二进制标准正交对偶序列的游程定理 [1]

杨光正　　杨翔宇*　　徐丽娟

(中国西南电子技术研究所 成都 610036)

*(北京大学物理系 北京 100871)

摘 要 本文借助于二进制序列的游程相关函数 (杨光正等， 1998) 研究了标准正交对偶的性质. 为证明定理的需要，文中引入了单纯性码段的概念，导出了标准正交对偶游程数之间，对偶码身游程数之间以及对偶定型常数之间的关系.

关键词 标准正交对偶，游程，码身，定型常数

中图号 TN911

1 前 言

标准正交对偶在二进制序列的研究中占有特殊的地位. 在 $4t^2$ 域中若存在 Barker 码，总是以标准正交对偶的形式存在. 绝大多数互补集都由标准正交对偶构成. 在理论上标准正交对偶之所以重要，在于它们的非周期自相关函数 (aACF) 具有相同的峰值旁瓣比，它具有良好的数学性质，因此它是理论研究的一个重要工具，所以有必要深入研究对偶的各种性质. 本文重点研究标准正交对偶之间的游程关系，对偶码身之间的关系以及它们的定型常数之间的关系.

2 定义和约定

本文将长游程与长游程链接成的码段称为 l 型码段. 由游程长度为 $l(>1)$ 的游程构成的游程串 ξl 是 l 型码段的特殊情况. 将 $l=1$ 的游程构成的游程串 $\xi 1$ 称为 $\xi 1$ 型码段. l 型码段与 $\xi 1$ 型码段统称为单纯性码段. l 型码段中包含的游程数记为 S，码字中包含 l 型码段的段数记为 $N_{\alpha S}$. $\xi 1$ 型码段中包含的游程数等于 $\xi 1$ 的串游程数 (数值上等于 $\xi 1$ 包含的码元数). 码字中包含 $\xi 1$ 型码段的段数在数值上等于码字中包含游程串 $\xi 1$ 的串数 $L_{\xi 1}$.

将码字 C_α 中单纯性码段的段数记为 $N_{\alpha SS}$，显然 $N_{\alpha SS}=N_{\alpha S}+L_{\alpha\xi 1}$. 文中符号的第一下标是码字的标记，在不致引起混淆的情况下常省略. 其余未说明的符号的定义和约定与文献 [1–3] 同.

3 旁瓣与游程的关系

推论 1 若 C_α 中存在 $L_{\alpha\xi 1}$ 个串 $\xi 1$，则 C_α 中的单纯性码段的段数 N_{SS} 为： (1) 当 C_α 是 C_α^{I} 时， $N_{SS}=2L_{\alpha\xi 1}$； (2) 当 C_α 是 C_α^{II} 时， $N_{SS}=2L_{\alpha\xi 1}+1$； (3) 当 C_α 是 C_α^{III} 时， $N_{SS}=2L_{\alpha\xi 1}-1$.

证明 码字中 l 型码段和 $\xi 1$ 型码段总是交替排列的，按 I 型，II 型，III 型码的定义 [2]，立即得到 (1)–(3).

[1] 1997-07-18 收到， 1998-01-29 定稿

定理 1 若 C_α 中存在 $l>1$ 的游程 $M_{\alpha[>1]}$ 个，$l=1$ 的游程 $m_{\alpha\xi1}$ 个，设 $M_{\alpha[>1]}$ 个长游程共包含码元 $m_{\alpha[>1]}$ 个，则 C_α 的 aACF 的 $\rho_\alpha(1)$ 必为

$$\rho_\alpha(1)=m_{\alpha[>1]}-2M_{\alpha[>1]}-m_{\alpha\xi1}+1. \tag{1}$$

证明 设 C_α 中有 n_α 个游程，则有链接点 $(n_\alpha-1)$ 个，每个链接点在计算 $\rho(1)$ 时，提供一个 "-1" 项，故有 $\rho_\alpha(1)=\sum_{i=1}^{N-1}c_ic_{i+1}=[(N-1)-(n_\alpha-1)]-(n_\alpha-1)=N-2n_\alpha+1$，由于 $n_\alpha=M_{\alpha[>1]}+m_{\alpha\xi1}$，$N=m_{\alpha\xi1}+m_{\alpha[>1]}$，所以有 $\rho(1)=m_{\alpha[>1]}-2M_{\alpha[>1]}-m_{\alpha\xi1}+1$．

