

改进的图像重建迭代算法¹

张兆田 张朋*

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

*(首都师范大学 北京 100037)

摘要: 针对不完全数据图像重建问题, 该文从积分方程角度提出一种改进的图像重建迭代算法 (Improved Iterative Reprojection Reconstruction, IIRR), 并证明其在范数下收敛. 该算法的图像重建收敛速度和重建图像误差依赖于引入的参数因子、已知的投影数据与图像的先验信息. 重建图像可以表示为由已知投影数据所构成图像的级数形式. 数值模拟结果表明, IIRR 算法在不完全数据的情况下具有较好的图像重建能力.

关键词: 图像重建, 迭代算法, 不完全数据

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)10-1626-05

An Algorithm for Improved Iterative Image Reconstruction

Zhang Zhao-tian Zhang Peng*

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

*(Capital Normal University, Beijing 100037, China)

Abstract An Improved Iterative Reprojection Reconstruction (IIRR) from a view of integral equation for incomplete image reconstruction is presented in this paper. IIRR is convergence under L^2 norm. The convergent velocity and the error of the reconstructed image depend on the relaxed parameter, the detected data and some prior information on image. The reconstructed image can be expressed in term of a series of image reconstructed by the detected data. Numerical simulation also shows that IIRR is effective to image reconstruction.

Key words Image reconstruction, Iterative algorithm, Incomplete data

1 引言

CT 利用在目标外部获取的投影数据, 重建出被检测目标内部的断面图像, 可对目标提供高分辨率的内部结构影像信息; PET 可在分子水平上提供有关脏器功能及其病变信息, 定量刻画病变组织 (如癌组织) 代谢过程和异常状况. 目前 CT, PET 等先进检测手段已经对人类社会产生了重要影响.

通常医学 CT, PET 等非侵入式成像模型可归结为

$$g(s, \theta) \equiv Rf(L) = \int_L f(x, y) dl \quad (1)$$

其中 Rf 表示对图像 f 沿直线 $L: x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = s$ 的积分, 通常称作图像 f 的 Radon 变换.

在完全数据 $\Omega_0 = \{(s, \theta) : 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq s < +\infty\}$ 下, 由图像重建切片定理

¹ 2003-12-31 收到, 2004-04-09 改回
国家自然科学基金 (69931010) 资助课题

$$F_2 f = F_1 R f \tag{2}$$

可得到图像 f 的表达式

$$f = F_2^{-1} F_1 R f = F_2^{-1} F_1 g \tag{3}$$

这里 $F_1 R f$ 表示数据 $R f$ 沿径向的一维 Fourier 变换， F_2 表示图像 f 的二维 Fourier 变换， F_2^{-1} 表示图像 f 的二维逆 Fourier 变换。

在实际检测的数据获取过程中，有时由于受检测环境的限制或构成检测目标的不同介质对射线衰减的较大差异，造成部分投影数据失效（例如在脑部 CT 检测中，通过假牙金属部分的投影数据与目标成非线性关系，不满足关系式 (1)，或受检测环境约束（如某些检测角度获取不到数据）或某些检测器失效造成有效的投影数据 Ω 仅仅是完全数据 Ω_0 的一个子集，即满足关系式 $\Omega \subset \Omega_0$ 。

由检测到的不完全数据 Ω 重建图像 f 的问题，称作不完全数据图像重建问题。该问题的实质是如何消除由于不完全数据而导致的重建图像中存在的严重伪影或局部变形。

对不完全数据图像重建问题，主要有代数重建法和解析重建法。本文主要讨论解析重建法。基于图像重建切片定理，可以把不完全数据图像重建问题归结于解析延拓问题。众所周知，解析延拓算法尽管原则上可以通过先求解函数的逐次导数，再直接用罗朗级数展开的方法得到^[1]；但是由于导数运算具有放大数据噪声的特性，使得解析延拓算法无法用于含有噪声的实际问题中^[1]。一种由 Papoulis 和 Gerchberg 分别独立提出的迭代外插算法，对一维带限函数在仅知道有限区域数据情况下，采用迭代外插算法得到了整个区域的数据。在无噪声情况下，可通过长球函数展开证明该迭代算法的收敛性^[2,3]；在噪声函数为非带限情况下，Papoulis-Gerchberg 迭代外插算法是发散的^[1]。

