤波可将这些带通信号一一滤出。此种方法特别适合雷达截获数字式接收机, 因此既保证宽的监视带宽, 又使后续数字信号处理 (DSP) 在有效信号带宽内进行。文献 [6] 总结给出了单个带通信号直接采样的一般采样率公式, 使实带通信号采样率可低至带宽的 $1/2 \sim 1/4$ 来欠采样。文献 [7] 讨论了欠采样问题, 但没有考虑带通信号的有关信息, 使采样率附近及同余数频率发生混叠不能获得完整信息保留。本文将导出 N 个带通信号的直接欠采样应满足的一般采样率公式, 对输入端存在多个带通信号, 前端高速采样后同后续 DSP 处理速度匹配起着重要作用。

2 N 个带通信号的直接均匀采样

2.1 N 个带通信号的最小采样率

设 N 个带通信号带宽为 B_i , 频谱只存在于

$$|f_{Li}| \leq |f| \leq |f_{ui}|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 f_{ui} 、 f_{Li} 是带通信号上下边界频率。 N 个带通信号以 f_s 采样率采样后, 在 $0 \sim f_s$ 内频谱的排列有如下定理 1。

¹ 1999-04-05 收到, 1999-10-03 定稿

定理 1 对 N 个实带通信号, 以采样率 f_s 均匀采样以后, 在 $0 \sim f_s$ 内有 $2N$ 个边带叠加, 叠加的情况与 f_s 有关. 这 $2N$ 个边带是这 N 个实带通信号的正负余数边带, 且它们对称于 $f_s/2$ 排列.

余数边带: 原信号边带内的所有频率分量 f 对采样率 f_s 求余^[7], $f = f_1 + rf_s, 0 \leq f_1 \leq f_s, r$ 为整数, f_1 即为 f 对模 f_s 的余数频率, 记为 $f = f_1 \bmod(f_s)$.

证明 由于信号以 $1/f_s$ 的间隔均匀采样, 由傅氏变换在频域信号频谱将以 f_s 为周期重复, 故对带通信号的各个边带内的频率分量将以 f_s 为模折叠到 $0 \sim f_s$ 内, 在 $0 \sim f_s$ 内将有 $2N$ 个正负余数边带叠加. 这些余数边带分别是这 N 个实带通信号的正负边带以 f_s 为模求余得到的. 而由于频谱的周期性, 这 $2N$ 个正负余数边带叠加的情况与采样率 f_s 有关. 又由于对某一正边带频率 f_0 在 f_s 下的余数为 $f'_0, f_0 = f'_0 \bmod(f_s)$, 则 $0 \leq f'_0 \leq f_s$, 由带通信号正负边带的对称性 $f_s - f'_0$ 为其负边带频率 $-f_0$ 在 f_s 下的余数, 且 $0 \leq f_s - f'_0 \leq f_s$, 而 $f_s - f'_0$ 必和 f'_0 对 $f_s/2$ 对称. 故同一带通信号的正负余数边带在 f_s 采样下, 在 $0 \sim f_s$ 内必对称于 $f_s/2$ 排列. 从而 N 个实带通信号的 $2N$ 个正负余数边带在 $0 \sim f_s$ 内叠加并对称于 $f_s/2$ 排列. 最后由于采样后频谱的周期重复性, 整个频域以频率为 $nf_s/2$ 的轴对称排列, n 为任意整数. 我们只需要分析 $0 \sim f_s$ 内频谱的排列情况就可以了. 证毕

推论 1 对 N 个复解析带通信号 (以下简称复带通信号), 以采样率 f_s 采样以后, 在 $0 \sim f_s$ 内有 N 个边带叠加, 叠加的情况亦与 f_s 有关, 但不一定对称于 $f_s/2$. 注意: (1) 由于不恰当的选择 f_s , 这些 $2N$ (实信号) 或 N (复信号) 个余数边带可能在 $0 \sim f_s$ 内重叠; 但对实信号在 $0 \sim f_s$ 内仍对 $f_s/2$ 对称. (2) 又由于以采样率 f_s 采样以后, 频谱以 f_s 为周期的移动, 不恰当地选择 f_s 会将频谱在 $f = 0, f = f_s$ 处分割, 但对实信号在 $0 \sim f_s$ 内仍对 $f_s/2$ 对称. 由以上讨论可见:

推论 2 在理想情况下, 对实带通信号的最小无频谱混叠采样率 $f_{s \min} = 2 \sum_{i=1}^N B_i$; 对复带通信号的最小无频谱混叠采样率 $f_{s \min} = \sum_{i=1}^N B_i$; 一般带通信号采样率 $f_s \geq f_{s \min}$, 但推论 2 仅是频谱无混叠的必要条件.