证毕

推论 2 若 C_α 中存在 $l>2$ 的游程 $M_{\alpha[>2]}$ 个，$l=1$ 的游程 $m_{\alpha\xi1}$ 个，设 $M_{\alpha[>2]}$ 个游程共包含码元 $m_{\alpha[>2]}$ 个，则有

$$\rho_\alpha(1)-1=m_{\alpha[>2]}-2M_{\alpha[>2]}-m_{\alpha\xi1}. \tag{2}$$

证明 对 (1) 式考虑关系 $M_{\alpha[>1]}=M_{\alpha[>2]}+M_{\alpha2}$；$m_{\alpha[>1]}=m_{\alpha[>2]}+m_{\alpha2}$；$m_{\alpha2}=2M_{\alpha2}$ 即可．

证毕

本文 $M_{\alpha l}$ 是 C_α 中包含长度为 l 的游程个数，$m_{\alpha l}$ 是 $M_{\alpha l}$ 个游程包含的码元总数．

推论 3 C_α 中长游程包含的码元总数 $m_{\alpha[>1]}$ 与 $l=1$ 的游程包含的码元总数之差必为

$$m_{\alpha[>1]}-m_{\alpha\xi1}=\rho_\alpha(1)+(N-\rho_\alpha(2))/2-B_\alpha^{(2)}. \tag{3}$$

证明 联立 RCF[1] 和 Tseng 子游程 [2] 公式

$$\left.\begin{aligned}&\rho_\alpha(2)=(N+2)-2\sum_{k=1}^{2}n_{\alpha k}^{(2)},\\&\sum_{k=1}^{2}n_{\alpha k}^{(2)}=2M_{\alpha[>1]}+B_\alpha^{(2)}\end{aligned}\right\};$$

解出：$2M_{\alpha[>1]}=(N-\rho_\alpha(2))/2+1-B_\alpha^{(2)}$，代入 (1) 式，经整理后即得 (3) 式． 证毕

4 对偶游程数之间的关系

定理 2 若 $(C_\alpha,C_\beta)_{so}$ 中分别存在长游程 $M_{\alpha[>1]}$，$M_{\beta[>1]}$ 个，其中有 $l=2$ 的游程 $M_{\alpha2}$，$M_{\beta2}$ 个，有 $\xi1$ 游程串 $L_{\alpha\xi1}$，$L_{\beta\xi1}$ 个．则

(1) 若 C_α 是 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}=C_{\alpha h}\circ C_{\alpha b}\circ C_{\alpha t}=l_{\alpha h}^{(1)}\circ C_{\alpha b}\circ l_{\alpha t}^{(n_t)}$，有

$$M_{\alpha[>1]}-L_{\alpha\xi1}=\begin{cases}M_{\beta2}\\M_{\beta2}-1\end{cases}\Rightarrow M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi1}=\begin{cases}M_{\beta2}-M_{\alpha2}, & \text{当}l_{\alpha h}>2,\ n_t>1; & \text{(4a)}\\M_{\beta2}-M_{\alpha2}-1, & \text{当}l_{\alpha h}\geq2,\ n_t=1; & \text{(4b)}\end{cases}$$

$$M_{\beta[>1]}-L_{\beta\xi1}=\begin{cases}M_{\alpha2}\\M_{\alpha2}-1\end{cases}\Rightarrow M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi1}=\begin{cases}M_{\alpha2}-M_{\beta2}, & \text{当}l_{\alpha h}>2,\ n_t\geq1; & \text{(4c)}\\M_{\alpha2}-M_{\beta2}-1, & \text{当}l_{\alpha h}=2,\ n_t=1. & \text{(4d)}\end{cases}$$

(2) 若 C_α 是 $C_\alpha{}^{\mathrm{II}}=l_{\alpha h}^{(1)}\circ C_{\alpha b}\circ l_{\alpha t}^{(1)}$ ，则有

$$M_{\alpha[>1]}-L_{\alpha\xi1}=\begin{cases}M_{\beta2}+1\\M_{\beta2}-1\\M_{\beta2}\end{cases}\Rightarrow M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi1}=\begin{cases}M_{\beta2}-M_{\alpha2}+1, & \text{当}l_{\alpha h},l_{\alpha t}>2; \quad (5a)\\M_{\beta2}-M_{\alpha2}-1, & \text{当}l_{\alpha h}=l_{\alpha t}=2; \quad (5b)\\M_{\beta2}-M_{\alpha2}, & \text{当}l_{\alpha h},l_{\alpha t}\text{之一等于}2; \quad (5c)\end{cases}$$

$$M_{\beta[>1]}-L_{\beta\xi1}=M_{\alpha2}-1\Rightarrow M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi1}=M_{\alpha2}-M_{\beta2}-1,\ \text{当}l_{\alpha h},l_{\alpha t}>1. \tag{5d}$$

