第 22 卷 第 6 期
2000 年 11 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.22 No.6
Nov. 2000

模糊集合距离的一种度量方法及其在规则内插中的应用 [1]

杜文吉　　谢维信 *

(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)
*(深圳大学校长办公室 深圳 518060)

摘　要　基于对模糊集基本特性的分析，提出了一种模糊集合的距离度量方法，与传统方法不同的是它不但与模糊集的质心有关，而且与模糊集的基数有关；其次讨论了如何基于这种距离的定义来实现模糊控制，并指出基于这种方法实现的模糊控制器可以逼近任意连续函数．其优越之处也在于它能有效处理规则不完备时常规模糊控制器所面临的问题．

关键词　模糊集合，距离度量，近似推理，模糊控制

中图号　TP391

1 引　言

提出模糊集合理论的源动力来源于构造一个形式化的，定量的框架来处理人类用自然语言所表述知识的模糊性．正是这种模糊性将有关客观世界传统的精确数学模型与这一系统在人们头脑中的不精确表述分隔开来．模糊集合提供了一种不确定性信息的表述方法，模糊隶属函数表示一个元素属于某个模糊集合的程度，模糊数是定义在实轴上的凸的正规模糊集合．现在大多数模糊控制器和推理决策系统中，模糊数常被用来表述语言变量的取值．

建立完备的规则库是实现模糊控制与推理的先决条件．在这些系统中，给定输入变量，就可以利用模糊推理的方法根据适当的规则，得出有关输出变量的某种结论，进而由这一结论完成模糊控制或决策．但当规则库稀疏时，即当输入论域不能为规则所完全覆盖，在规则条件所定义的区域之间可能存在空白的区域，这时传统的模糊控制器就不能很好地工作．为了解决这一问题， Koczy 和 Hirota[1] 提出了一种线性插值推理方法， Yan Shi[2] 等对这一方法进行了更为深入的讨论．但是 Koczy 和 Hirota 的方法只对部分隶属函数有效，而且有时可能产生不合理的结论．在模糊控制器中，如何处理规则稀疏所产生的问题一直没有得到足够的重视。

本文给出一种基于模糊距离度量的模糊控制器实现方法．我们首先对于有关模糊集合的距离测度的定义进行简要的回顾，指出它们的一些不足之处．在此分析的基础上，提出了一种基于模糊数的质心和基数的距离定义方法．在此工作的基础上，本文第 3 节提出了一种基于模糊集合距离度量的模糊控制器实现方法，指出该种模糊控制器满足万能逼近定理的要求，可以逼近任意连续的函数．与常规的模糊控制器相比较，本文实现的模糊控制器可以比较有效地处理由于规则稀疏所带来的问题．本文第 4 节给出实验仿真，说明相比于传统模糊控制器本文方法的优越性能．

2 一种基于模糊集相对基数的距离度量方法

定义 1　设 A 是模糊集合， $\mu_A(u)$ 是其隶属函数，对任意 $\alpha \in [0,1]$ ，集合 $A_\alpha = \{u|\mu_A(u) > \alpha\}$ 称为 A 的 α-截集．

定义 2　设 A 是定义在区间 $[u_{\min}, u_{\max}]$ 上的模糊集合， $\mu_A(u)$ 是其隶属函数， A 的基

[1] 1999-01-08 收到， 1999-06-18 定稿

数和相对基数分别定义为

$$\mathrm{card}(A)=\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}\mu_A(u)\mathrm{d}u, \tag{1}$$

$$\mathrm{rcard}(A)=\frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(U)}, \tag{2}$$

其中 U 是 $[u_{\min},u_{\max}]$ 上的模糊集合，且 $\mu_U(u)=1,\forall u\in[u_{min},u_{\max}]$。

定义 3 设 A 是模糊集合，$\mu_A(u)$ 是其隶属函数，A 的质心定义为

$$x_0=\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}u\times\mu_A(u)\mathrm{d}u\Big/\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}\mu_A(u)\mathrm{d}u. \tag{3}$$