Gerchberg 和 Saxton 提出了在图像空间与变换空间的迭代修正概念^[4]。Gerchberg 证明了在无噪声，已知有限支集函数的部分 Fourier 变换数据情况下，可以在一系列的 Fourier 正变换和逆变换框架下，引入目标的先验信息进行修正，得到函数的全部 Fourier 变换数据，并从理论上证明了无噪声情况下，误差能量收敛于零。Xu 和 Chamzas 利用误差能量最小作为迭代算法约束条件，通过构造乘数因子，发展了另外一种图像重建迭代算法^[5,6]。

Sanz 和 Huang 等基于目标在图像空间先验信息约束公式基础上，在 Fourier 变换域给出与核函数、目标函数有关的一类积分方程，通过迭代形式发展了一种迭代外插算法^[7,8]。

Peng 和 Stark 在二维不完全数据图像重建问题中，将图像的先验信息或者对图像的约束信息转化成凸集，构造相应的投影算子，通过迭代方式得到近似的图像；但是在多于两个投影算子的情况下，该算法的收敛性仍然没有解决^[9]。

在三维不完全数据图像重建问题中，Virador 等针对为乳腺癌检测设计的 PET 相机中某些数据无法获取情况下，用迭代外插算法估计 PET 相机扫描不到区域的数据，明显提高了 PET 相机的分辨率^[10]。

在涉及的不完全数图像重建问题中，上述算法可概括为图 1 所示。

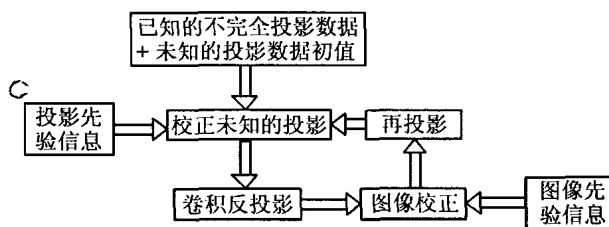


图 1 不完全数据图像重建迭代外插算法 (IRR) 框图

尽管已经提出不少的解析重建法,并在试验中有较好的图像重建性能^[11];但是有关图像重建迭代算法的稳定性、迭代收敛与误差估计问题仍然没有明确的结论,在实际应用中图像重建迭代次数选择依然是个没有解决的问题。

2 迭代外插重建图像算法

根据投影切片定理,图像重建公式可写成如下形式

$$f = Tf + f_0 \quad (4)$$

相应的重建图像可用迭代外插重建图像公式 (Iterative Reprojection Reconstruction, IRR)

$$f^{(n+1)} = Tf^{(n)} + f_0 \quad (5)$$

近似给出。其中 $f_0 \equiv F_2^{-1}F_1[PRf]$, P 是集合 Ω 的特征函数, f_0 等价于把未检测到的数据作为零填充后重建的图像, $Tf \equiv F_2^{-1}F_1[(1-P)Rf]$ 表示作用于图像 f 的线性积分算子。可以看出, IRR 算法表达了重建图像与所有投影数据和近似重建图像关系。

由于 Fourier 线性积分算子在 L^2 空间是等距算子,即 $\|Ff\| = \|f\|$, 可以得到线性积分算子 T 的 L^2 范数 $\|T\| \leq 1$, 即 T 为非扩张算子,这使得在理论上就不能够保证算法收敛性和稳定性,同时在重建精度上难以给出统一的定量描述。

在已经发展的各种迭代外插重建图像算法中,尽管仿真结果和试验结果是有效的,但在噪声存在情况下,图像重建算法收敛性和稳定性以及重建图像定量刻画问题一直是没有很好解决的问题。下面主要构造图像重建压缩算子,使得改进的迭代外插重建图像格式具有收敛性和稳定性。

3 改进的迭代外插重建图像算法

对不完全数据下的迭代外插重建图像算子式 (5),引入参数 λ ,新构造的迭代外插重建图像算子为

$$f = \lambda Tf + f_0 \quad (6)$$

容易知道,线性积分算子 λT 为收缩算子,其 L^2 范数 $\|\lambda T\| = \lambda < 1$,这样从理论上可以保证在噪声存在情况下,相应的重建图像迭代算法

$$f^{(n+1)} = \lambda Tf^{(n)} + f_0 \quad (7)$$

是收敛和稳定的。我们称迭代算法 (7) 为改进的迭代外插重建图像算法 (Improved Iterative Reprojection Reconstruction, IIRR)。