证明　由推论 1 可知 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 中有 $L_{\alpha\xi1}$ 个 l 型码段，现记第 i 个 l 型码段的游程数为 S_i ，则此码段中长游程与长游程的链接点有 (S_i-1) 个，所以 $L_{\alpha\xi1}$ 个 l 型码段包含的链接点总数是 $\sum_{i=1}^{L_{\alpha\xi1}}(S_i-1)=\sum_{i=1}^{L_{\alpha\xi1}}S_i-L_{\alpha\xi1}=M_{\alpha[>1]}-L_{\alpha\xi1}$.

当 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}\rightarrow C_\beta{}^{\mathrm{I}}$ 时， $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 中每个长游程与长游程链接点的链接元映成 $C_\beta{}^{\mathrm{I}}$ 中的一个 $2^{(1)}$ 游程，所以， (1) 当 $n_t>1$ 时， $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 中长游程与长游程的链接点的总数应等于 $C_\beta{}^{\mathrm{I}}$ 中 $2^{(1)}$ 游程的个数，即 $M_{\alpha[>1]}-L_{\alpha\xi1}=M_{\beta2}$. 由于 $M_{\alpha[>1]}=M_{\alpha[>2]}+M_{\alpha2}$ ，故 $M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi1}=M_{\beta2}-M_{\alpha2}$ ， (4a) 式成立． (2) 当 $n_t=1$ 时，除 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 中长游程与长游程链接点的链接元映成 $C_\beta{}^{\mathrm{I}}$ 中的 $2^{(1)}$ 游程外，码尾的映射是 $1_{\alpha t}^{(1)}\leftrightarrow 2_{\beta t}^{(1)}$, 故 $C_\beta{}^{\mathrm{I}}$ 的 $M_{\beta2}$ 个 $2^{(1)}$ 中仅有 $(M_{\beta2}-1)$ 个 $2^{(1)}$ 是由长游程与长游程的链接点映成的，于是有 $M_{\alpha[>1]}-L_{\alpha\xi1}=M_{\beta2}-1\Rightarrow M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi1}=M_{\beta2}-M_{\alpha2}-1$.

因码首 $C_{\alpha h}=l_{\alpha h}^{(1)}\leftrightarrow C_{\beta h}=1_{\beta h}^{(n_h)}$ ，有关系 $n_h=l_{\alpha h}-1$ ，故当 $l_{\alpha h}>2$ 时， $n_h>1$ ，码尾的变换也相同，所以只要将 (4a) 式中的下标 α,β 互易，即得 (4c) 式．

当 $l_{\alpha h}=2$ 时， $n_{\beta h}=1$ ；当 $n_{\alpha t}=1$ 时， $l_{\beta t}=2$. 同法可证 (4d) . 其余各式证法相同(从略) .

推论 4　$(C_\alpha{}^{\mathrm{I}},C_\beta{}^{\mathrm{I}})_{so}$ 的

$$(m_{\alpha[>1]}-m_{\beta[>1]})-(m_{\alpha\xi1}-m_{\beta\xi1})=2\rho_\alpha(1). \tag{6}$$

证明　因 [2] $\sum_{k=1}^{2}n_{\alpha k}^{(2)}=2M_{\alpha[>1]}+B_\alpha^{(2)}$; $\sum_{k=1}^{2}n_{\beta k}^{(2)}=2M_{\beta[>1]}+B_\beta^{(2)}$. 考虑 $\rho_\alpha(2)=\rho_\beta(2)$ ， I 型码的 $B_\alpha^{(2)}=B_\beta^{(2)}=1$ ，即得 $M_{\alpha[>1]}=M_{\beta[>1]}$. 再考虑 $\rho_\beta(1)=-\rho_\alpha(1)$ ，引用 (1) 式后，即得本推论．

推论 5　$(C_\alpha,C_\beta)_{so}$ 的

$$(m_{\alpha[>1]}+m_{\beta[>1]})-(m_{\alpha\xi1}+m_{\beta\xi1})=N-\rho_\alpha(2)-(B_\alpha^{(2)}+B_\beta^{(2)}). \tag{7}$$

证明　由 (3) 式可得此推论 (证明从略) .