2.2 任意两个通带频谱无混叠, 采样率 f_s 应满足的关系

定理 2 设两个通带的边界频率分别为 f_{iL} 和 f_{ih} , f_{jL} 和 f_{jh} , 带宽分别为 B_i 和 B_j , 且有 $f_{iL} < f_{ih} \leq f_{jL} < f_{jh}$, $B_i = f_{ih} - f_{iL}$, $B_j = f_{jh} - f_{jL}$, 这时 $f_{s \min} = B_i + B_j$, 则使这两个通带无频谱混叠的欠采样率应满足

$$\frac{f_{jh} - f_{iL}}{k_{ji} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{jL} - f_{ih}}{k_{ji}}, \quad f_s \geq f_{s \min} \quad (2)$$

其中

$$0 \leq k_{ji} \leq \left\lfloor \frac{f_{jL} - f_{ih}}{f_{s \min}} \right\rfloor \quad (3)$$

$\lfloor x \rfloor$ 表示求小于等于 x 的最大整数.

证明 由于要满足频谱不混叠, 通带 B_i 经过 k_{ji} 次移动后应满足

$$f_{ih} + k_{ji}f_s \leq f_{jL} \quad (4)$$

$$f_{iL} + (k_{ji} + 1)f_s \geq f_{jh} \quad (5)$$

由 (4),(5) 式就导出了 (2) 式. 而 k_{ji} 表示频谱以 f_s 为间隔移动的次數, 由于最多能移动 $\lfloor \frac{f_{jL} - f_{ih}}{f_{s \min}} \rfloor$ 次, 故有 (3) 式. 证毕

2.3 N 个实或复带通信号采样率的关系

定理 3 在 (1) 式的设定下, 不失一般性, 设这 N 个带通信号边界满足

$$f_{L1} < f_{u1} \leq f_{L2} < f_{u2} \leq \dots \leq f_{LN} < f_{uN} \quad (6)$$

$$B_i = f_{ui} - f_{Li}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

在频率轴上对 $2N$ 个边带 (实) 从最左至最右依频谱位置递增作如下命名:

$$\left. \begin{aligned} f_{1L} &= -f_{uN}, & f_{1h} &= -f_{Ln} \\ f_{2L} &= -f_{uN-1}, & f_{2h} &= -f_{L(N-1)} \\ & & \vdots & \\ f_{(2N)L} &= f_{LN}, & f_{(2N)h} &= f_{uN} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对复解析信号只须将负边带去掉, 然后同 (8) 式一样依频谱位置递增排列即可. N 个实或复带通信号采样率的关系为

$$\frac{f_{jh} - f_{iL}}{k_{ji} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{jL} - f_{ih}}{k_{ji}} \quad (9)$$

其中

$$0 \leq k_{ji} \leq \lfloor \frac{f_{jL} - f_{ih}}{f_{s \min}} \rfloor \quad (10)$$

且 $j > i$. 对 N 个实信号:

$$f_{s \min} = 2 \sum_{i=1}^N B_i, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, 2N - i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

对 N 个复信号:

$$f_{s \min} = \sum_{i=1}^N B_i, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (12)$$

证明 要将这 N 个带通信号均匀采样且频谱无混叠, 需要对 (8) 式的 $2N$ 个 (复信号只有 N 个) 边带, 任取两个边带作 2.2 节定理 2 所示的无混叠采样, 一般有 $C_2^{2N} = 2N^2 - N$ 个约束, 但由于对称性, 对实信号只有 N^2 个独立约束如 (11) 式; 对复解析信号有 $N(N-1)/2$ 个独立约束如 (12) 式. 当这些约束同时满足时, 所得的 f_s 范围便是 N 个带通信号无混叠下的采样率. 由定理 1, (10) 式中的 $f_{s \min}$ 对实带通信号为 $2 \sum_{i=1}^N B_i$, 对复带通信号为 $\sum_{i=1}^N B_i$.