现已提出的模糊集合的距离度量大多是对实数区间的 Hausdorff 距离度量的拓广 [1]。设 A 和 B 为模糊集合，基于 Hausdorff 距离度量，它们之间的距离定义有以下几种形式：

$$d_{H1}(A,B)=\int_0^1 d_H(A_\alpha,B_\alpha)\mathrm{d}\alpha, \tag{4}$$

$$d_{H2}(A,B)=\sup{}_{\alpha\geq 0.0}d_H(A_\alpha,B_\alpha), \tag{5}$$

$$d_{H3}(A,B)=d_H(A_{1.0},B_{1.0}), \tag{6}$$

其中 A_α 和 B_α 分别是模糊集合 A 和 B 的 α-截集，$d_H(A_\alpha,B_\alpha)$ 是实数区间 A_α 和 B_α 的 Hausdorff 距离。

形式 d_{H1}, d_{H2} 和 d_{H3} 定义的模糊集合间的距离是对 Hausdorff 距离的推广，正如文献 [3] 指出的那样，常得出与人们的经验判断不相符的结论。针对这种情况， L.T. Koczy 和 K.Tanaka[4] 给出了模糊集合的上界距离和下界距离 $d_L(A,B)$ 和 $d_U(A,B)$，但是文献 [3] 指出，并不是对于所有的模糊集合都能给出计算结果。文献 [3] 给出基于 α-截集的中点连线的模糊集合距离度量，但在很大程度上忽略了模糊集合的形态信息，计算的结果与模糊集合的基数没有关系。针对这些不足，下面我们给出了一种新的模糊集的距离度量方法。

一般认为模糊集合 A 和 B 的距离度量应满足条件：(1) A 和 B 的质心距离越大，则 A 和 B 的距离应越大；(2) card(A) 和 card(B) 越大，则 A 和 B 的距离应越小。设 A,B 是两个模糊集合，我们可以发现，以下两种形式模糊集合的距离度量是满足这两个条件的。

$$d_1(A,B)=\frac{|x_{Ao}-x_{Bo}|}{1+\mathrm{rcard}(A)+\mathrm{rcard}(B)}, \tag{7}$$

$$d_2(A,B)=|x_{Ao}-x_{Bo}|\times(1-\max(\mathrm{rcard}(A),\ \mathrm{rcard}(B)))^m, \tag{8}$$

其中 x_{Ao} 和 x_{Bo} 是模糊集合 A 和 B 的质心，rcard(A) 和 rcard(B) 是 A 和 B 的相对基数。

与 Hausdorff 距离度量一样，表示模糊集合之间的距离度量一般并不满足欧氏距离的定义。具体的说，(7) 式和 (8) 式所定义的模糊集合 A,B 之间的距离一般不满足三角不等式，同时，对于 $d(A,B)=0$，并不意味着 $A=B$。因此，这里要指出的是，集合与集合之间距离的定义仅仅是表示集合远近的一种近似的表示方法。

(7) 式和 (8) 所定义的模糊集合距离度量具有如下性质：

性质 1 A,B 和 C 是定义在区间 $[u_{\min},u_{\max}]$ 上的模糊集合，如果 rcard(A)=rcard(B) =rcard(C)，则 (7) 式和 (8) 式定义的模糊集合距离满足三角不等式。

性质 2 A、B 是定义在区间 $[u_{\min},u_{\max}]$ 上的模糊集合，如果 A 的质心等于 B 的质心，则 (7) 式和 (8) 式定义的模糊集合 A 和 B 的距离等于 0。

(8) 式计算的模糊集合间的距离还有一个 (7) 式所没有的良好性质，即

性质 3 A, B 是定义在区间 $[u_{\min}, u_{\max}]$ 上的模糊集合，如果 rcard(A) 或 rcard(B) 趋于 1.0 ，则 (8) 式定义的模糊集合距离 $d_2(A, B)$ 趋于 0.0 。

性质 3 表明，当模糊集合的相对基数为 1.0 时，模糊集合距离与它们的质心没有关系，永远等于 0 。

3 基于模糊集合距离度量的模糊控制器

在上文中，我们指出当规则库稀疏时，即当输入论域不能为规则所完全覆盖，在规则前件所定义的区域之间可能存在空白的区域。比如当输入落入此空白区域时就不能激活任何规则，因而也不能得到可靠有效的结论输出。为了解决这一问题，下面我们提出一种基于模糊集合间距离度量的控制器实现方法。