推论 6　若 $(C_\alpha{}^{\mathrm{I}},C_\beta{}^{\mathrm{I}})_{so}$ 中分别存在 $l=2$ 的游程 $M_{\alpha2}$ ， $M_{\beta2}$ 个，存在 $\xi1$ 串 $L_{\alpha\xi1}$, $L_{\beta\xi1}$ 个，则必有

(1) 当 $l_{\alpha h}>2$ ， $n_t>1$ 或 $l_{\alpha h}=2$ ， $n_t=1$ 时，

$$L_{\beta\xi1}-L_{\alpha\xi1}=M_{\beta2}-M_{\alpha2}. \tag{8a}$$

(2) 当 $l_{\alpha h} > 2$， $n_t = 1$ 时,

$$L_{\beta\xi 1} - L_{\alpha\xi 1} = M_{\beta 2} - M_{\alpha 2} - 1. \tag{8b}$$

证明 只要注意 $C_\alpha \to C_\beta$ 时，码身中一个 $l > 2$ 的游程变换成一串 $\xi 1$, 而码首或码尾中一个 $l > 1$ 的游程变换成一串 $\xi 1$ 这一事实，再结合推论 1 即得 (8) 式.

推论 7 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的 Tseng 游程数必满足:

$$\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j} n_{\beta k}^{(j)}, & 2|j; \\ \sum_{k=1}^{j} n_{\beta k}^{(j)} + \rho_\alpha(j), & 2 \nmid j. \end{cases} \tag{9}$$

证明 (从略).

定理 3 若 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 中分别存在 $L_{\alpha\xi 1}$， $L_{\beta\xi 1}$ 个 $\xi 1$，它们分别包含码元 $m_{\alpha\xi 1}$， $m_{\beta\xi 1}$ 个，对偶的游程数分别是 n_α， n_β，其中各有长游程 $M_{\alpha[>1]}$， $M_{\beta[>1]}$ 个， $l > 2$ 的游程有 $M_{\alpha[>2]}$， $M_{\beta[>2]}$ 个，则有

$$m_{\beta\xi 1} - L_{\beta\xi 1} = N - (n_\alpha + M_{\alpha[>1]} + M_{\alpha[>2]}) + a_\alpha, \tag{10a}$$

$$m_{\alpha\xi 1} - L_{\alpha\xi 1} = N - (n_\beta + M_{\beta[>1]} + M_{\beta[>2]}) + a_\beta. \tag{10b}$$

当码首 (或码尾) 是 $l > 2$ 的游程时， $a = 1$，当码首和码尾均为 $l > 2$ 的游程时， $a = 2$; 否则 $a = 0$.

证明 长度为 l 的 $M_{\alpha l}$ 个游程所包含的码元数应是 $lM_{\alpha l}$. 现记 C_α 中最长的游程长度 $l_{\max} = r$，显然 C_α 的码长 N 和游程数 n_α 应满足 $N = \sum_{l=1}^{r} lM_{\alpha l}$, $n_\alpha = \sum_{l=1}^{r} M_{\alpha l}$. 所以 C_α 中 $l > 1$， $l > 2$ 的游程的游程数应为 $M_{\alpha[>1]} = \sum_{l=2}^{r} M_{\alpha l}$; $M_{\alpha[>2]} = \sum_{l=3}^{r} M_{\alpha l}$. 故有

$$N = n_\alpha + M_{\alpha[>1]} + M_{\alpha[>2]} + \sum_{l=4}^{r} (l-3) M_{\alpha l}. \tag{11}$$

若 C_β 中存在 $L_{\beta\xi 1}$ 个 $\xi 1$，设其中串长为 l' 的有 $L_{\beta l'}$ 个，将最长的串长记为 $l'_{\max} = r'$, 显然有 $L_{\beta\xi 1} = \sum_{l'=1}^{r'} L_{\beta l'}$. $L_{\beta\xi 1}$ 个 $\xi 1$ 包含的码元总数 $m'_{\beta\xi 1}$ 应为

$$m'_{\beta\xi 1} = \sum_{l'=1}^{r'} l' L_{\beta l'} = \sum_{l'=1}^{r'} L_{\beta l'} + \sum_{l'=2}^{r'} (l'-1) L_{\beta l'} = L_{\beta\xi 1} + \sum_{l'=2}^{r'} (l'-1) L_{\beta l'}$$

采用如下的技巧，暂不考虑码首，码尾的特殊性，一律按码身的情况处理，最后再加上修正项加以修正.