证毕

讨论

(1) 若被 $f = 0$ 或 $f = f_s$ 分割看成在 $0 \sim f_s$ 内频谱的畸变, 则复信号应另加上如下约束 (其推导过程如定理 2 所示):

$$f_{ih}/(r+1) \leq f_s \leq f_{iL}/r \quad (13)$$

其中

$$0 \leq r \leq \lfloor \frac{f_{iL}}{f_{s \min}} \rfloor, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

(2) 观察 k_{ji} , 当 $i = 1, 2, \dots, N$; $j = 2N + 1 - i$ 时, 在 $0 \sim f_s$ 内, 若 k_{ji} 是偶数则第 i 个带通信号正负频谱不会错位; 若 k_{ji} 是奇数则第 i 个带通信号正负频谱就会错位^[8]; 但是不会影响信号的恢复。

(3) 利用中心频率 $f_c = (p + 1/2)f_s/2$, p 为任意大于或等于零的整数, 带宽为 $f_s/2$ 的内插函数 $h(t)$:

$$h(t) = 2\{\sin[\pi f_s(t - n/f_s)/2]/[\pi(t - n/f_s)]\} \cos[2\pi f_c(t - n/f_s)] \quad (15)$$

与信号的采样值卷积, 可以得到中心频率搬移到 $f_c - f_s/4 \sim f_c + f_s/4$ 的 N 个带通信号。若 p 的奇偶性与 k_{ji} ($i = 1, 2, \dots, N$; $j = 2N + 1 - i$) 一致, 由 k_{ji} 的奇偶性判定有无错位混叠, 反之则与由 k_{ji} 的判定相反。

(4) 在雷达截获接收机中, 只要用一指示位标示, 错位混叠不影响对雷达脉冲信息的获取。

3 例子

用 B_i 来归一化所有频率数据: $f_{L1} = 4.3$, $f_{u1} = 5.3$, $B_1 = 1$, $f_{L2} = 17.5$, $f_{u2} = 19$, $B_2 = 1.5$,

3.1 复信号

重新编号: $f_{1L} = 4.3$, $f_{1h} = 5.3$, $f_{2L} = 17.5$, $f_{2h} = 19$, $f_{s \min} = B_1 + B_2 = 2.5$;

$$0 \leq k_{21} \leq \lfloor \frac{f_{2L} - f_{1h}}{f_{s \min}} \rfloor = 4, \quad \frac{f_{2h} - f_{1L}}{k_{21} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{2L} - f_{1h}}{k_{21}}, \text{ 见表 1.}$$

3.2 实信号

重新编号: $f_{1L} = -19$, $f_{1h} = -17.5$, $f_{2L} = -5.3$, $f_{2h} = -4.3$, $f_{3L} = 4.3$, $f_{3h} = 5.3$, $f_{4L} = 17.5$, $f_{4h} = 19$, $f_{s \min} = 2 \sum_1^2 B_i = 5$ 。

$$0 \leq k_{21} \leq \lfloor \frac{f_{2L} - f_{1h}}{f_{s \min}} \rfloor = 2, \quad \frac{f_{2h} - f_{1L}}{k_{21} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{2L} - f_{1h}}{k_{21}}, \text{ 见表 2.}$$

$$0 \leq k_{31} \leq \lfloor \frac{f_{3L} - f_{1h}}{f_{s \min}} \rfloor = 4, \quad \frac{f_{3h} - f_{1L}}{k_{31} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{3L} - f_{1h}}{k_{31}}, \text{ 见表 3.}$$

$$0 \leq k_{41} \leq \lfloor \frac{f_{4L} - f_{1h}}{f_{s \min}} \rfloor = 7, \quad \frac{f_{4h} - f_{1L}}{k_{41} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{4L} - f_{1h}}{k_{41}}, \text{ 见表 4.}$$

$$0 \leq k_{32} \leq \lfloor \frac{f_{3L} - f_{2h}}{f_{s \min}} \rfloor = 1, \quad \frac{f_{3h} - f_{2L}}{k_{32} + 1} \leq f_s \leq \frac{f_{3L} - f_{2h}}{k_{32}}, \text{ 见表 5.}$$

上述条件均满足的无频谱混叠采样率 f_s 范围见表 6。

表 1

k_{21} 的值	满足条件的 f_s 范围
4	$2.94 \leq f_s \leq 3.05$
3	$3.675 \leq f_s \leq 4.0667$
2	$4.9 \leq f_s \leq 6.1$
1	$7.35 \leq f_s \leq 12.2$
1	$14.7 \leq f_s \leq \infty$

表 2

k_{21} 的值	满足条件的 f_s 范围
2	$4.9 \leq f_s \leq 6.1$
1	$7.35 \leq f_s \leq 12.2$
1	$14.7 \leq f_s \leq \infty$