设 XY 为输入论域， U 为输出论域，第 i 条模糊规则为 "如果 x 为 A_i, y 为 B_i ，则 u 为 C_i'', $(i = 1, \cdots, c)$, c 为规则数目。一般情况下，模糊规则的前件满足如下条件：

$$XY = \cup \mathrm{supp}(A_i \times B_i), \tag{9}$$

但是当规则稀疏时，即当输入论域不能为规则所完全覆盖时，就存在 $X \times Y$ 的子集合 W 使得

$$W = X \times Y - \cup \mathrm{supp}(A_i \times B_i). \tag{10}$$

当 $(x, y) \in W$ 时，模糊推理系统就不能得出可靠有效的输出。

为了使得在 $(x, y) \in W$ 时，模糊推理系统能得出可靠有效的输出，就必然要根据某种准则激活适当的规则。而根据观测量 (x, y) 相对于各个规则的前件 $A_i \times B_i$ 的远近不同确定规则的激活程度是一种比较有效的可选方案。设 $d_i(x, A_i)$ 和 $d_i(y, B_i)$ 是观测量 x 和 y 与模糊集合 A_i 和 B_i 的距离。如果将观测量 x 和 y 视为单点模糊集合，则根据 (8) 式，定义 $d_i(x, A_i)$ 和 $d_i(y, B_i)$ 为

$$d_i(x, A_i) = \|x - x_{A_i}\| \times (1 - \mathrm{rcard}(A_i))^m, \tag{11a}$$

$$d_i(y, B_i) = \|y - x_{B_i}\| \times (1 - \mathrm{rcard}(B_i))^m, \tag{11b}$$

其中 x_{A_i}, x_{B_i} 是模糊集合 A_i 的质心。

我们定义观测量 (x, y) 激活规则 $i(= 1, \cdots, c)$ 的程度为

$$\lambda_i(x, y) = \mathbf{1.0} / \sum_{k=1}^{c} (d_i / d_k)^n, \tag{12}$$

其中 $d_i = \sqrt{d_i(x, A_i)^2 + d_i(y, B_i)^2}$ 。

我们可以发现， λ_i 满足以下条件：

$$\sum_i \lambda_i(x, y) = \mathbf{1.0}, \tag{13}$$

在得出观测量 (x, y) 激活各条规则的程度后，就可以采用各种规则推理方法得出结论，进而由去模糊方法得出控制量。比如以和积推理和中心平均去模糊化方法为例，可以得出控制变量由下式：

$$u = \sum_{i=1}^{c} u_i \times \lambda_i(x) \tag{14}$$

给出，其中 u_i 是规则 i 后件 C_i 的质心.

设 Z 为由上述算法所构造的论域 U 上模糊控制系统. 基于 Stone-Weierstrass 定理，文献 [5] 给出了一种模糊控制系统 Z 能够以任意精度逼近任何连续实函数的三个条件，分别为：(1) Z 为代数系统，即集合 Z 对加法，乘法和标量乘法封闭；(2) Z 离析 U 上各点，即对每一个 $x, y \in U$ ，如果 $x \neq y$ ，则存在 $f \in Z$ ，使得 $f(x) \neq f(y)$; (3) 对于每一个 $x \in U$ ，总存在 $f \in Z$ ，使得 $f(x) \neq 0$ 。

可以验证，由以上方法设计的模糊控制系统满足这三个条件. 因此上述算法所构造的论域 U 上模糊控制系统可以逼近任何连续实函数.

4 实验仿真

实验 1 假设存在一个简单的模糊控制器包含三条规则，分别为

$R1$： 如果 x 是 A_1 ， 则 y 是 10 ;

$R2$： 如果 x 是 A_3 ， 则 y 是 50 ;

$R3$： 如果 x 是 A_5 ， 则 y 是 100 ;

A_1, A_3, A_5 分别是变量 x 的模糊集合，如图 1(a) 所示. 图 1(b) 是根据规则前件隶属度值确定规则激活度得到的模糊控制器的输出. 由图可见， x 在区间 [25, 40], [60, 75] 中，由于不能激活任何规则，因而得不到有效的输出.