在 $C_\alpha \to C_\beta$ 过程中， $l_\alpha > 2$ 的游程的映射是 $l_\alpha^{(1)} \to 1_\beta^{(l_\alpha - 2)}$，因而 $l_{\max}^{(1)} \to 1_\beta^{r'} = 1_\beta^{(l_{\max}-2)} = 1_\beta^{(r-2)}$, 由此得 $r' = r - 2$， $l' = l - 2$. 换句话说 $M_{\alpha l}$ 个长度为 $l (> 2)$ 的游程映成 C_β 中 $L_{\beta l'}$ 个串 $1_\beta^{(l-2)}$，亦即 $l_{\beta(l-2)} = M_{\alpha l}$，所以有 $m'_{\beta\xi 1} = L_{\beta\xi 1} + \sum_{l=4}^{r} (l-3) M_{\alpha l}$. 与 (11) 式比较, 即得 $m'_{\beta\xi 1} - L_{\beta\xi 1} = N - (n_\alpha + M_{\alpha[>1]} + M_{\alpha[>2]})$. 这是未考虑码首, 码尾特殊性获得的结

果. 事实上 $C_{\alpha h}$(或 $C_{\alpha t}$) 到 $C_{\beta h}$(或 $C_{\beta t}$) 的映射关系是 $l_{\alpha h}^{(1)} \leftrightarrow 1_{\beta h}^{(l_{\alpha h}-1)}$，与码身中的映射关系 $l_{\alpha b}^{(1)} \leftrightarrow 1_{\beta b}^{(l_{\alpha b}-2)}$ 差一个码元. 因而 $C_{\alpha h}$(或 $C_{\alpha t}$) 是 $l>2$ 的游程时，C_β 中的 $\xi 1$ 包含的实际码元总数 $m_{\beta\xi 1}=m'_{\beta\xi 1}+1$，所以一般形式应是 $(m_{\beta\xi 1}-a_\alpha)-L_{\beta\xi 1}=N-(n_\alpha+M_{\alpha[>1]}+M_{\alpha[>2]})$. 当 $C_{\alpha h}$(或 $C_{\alpha t}$) 是 $l>2$ 的游程时，修正值 $a_\alpha=1$；当 $C_{\alpha h}$，$C_{\alpha t}$ 都是 $l>2$ 的游程时，$a_\alpha=2$；否则 $a_\alpha=0$.

又因 C_α, C_β 之间的变换是可逆的，故只需将上式中的下标 α, β 互易即得 (10b).

推论 8　若 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 中分别存在 $l>2$ 的游程 $M_{\alpha[<2]}$，$M_{\beta[>2]}$ 个，$\xi 1$ 游程串 $L_{\alpha\xi 1}$，$L_{\beta\xi 1}$ 个，则必有

$$(M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi 1})+(M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi 1})=(a_\alpha+a_\beta)-2. \tag{12}$$

证明　将 (10a) 与 (10b) 式相加，并考虑 $n_\alpha=M_{\alpha[>1]}+m_{\alpha\xi 1}$，$n_\beta=M_{\beta[>1]}+m_{\beta\xi 1}$，得 $(M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi 1})+(M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi 1})=2[N-(n_\alpha+n_\beta)]+(a_\alpha+a_\beta)$.

将 RCF 代入关系 $\rho_\beta(1)=-\rho_\alpha(1)$，可算出：$N-(n_\alpha+n_\beta)=-1$，代入上式即得 (12) 式.　证毕

5　标准正交对偶定型常数间的关系

推论 9　$(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的三阶定型常数之和：

(1) 对 $l_{\alpha h}>2$，$n_t>1$ 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 或 $l_{\alpha h}$，$l_{\alpha t}>2$ 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{II}}$ 恒有

$$B_\alpha^{(3)}+B_\beta^{(3)}=2. \tag{13}$$

(2) 对 $l_{\alpha h}>2$，$n_t=1$ 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 或 $l_{\alpha h}$，$l_{\alpha t}$ 之一等于 2 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{II}}$ 恒有

$$B_\alpha^{(3)}+B_\beta^{(3)}=4. \tag{14}$$

(3) 对 $l_{\alpha h}=2$，$n_t=1$ 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{I}}$ 或 $l_{\alpha h}=l_{\alpha t}=2$ 的 $C_\alpha{}^{\mathrm{II}}$ 恒有