表 3

k_{31} 的值	满足条件的 f_s 范围
4	$4.86 \leq f_s \leq 5.45$
3	$6.075 \leq f_s \leq 7.267$
2	$8.1 \leq f_s \leq 10.9$
1	$12.15 \leq f_s \leq 21.8$
1	$24.3 \leq f_s \leq \infty$

表 4

k_{41} 的值	满足条件的 f_s 范围
7	$4.75 \leq f_s \leq 5$
6	$5.4285 \leq f_s \leq 5.85$
5	$6.333 \leq f_s \leq 7$
4	$7.6 \leq f_s \leq 8.75$
3	$9.5 \leq f_s \leq 11.667$
2	$12.667 \leq f_s \leq 17.5$
1	$19 \leq f_s \leq 35$
0	$38 \leq f_s \leq \infty$

表 5

k_{32} 的值	满足条件的 f_s 范围
1	$5.3 \leq f_s \leq 8.6$
0	$10.6 \leq f_s \leq \infty$

表 6

$k_{41} = 6, k_{32} = 1,$	$5.4285 \leq f_s \leq 5.45$
$k_{41} = 4, k_{32} = 0,$	$8.1 \leq f_s \leq 8.6$
$k_{41} = 3, k_{32} = 0,$	$10.6 \leq f_s \leq 10.9$
$k_{41} = 2, k_{32} = 0,$	$14.7 \leq f_s \leq 17.5$
$k_{41} = 1, k_{32} = 0,$	$19 \leq f_s \leq 21.8$
$k_{41} = 1, k_{32} = 0,$	$24.3 \leq f_s \leq 35$
$k_{41} = 0, k_{32} = 0,$	$38 \leq f_s \leq \infty$

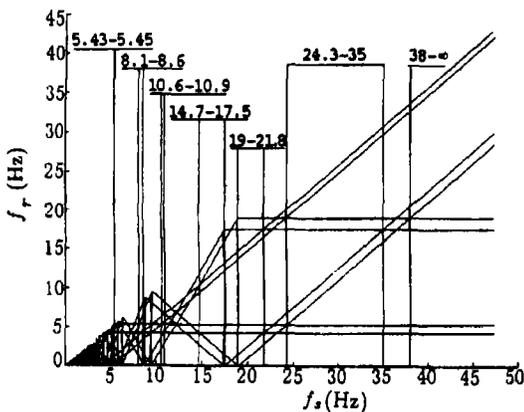


图 1 两个带通信号允许的采样率

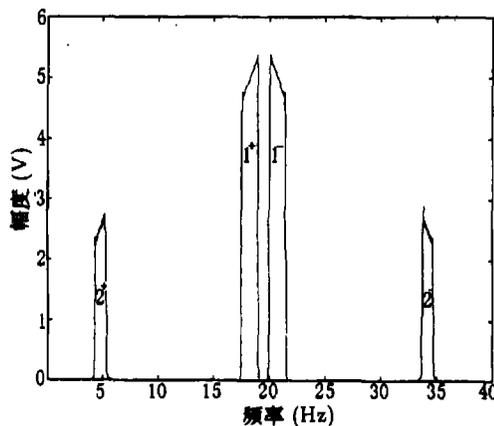


图 2 采样率 $f_s = 39$ 时信号频谱

图 1 中斜率为负的折线是余数边带，斜率为正的折线为负余数边带，从图中可以明显看出在表 6 所确定的范围内正、负余数边带不会混叠。图 2，图 3，图 4 分别给出了 $f_s=39$ 、 $f_s=20$ 和 $f_s=5.44$ 的 $0 \sim f_s$ 内频谱，其中带通信号为 $17.5 \leq |f| \leq 19$ 中心频率处幅度为 5，

信号 2 为 $4.3 \leq |f| \leq 5.3$ 中心频率处幅度为 2.5, 图中标 1^+ , 1^- 和 2^+ , 2^- 分别表示信号 1 和 2 在采样率 f_s 下, 在 $0 \sim f_s$ 内正负余数边带。

由以上各图看到, 各信号频谱的错位与 k_{41} , k_{32} 的奇偶有关: k_{41} , k_{32} 为偶数分别对应信号 1, 2 无错位, k_{41} , k_{32} 为奇数分别对应信号 1, 2 有错位情况, 这与第 2 节讨论 (2) 的结果是一致的。而利用第 2 节所述方法可以使多信号频谱不重叠, 从而可以有效地压缩进入 DSP 的数据量, 去除多余数据。