图 1(d) 和图 1(f) 分别是基于模糊集合距离度量的模糊控制器得到的结果. 在图 1(c) 、图 1(d) 中， $m = 2, n = 4$ 。在图 1(e) 和图 1(f) 中， $m = 5, n = 4$ 。通过进一步的实验

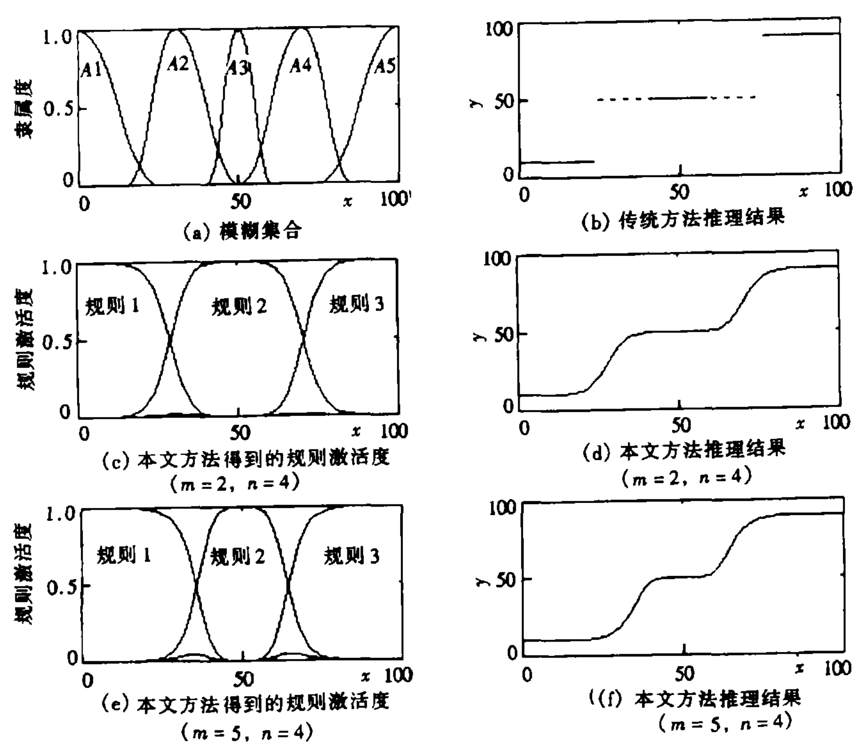

图 1 单输入单输出模糊系统仿真

发现：(1) 通过调节 m 可以达到调节规则作用范围的目的，即 m 越大，则规则前件模糊集合的相对基数对于确定规则激活度的影响越大；(2) 参数 n 确定输出的连续性，当 $n \to \infty$ 时，输出是一个不连续的阶跃函数.

实验 2 倒立摆控制具有两个输入变量，分别为摆与垂直方向的夹角及角速度. 为了验证本文方法在稀疏不完备的规则库的情况下的处理能力，假设仅仅存在三条规则，规则作用区域如图 2(a) 所示. 由图可见，这样的模糊控制器不能有效的完成控制倒立摆的目的. 图 2(b)，2(c)，2(d) 分别是在参数不同的取值时控制曲面的等值线图. 在此我们可以进一步观察到参数 m 和 n 对于控制曲面的影响. 其中图 2(b) 和 2(c) 所示的控制曲面可以很好控制倒立摆，但是图 2(d) 所示的控制曲面不能完成倒立摆控制任务.