$$B_\alpha^{(3)}+B_\beta^{(3)}=6. \tag{15}$$

证明　由文献 [2] 的推论 8 可得 C_α，C_β 的 $M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi 1}=(1-B_\alpha^{(3)})/2+(\rho_\alpha(1)-\rho_\alpha(3))/4$，$M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi 1}=(1-B_\beta^{(3)})/2+(\rho_\beta(1)-\rho_\beta(3))/4$. 注意条件 $\rho_\beta(2\not| j)=-\rho_\alpha(2\not| j)$，两式相加后得

$$(M_{\alpha[>2]}-L_{\alpha\xi 1})+(M_{\beta[>2]}-L_{\beta\xi 1})=1-(B_\alpha^{(3)}+B_\beta^{(3)})/2. \tag{16}$$

将 (4a) 和 (4c) 式相加后代入此式，即得 (13) 式. 其余各式证法同 (从略).

推论 10　$(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的三阶定型常数之和：

$$B_\alpha^{(3)}+B_\beta^{(3)}=6-2(a_\alpha+a_\beta). \tag{17}$$

证明　令 (16) 式与 (12) 式相等，即得 (17) 式. 确定 a_α，a_β 较确定 $B_\alpha^{(3)}$，$B_\beta^{(3)}$ 容易.

定理 4 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的定型常数 $B^{(j)}$(至少对 $j=2,3,4$ 成立) 同奇偶.

证明 由 RCF 可得 [1] $\sum_{k=1}^{j} n_{\beta k}^{(j)} - \sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = [\rho_\alpha(j) - \rho_\beta(j)]/2 = \Delta\rho(j)$, 式中 $\Delta\rho(j) = [\rho_\alpha(j) - \rho_\beta(j)]/2$.

Tseng 游程之和的一般形式是 $\sum_{k=1}^{j} n_{\alpha k}^{(j)} = R_\alpha^{(j)} + B_\alpha^{(j)}$, 故有 $B_\beta^{(j)} - B_\alpha^{(j)} = R_\alpha^{(j)} - R_\beta^{(j)} + \Delta\rho(j)$, 式中 [2] $R_\alpha^{(2)} = 2M_{\alpha[>1]}$, $R_\alpha^{(3)} = n_\alpha + 2[M_{\alpha[>2]} - L_{\alpha\xi 1}]$, $R_\alpha^{(4)} = 2[M_{\alpha[>2]} + M_{\alpha[>3]} + L_{\alpha(\xi 1 \circ \xi 2)}] + (L_{1\circ\xi 2} - L_{1\circ l})$. 对标准正交对偶, 有

$$\Delta\rho(j) = \begin{cases} 0, & 2|j; \\ \rho_\alpha(j), & 2\not| j. \end{cases}$$

于是对二阶定型常数而言有 $B_\beta^{(2)} - B_\alpha^{(2)} = R_\alpha^{(2)} - R_\beta^{(2)} = 2[M_{\alpha[>1]} - M_{\beta[>1]}]$ 是偶数. 由此推知 $B_\beta^{(2)}$, $B_\alpha^{(2)}$ 必同奇偶.

对三阶定型常数有

$$\begin{aligned} B_\beta^{(3)} - B_\alpha^{(3)} &= 2[(M_{\alpha[>2]} - M_{\beta[>2]}) - (L_{\alpha\xi 1} - L_{\beta\xi 1})] + (n_\alpha - n_\beta) + \rho_\alpha(3) \\ &= 2[(M_{\alpha[>2]} - M_{\beta[>2]}) - (L_{\alpha\xi 1} - L_{\beta\xi 1})] - \Delta\rho(1) + \rho_\alpha(3) \\ &= 2[(M_{\alpha[>2]} - M_{\beta[>2]}) - (L_{\alpha\xi 1} - L_{\beta\xi 1})] + \rho_\alpha(3) - \rho_\alpha(1). \end{aligned}$$

因 $\rho_\alpha(3)$, $\rho_\alpha(1)$ 总是同奇偶的, 故知 $B_\beta^{(3)}$, $B_\alpha^{(3)}$ 同奇偶.

对四阶定型常数有

$$\begin{aligned} B_\beta^{(4)} - B_\alpha^{(4)} = {} & 2[(M_{\alpha[>2]} - M_{\beta[>2]}) + (M_{\alpha[>3]} - M_{\beta[>3]}) \\ & + (L_{\alpha(\xi 1\circ\xi 2)} - L_{\beta(\xi 1\circ\xi 2)})] + [(L_{\alpha(1\circ\xi 2)} - L_{\beta(1\circ\xi 2)}) - (L_{\alpha(1\circ l)} - L_{\beta(1\circ l)})]. \end{aligned}$$

仅需证明等式右端第二个方括弧是偶数即可.