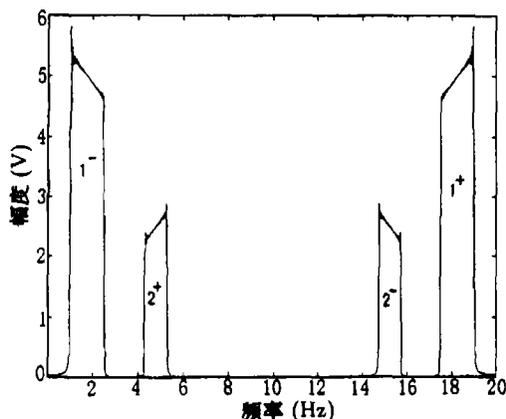


图 3 采样率 $f_s = 20$ 时信号频谱

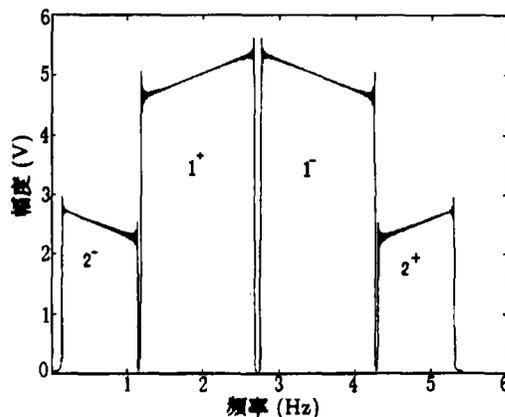


图 4 采样率 $f_s = 5.44$ 时信号频谱

4 结 束 语

本文讨论了在 A/D 转换器尽量靠近 RF 端时, 多个带通信号出现在天线带宽内时, 允许的欠采样率, 使采样后频谱在 $0 \sim f_s$ 内不混叠, 从而完整地保留了多个带通信号的信息。由前述, 可能找到远远低于奈奎斯特采样率的欠采样率, 这对数字接收机的后续实时处理提供了保证。

参 考 文 献

- [1] Mitola J. The software radio architecture. *IEEE Communications Magazine*, 1995, 33(5): 26-28.
- [2] Wepman J A. Analog-to-digital converters and their applications in radio receivers. *IEEE Communications Magazine*, 1995, 33(5): 39-45.
- [3] Mitola J. Software radio: Survey, critical evaluation and future directions. *IEEE AES Magazing*, 1993, 8(1): 25-36.
- [4] James Tsui Bao-yen. *Digital Techniques for Wideband Receivers*, ARTech House Inc. 1995. ISBN 0-89006-8089.
- [5] Turlletti T, Tennenhouse D. Estimating the computational requirements of software GSM base station, Proc. IEEE 1997 International conference on communications, Montreal, Canada: 1997, 169-175.
- [6] Vanghan R G, Scott N L, White D R. The theory of bandpass sampling. *IEEE Trans. on SP* 1991, SP-39(9): 1973-1984.
- [7] Zoltowski M D, Mathaws C P. Real-time frequency and 2-D angle estimation with sub-Nyquist spatio-temporal sampling. *IEEE Trans. on SP*, 1994, SP-42(10): 2781-2794.

- [8] 黄有方. 带通信号的直接采样与重构. 信号处理, 1994, 10(1): 194-198.

THE DIRECT UNIFORM UNDER-SAMPLING TECHNIQUE OF MULTIPLE BANDPASS SIGNALS

Huang Yong Xiao Xianci Lin Yunsong

(Dept. of Electron. Eng., Univ. of Electron. Sci. and Tech. of China, Chengdu 610054)

Abstract This paper discussed the uniform under-sampling of multiple bandpass signals in digital receiver. For these multiple real or complex bandpass signals having arbitrary band position and bandwidth, the acceptable sampling rate has been given. Using this sampling rate to sample the input bandpass signal, an efficient data compression can be gotten. In the same time using band pass filter, these multiple bandpass signals can be transferred to the lower frequency. Finally, an example is given to show the correctness of the uniform sampling method of multiple bandpass signals.

Key words Bandpass signal, Uniform sampling, Aliasing

黄 勇: 男, 1964 年生. 副教授, 主要从事数字信号处理、采样技术的研究.
肖先赐: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事现代信号处理方法的研究和教学工作.
林云松: 男, 1967 年生, 博士, 主要从事数字信号处理的研究.