另外利用 IIRR 迭代式 (7),有

$$f^{(n+1)} - f^{(n)} = (\lambda T)(f^{(n)} - f^{(n-1)}) \quad (8)$$

$$\|f^{(n+1)} - f^{(n)}\| \leq \lambda \|f^{(n)} - f^{(n-1)}\| \quad (9)$$

由 $\lambda < 1$,可知重建图像迭代序列 $\{f^{(n)}\}$ 是收敛的。

记 $f^{(0)} = f_0$ 。利用 IIRR 迭代式 (8),还可得到重建图像序列的关系式:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} - f^{(n)} &= (\lambda T)^{(n)}(f^{(1)} - f^{(0)}) = (\lambda T)^{(n+1)}f_0 \\ f^{(n+1)} - f^{(0)} &= (f^{(n+1)} - f^{(n)}) + (f^{(n)} - f^{(n-1)}) + \dots + (f^{(1)} - f^{(0)}) \\ &= (\lambda T)^{(n+1)}f_0 + (\lambda T)^{(n)}f_0 + \dots + (\lambda T)^{(1)}f_0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$f^{(n+1)} = (\lambda T)^{(n+1)}f_0 + (\lambda T)^{(n)}f_0 + \dots + (\lambda T)^{(1)}f_0 + (\lambda T)^{(0)}f_0 \quad (11)$$

就是说重建图像 $f^{(n+1)}$ 可以表示为由已知投影数据所构成图像的级数形式；也可以简洁地表示为

$$f^{(n+1)} = [I - (\lambda T)^n]f_0/[I - (\lambda T)] \quad (12)$$

其中 I 为恒等算子。

4 数值试验结果

本文实验数据取自国产 XCT，其 X 射线源为 450 keV，测试工件为涡轮机叶片，每个投影采样数为 241，采样步长为 0.5 mm；转角采样数为 576。完全投影数据为 $\Omega_0 = \{(s, \theta) : s = k_1 ds, k_1 = -120, \dots, 120, ds = 0.5; \theta = k_2 d\theta, k_2 = 0, 1, \dots, 575, d\theta = \pi/576\}$ 。图 2(a) 为利用完全投影数据由卷积反投影 (Convolution back projection) 得到的测试模体的断面图像。从完全投影数据中随机丢失 35% 的投影数据，构成不完全投影数据 Ω ；图 2(b) 利用不完全数据，通过将丢失的投影数据设置为零，利用卷积反投影得到的测试模体的断面近似图像，可以看到该重建图像基本未反映测试模体断面图像及其存在的缺陷状况；图 2(c)~图 2(f) 为利用不完全数据，在外插因子 $\lambda = 0.98$ 时，通过 IIRR 迭代次数为 1, 3, 9 和 27 时得到的测试模体的断面近似图像；这些近似图像基本反映了测试模体断面图像和微小缺陷状况，而且随着迭代次数的增加，图 2(a) 中涡轮机叶片的裂纹缺陷、孔状缺陷逐渐变得清晰，并且随迭代次数增加重建图像趋于稳定。