定型常数本身就是码首 (尾) 的游程与码身中的游程在变换时的差异修正值, 因而在考虑游程链接形式时, 仅需按码身中的情况处理即可.

在码身中 $1^{(1)}$ 与串 $\xi 2$(或长游程) 的链接只可能是 $2_{i-1}^{(n_{i-1})}\circ 1_i^{(1)}\circ 2_{i+1}^{(n_{i+1})}$, $l_{i-1}^{(1)}\circ 1_i^{(1)}\circ l_{i+1}^{(1)}$, $2_{i-1}^{(n_{i-1})}\circ 1_i^{(1)}\circ l_{i+1}^{(1)}$, 三种形式之一. 设这三类链接各有 x_1, x_2, x_3 个.

$2_{i-1}^{(n_{i-1})}\circ 1_i^{(1)}\circ 2_{i+1}^{(n_{i+1})}$ 中的 $1_i^{(1)}$ 与 $\xi 2$ 链接两次, 一次是 $2_{i-1}^{(n_{i-1})}\circ 1_i^{(1)}$, 一次是 $1_i^{(1)}\circ 2_{i+1}^{(n_{i+1})}$, 故对 $L_{\alpha(1\circ\xi 2)}$ 的贡献为 2 , 所以 $L_{\alpha(1\circ\xi 2)} = 2x_1$; 同理 $L_{\alpha(1\circ l)} = 2x_2$. 而 $2_{i-1}^{(n_{i-1})}\circ 1_i^{(1)}\circ l_{i+1}^{(n_{i+1})}$ 中的 $1_i^{(1)}$ 与 $\xi 2$ 链接贡献 1 , 与 $l_{i+1}^{(1)}$ 链接贡献 -1 , 故总贡献为零, 于是 $L_{\alpha(1\circ\xi 2)} - L_{\alpha(1\circ l)} = 2(x_1 - x_2)$ 是偶数. 同理 $L_{\beta(1\circ\xi 2)} - L_{\beta(1\circ l)}$ 也是偶数, 可见 $B_\beta^{(4)}, B_\alpha^{(4)}$ 同奇偶.

6 对偶码身的推论

推论 1 1 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 码身 $C_{\alpha b}$, $C_{\beta b}$ 的游程数 $n_{\alpha b}$, $n_{\beta b}$ 之差恒等于

$$n_{\beta b} - n_{\alpha b} = \begin{cases} \rho_\alpha(1) + (n_{\alpha t} - l_{\alpha h}) + 1, & \text{当} C_\alpha = {C_\alpha}^{\mathrm{I}}, \quad (18a) \\ \rho_\alpha(1) + (l_{\alpha t} - l_{\alpha h}) + 4, & \text{当} C_\alpha = {C_\alpha}^{\mathrm{II}}. \quad (18b) \end{cases}$$

证明　考虑 $\rho_\beta(1)=-\rho_\alpha(1)$ ，由 RCF 可得

$$n_\beta - n_\alpha = \rho_\alpha(1). \tag{19}$$

I 型码的变换是 ${C_\alpha}^{\mathrm{I}} = C_{\alpha h}\circ C_{\alpha b}\circ C_{\alpha t} = l_{\alpha h}^{(1)}\circ C_{\alpha b}\circ 1_{\alpha t}^{(n_t)} \to {C_\beta}^{\mathrm{I}} = 1_{\beta h}^{(l_{\alpha h}-1)}\circ C_{\beta b}\circ l_{\beta t}^{(1)}$, 设码身 $C_{\alpha b}$ ， $C_{\beta b}$ 的游程数分别是 $n_{\alpha b}$ ， $n_{\beta b}$ ，则有 $n_\alpha = 1+n_{\alpha b}+n_{\alpha t}$ ， $n_\beta=(l_{\alpha h}-1)+n_{\beta b}+1$, 代入 (19) 式，整理后即得 (18a) ．同理可证 II 型码满足 (18b) 式．