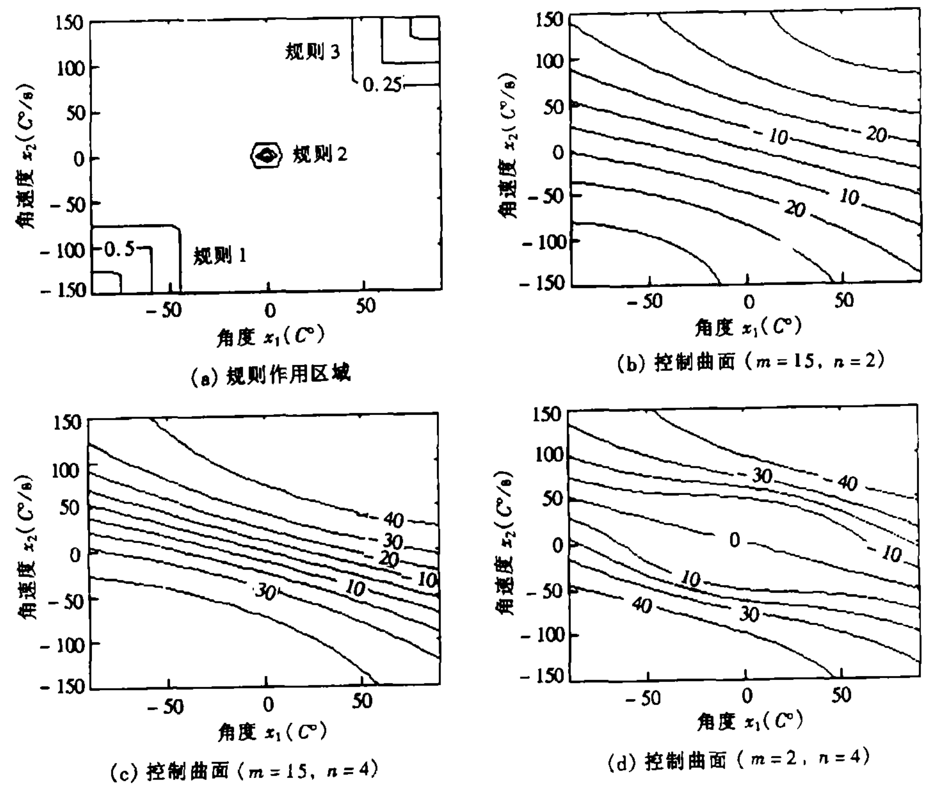

图 2 倒立摆模糊控制器规则作用区域及不同参数下的控制曲面

5 结论和建议

本文首先提出了一种两个模糊集合的距离度量方法，与传统方法不同的是它不但与模糊集的质心，而且与模糊集的基数有关. 其次本文讨论了如何基于这种距离的定义来实现模糊控制，并指出基于这种方法实现的模糊控制器可以逼近任意连续函数. 这种控制的优越之处也在于其能有效处理规则不完备时常规模糊控制器所面临的问题. 最后本文以一个仿真实例对比说明了这种方法实现的模糊控制器的优越性能.

这里要指出的是，本文所提方法实现的模糊控制器的控制性能依赖于参数 m 和 n 的取值. 其中，参数 m 考虑了集合相对基数对于控制量取值的影响，而参数 n 决定了控制曲面的连续性.

参 考 文 献

[1] Koczy L T, Hirota K. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases. Information Science, 1993, 71(1): 169-201.

[2] Yan Shi, Masaharu Mizumoto. Reasoning conditions on Koczy's interpolative reasoning method in sparse fuzzy rule bases, Part II, Fuzzy Sets and Systems, 1997, 87(1): 47-56.

[3] Subasic P, Hirota K. Similarity rules and gradual rules for analogical and interpolative reasoning with imprecise data. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96(1): 53-75.

[4] Koczy L T, Tanaka K. Ordering, distance and closeness of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59(2): 281-293.

[5] 王立新. 自适应模糊系统与控制——设计与稳定性分析. 北京：国防工业出版社, 1997 年, 242-253.

A KIND OF DISTANCE MEASURE BETWEEN TWO FUZZY SETS AND ITS APPLICATIONS IN RULE INTERPOLATION

Du Wenji Xie Weixin*

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

*(*President Office of Shenzhen University, Shenzhen* 518060)

Abstract A fuzzy controller based on the distance between two fuzzy sets is proposed in this article. First, a definition of distance between two fuzzy sets is proposed. This definition is different from traditional one's for its dependent on the cardinal numbers and centroids of the two fuzzy sets. Then the method is used in designing a fuzzy controller. It is also pointed out that the fuzzy controller implemented through this way can approximate any continuous real function. The fuzzy controller proposed is able to handle the problem in the case that the input universe is not covered completely with the rule base.

Key words Fuzzy set, Distance measure, Approximate reasoning, Fuzzy control

杜文吉： 男, 1970 年生, 博士生, 主要研究方向包括模糊信息处理, 神经网络, 计算机软件等.

谢维信： 男, 1956 年生, 教授, 西安电子科技大学博士生导师, 现为深圳大学校长, 主要研究方向包括模糊信息处理, 神经网络, 目标识别, 雷达信号处理等.