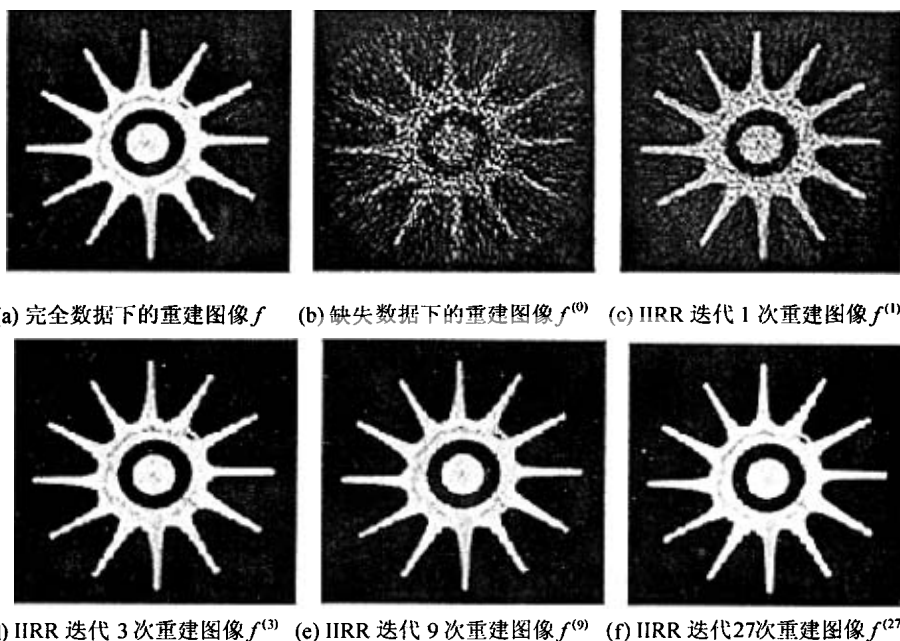


图 2

不完全数据情况下 IIRR 重建图像分析。图 2(a) 是完全投影数据下，用 CBP 法重建的工件断面图像 f ；图 2(b) 模拟随机丢失 35% 投影数据情况下，用 CBP 法重建的工件断面图像 $f^{(0)}$ ；图 2(c)、2(d)、2(e)、2(f) 分别为随机丢失 35% 投影数据情况下，IIRR 迭代 1 次、3 次、9 次和 27 次后所得的工件断面图像 $f^{(1)}$ 、 $f^{(3)}$ 、 $f^{(9)}$ 和 $f^{(27)}$ 。

试验结果说明，IIRR 算法对于消除由不完全数据导致的重建图像中伪影、提高图像质量是有效的。

5 讨论

通过对不完全数据迭代重建算法 (IRR) 分析, 针对在含有噪声投影数据下 IRR 算法收敛性和稳定性不能保证的问题, 本文从积分方程角度出发, 引入参数因子构建一种具有压缩性质的图像重建算子, 相对应的迭代重建算法 (IIRR) 在 L^2 范数下收敛; 图像重建收敛速度和重建图像误差由引入的参数因子、已知的投影数据和图像的先验信息所刻画。重建图像可以表示为由已知投影数据所构成图像的级数形式。

在噪声存在情况下, 有关重建图像序列的收敛特性及其误差分析仍然是需要进一步研究的问题。

致谢 该研究工作中曾得到戴汝为院士、邱佩璋教授、赵松年教授等指导, 在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Papoulis A. A new algorithm in spectra analysis and band-limited signal extrapolation. *IEEE Trans. on Circuits Syst.*, 1975, CAS-22(9): 735-742.
- [2] Papoulis A. *Signal Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1977: 205-215.
- [3] Gerchberg R W. Super-resolution through error energy reduction. *Opt. Acta*, 1974, 21(9): 709-720.
- [4] Gerchberg R W, Saxton W O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 1972, 35(2): 237-246.
- [5] Chamzas C, Xu W Y. An improved version of Papoulis-Gerchberg algorithm on band-limited extrapolation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech. Signal Processing*, 1984, ASSP-32(2): 437-440.
- [6] Xu W Y, Chamzas C. On the extrapolation of band-limited functions with energy constraints. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech Signal Processing*, 1983, 31(5): 1222-1234.
- [7] Sanz J L, Huang T S. Discrete and continuous band-limited signal extrapolation. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech Signal Processing*, 1983, ASSP-31(5): 1276-1285.
- [8] Sato T, Norton S J, *et al.*. Tomographic image reconstruction from limited projections using iterative revisions in image and transform space. *Applied Optics*, 1981, 20(3): 395-399.
- [9] Peng H, Stark H. One-step image reconstruction from incomplete data in computer tomography. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 1989, MI-8(1): 16-31.
- [10] Virador P R G, *et al.*. 3D reconstruction in PET cameras with irregular sampling and depth of interaction. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, 2001, 48(4): 1524-1529.
- [11] 张兆田, 邱佩璋. 一类广义 Radon 变换的反演: 迭代重建再投影的外插算法. *CT 理论与应用研究*, 1993, 2(3): 20-23.

张兆田: 男, 1962 年生, 高级工程师, 研究方向: 图像分析和图像重建, 信号处理和图像处理, 逆问题及其应用。

张朋: 男, 1957 年生, 研究员, 研究方向: 探测和成像技术, 偏微分方程理论与应用。