推论 1 2　若 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的码身长度分别是 $N_{\alpha b}$ ， $N_{\beta b}$ ，码身的游程数分别是 $n_{\alpha b}$ ， $n_{\beta b}$ ，则必有

$$n_{\beta b}+n_{\alpha b} = N_{\alpha b} = N_{\beta b}, \qquad \text{当} C_\alpha = {C_\alpha}^{\mathrm{I}}, \tag{20a}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_{\beta b} = N_{\alpha b}+2, \\ &n_{\beta b}+n_{\alpha b} = (\rho_\alpha(1)+4)-(l_{\alpha h}+l_{\alpha t}),\end{aligned}\right\} \quad \text{当} C_\alpha = {C_\alpha}^{\mathrm{II}}. \tag{20b}$$

证明　因 ${C_\alpha}^{\mathrm{I}} = l_{\alpha h}^{(1)}\circ C_{\alpha b}\circ 1_{\alpha t}^{(n_t)} \to {C_\beta}^{\mathrm{I}} = 1_{\beta h}^{(n_h)}\circ C_{\beta b}\circ l_{\beta t}^{(1)}$ ，其中 $n_h = l_{\alpha h}-1$ ， $l_{\beta t}=n_t+1$ ．设码身长度分别为 $N_{\alpha b}$ ， $N_{\beta b}$ ，于是有 $N = l_{\alpha h}+N_{\alpha b}+n_t$, $N=(l_{\alpha h}-1)+N_{\beta b}+(n_t+1) = l_{\alpha h}+N_{\beta b}+n_t$ ．由此得

$$N_{\alpha b} = N_{\beta b} = N-(l_{\alpha h}+n_t). \tag{21}$$

码身的游程数之和：

$$n_{\alpha b}+n_{\beta b} = (n_\alpha+n_\beta)-(l_{\alpha h}+n_t)-1. \tag{22}$$

由 RCF 可算出： $n_\alpha+n_\beta = N+1$ 代入 (22) 式并与 (21) 式比较，即得 (20a) ． (20b) 式的证法相同 (从略) ．　　证毕

将 C_α 写成 $C_\alpha = C_{\alpha H}\circ C_{\alpha B}\circ C_{\alpha T}$ 形式．设广义码身 $C_{\alpha B}$ 的长度为 $N_{\alpha B}$ ，游程数为 $n_{\alpha B}$ ， $C_{\alpha B}$ 的 aACF 的第一旁瓣 $\rho_{\alpha B}(1)$ ，则有

推论 1 3　若 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的码身长度 $N_{\alpha B}=N_{\beta B}$ ，则对偶码身的游程数必满足关系：

$$n_{\beta B}-n_{\alpha B} = \rho_{\alpha B}(1), \tag{23a}$$

$$n_{\beta B}+n_{\alpha B} = N_{\alpha B}+1. \tag{23b}$$

证明　因 (C_α, C_β) 是标准正交对偶，故知其广义码身 $(C_{\alpha B}, C_{\beta B})$ 也是标准正交对偶．故可直接引用 $(C_\alpha, C_\beta)_{so}$ 的游程和差公式 [2] ．

致谢　本文在定稿过程中曾得到许建军同志大力帮助，在此谨表示诚挚的谢意．

参 考 文 献

[1]　杨光正，杨翔宇，徐丽娟．二进制序列的游程相关函数．电子科学学刊， 1998, 20(3), 342–351.

[2]　杨光正，杨翔宇，徐丽娟．二进制序列的 Tseng 游程定理．电子科学学刊， 1998, 20(4), 500–507.

[3]　杨光正，杨翔宇，徐丽娟．二进制序列的重量定理和 Hamming 距离定理．电子科学学刊，1998, 20(5), 631–640.

RUN THEOREMS OF NORMAL ORTHOGONAL DUALITY OF BINARY SEQUENCES

Yang Guangzheng Yang Xiangyu* Xu Lijuan

(*Southwest China Research Institute of Electronic Technology, Chengdu* 610036)

*(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract The properties of normal orthogonal duality of binary sequences are investigated by means of RCF of binary sequences. In order to prove the theorems given in this paper, the concept of pure code segment is introduced. And then, the relations between run numbers of pairs in duality, between run numbers of the code-bodyies of pairs in duality, and the type constants of pairs in duality are derived respectively.

Key words Normal orthogonal duality, Run, Code-body, Type constant

杨光正： 男， 1937 年生，高级工程师，从事雷达专业，主要研究信号处理，通信理论和智能理论.
杨翔宇： 男， 1979 年生，北大物理系学生，曾获国际生物奥林匹克金牌，主要研究生物遗传密码.