

M 带小波变换在图象中的应用¹

唐向宏 龚 宇 龚耀寰 顾德仁

(电子科技大学电子技术系 成都 610054)

摘 要 小波变换是近年来兴起的一种时频域信号分析理论,是信号分析处理的一种强有力的新工具.本文根据小波变换的特点,在 Mallat “二带”多分辨分析的基础上,讨论分析了信号的多带多分辨分析的理论 and 实现算法,并将这一理论和算法应用于图象处理,取得了满意效果.

关键词 小波变换, M 带小波变换, 多分辨分析, 边缘检测, 零交叉

中图分类号 TN911.73

1 引 言

近几年随着小波理论的发展和应用,小波理论已成为信号分析处理的一种强有力的新工具.小波变换的基本思想是将原始信号分解成一系列具有良好时频域定位性的基元信号,利用基元信号的各种特征来表示原始信号的局部性,达到对信号的时频域局部化分析.

设 $f(t)$ 为能量有限的一维信号 $f(t) \in L^2(R)$, 则其小波变换定义为^[1]

$$Wf(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

其中 a 称为尺度因子, b 为平移因子. $\psi(t)$ 称为母小波, 当其傅氏变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足允许性条件

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

时, 小波的逆变换存在, 即可用 $Wf(a, b)$ 重构原始信号 $f(t)$. 由 (2) 式可知, 小波函数 $\psi(t)$ 可视为一带通滤波器的冲激响应.

设 $\psi_a(t) = |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t}{a} \right)$, $\tilde{\psi}(t) = \psi(-t)$, 则 (1) 式可写为

$$Wf(a, b) = f(t) * \tilde{\psi}_a(t). \quad (3)$$

所以小波变换可看成是原始信号用一组不同尺度的带通滤波器进行滤波, 将信号分解到一系列频带上进行分析处理. 在实际应用中, 人们又对尺度因子按倍频程 (octave) 离散化^[2]: $a = 2^m$, $b = n2^m$. Mallat 所提出的多分辨分析^[3], 则是这种情况下的一种特殊小波变换, 从文献^[3]可以看出, Mallat 的多分辨分析实质上是在“二带”的基础上进行的小波变换, 但随着它的应用, 也出现些不足, 为了克服它的不足, Steffen 等人^[4]和 Zou 等人^[5]讨论了多带小波变换情况. 本文根据小波变换的特点, 对多带多分辨情况进行了进一步的研究, 讨论分析了信号的多

¹ 1996-07-10 收到, 1997-03-17 定稿
国家自然科学基金资助项目

带分解分析和实现算法, 实现了图象的多带多分辨分解和重构, 利用多带小波变换的特点和边缘的特点, 实现了图象边缘的提取。

2 M 带小波的多分辨分析

为了将 Mallat 多分辨分析推广到多带情况 (取为 M 带), 我们仍需从连续小波变换的离散化入手, Mallat 在离散化时用 $a = 2^m, b = n2^m$, 因此我们在对连续小波变换离散时, 只需采用 $a = M^m, b = nM^m$, 这样尺度函数 $\phi(t)$ 满足的双尺度方程则为^[4,5]

$$\phi(t) = \sum_n h(n)\phi(Mt - n), \quad (4)$$

它对应小波共有 $M - 1$ 个, 用 $\psi^{(i)}(t)$ 表示, 且满足

$$\psi^{(i)}(t) = \sum_n g^{(i)}(n)\phi(Mt - n), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (5)$$

令 $\phi_{j,k} = M^{-j/2}\phi(M^{-j}t - k), \psi_{j,k}^{(i)} = M^{-j/2}\psi^{(i)}(M^{-j}t - k)$, 采用 Mallat 同样的方法, 让子空间 V_j 由函数集 $\{\phi_{j,k}, k \in Z\}$ 张成, $W_j^{(i)}$ 由 $\{\psi_{j,k}^{(i)}, k \in Z\}$ 张成, 因此, 由双尺度方程 (4) 式可以得出, 子空间 V_j 具有以下性质:

- (1) 单调性 $\dots V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots$;
- (2) 渐近完全性 $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}; \bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(R)$;
- (3) 伸缩规则性 $\forall f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(Mt) \in V_{j-1}, \forall j \in Z$;
- (4) 正则性 如果尺度函数 $\phi(t)$ 和对应的小波 $\{\psi_{j,k}^{(i)}, k \in Z\}$ 选择满足:

$$\left. \begin{aligned} &\langle \phi_{0,n}(t), \phi_{0,l}(t) \rangle = \delta_{n,l}, \\ &\langle \phi_{m,n}(t), \psi_{k,l}^{(i)} \rangle = 0, \\ &\langle \psi_{m,n}^{(i)}(t), \psi_{k,l}^{(j)}(t) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{m,k} \delta_{n,l}, \\ &i, j = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k, l, n, m \in Z. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

有了这些假设, V_j 子空间就可分成 $M - 1$ 个正交补空间 $\{W_j^{(i)}, i = 1, 2, \dots, M - 1\}$, 满足 $V_j = V_{j+1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{M-1} W_{j+1}^{(i)} \right)$. 从而可推得 $L^2(R) = \bigoplus_{j \in Z} \left(\bigoplus_{i=1}^{M-1} W_j^{(i)} \right), V_j \subset L^2(R)$ 形成 $L^2(R)$ 的多分辨近似子空间。

由于 $V_{j+1} \subset V_j$, 所以 $\phi_{j+1,n}$ 可由 $\{\phi_{j,k}, k \in Z\}$ 正交基展开:

$$\phi_{j+1,n} = \sum_k \langle \phi_{j+1,n}, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (7)$$

利用双尺度方程 (4) 式可证得

$$\phi_{j+1,n} = M^{-1/2} \sum_k h(k - Mn)\phi_{j,k}. \quad (8)$$

对上式两边取内积, 并令 $A_{j+1}^d f = \langle f(t), \phi_{j+1,n} \rangle$, 则 (8) 式可改写为

$$A_{j+1}^d f = M^{-1/2} \sum_k \tilde{h}(Mn - k) A_j^d f. \quad (9)$$

该式表明: 低一级分辨率 ($j+1$) 的模糊分量 $A_{j+1}^d f$ 可以用高一级分辨率 (j) 的模糊分量 $A_j^d f$ 通过具有冲激响应为 $M^{-1/2} \tilde{h}(n)$ 的滤波器滤波后再抽样 (down sampling) (M) 求得.

类似地, 根据 (5) 式并令 $D_{j+1}^{(i)} f = \langle f(t), \psi_{j+1}^{(i)} \rangle$ 可得

$$D_{j+1}^{(i)} f = M^{-1/2} \sum_k \tilde{g}(Mn - k) A_j^d f. \quad (10)$$

该式表明低一级分辨率 ($j+1$) 的细节信号 $D_{j+1}^{(i)} f$ 可以由更高一级分辨率 (j) 的模糊分量 $A_j^d f$, 通过具有冲激响应为 $M^{-1/2} \tilde{g}^{(i)}(n)$ 的滤波器滤波后, 再抽样 (M) 求得. 从而由 (9) 式和 (10) 式可知, 第 j 分辨率的模糊分量 $A_j^d f$ 可以分解成分率为 ($j+1$) 的模糊分量 $A_{j+1}^d f$ 和细节信号 $D_{j+1}^{(i)} f$.

文献 [3] 证明: 任何一个能量有限的离散信号都可看成是连续信号在分辨率为 “1” 时的低通滤波分量的均匀抽样. 因此我们可以设连续信号 $f(t) \in L^2(R)$ 的离散信号为满足

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_n f(n) \phi(t-n), \\ f(n) &= \langle f(t), \phi(t-n) \rangle = A_0^d f. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这样我们利用 (9) 和 (10) 式, 通过迭代可求出对离散信号 $f(n)$ 的有限分辨率分解的表示:

$$f(n) = A_j^d f + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^J D_j^{(i)} f. \quad (12)$$

由前可知 $\{\phi_{j+1,k}, \psi_{j+1,k}^{(i)}, k \in Z, i = 1, 2, \dots, M-1\}$ 构成 V_j 空间的一组正交基, 这样 $\phi_{j,n}$ 则可由这组正交基展开:

$$\phi_{j,n} = \sum_{k \in Z} \langle \phi_{j+1,k}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j+1,k} + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k \in Z} \langle \psi_{j+1,k}^{(i)}, \phi_{j,n} \rangle \psi_{j+1,k}^{(i)}. \quad (13)$$

利用双尺度方程可以证明:

$$A_j^d f = M^{-1/2} \sum_{k \in Z} h(n - Mk) A_{j+1}^d f + M^{-1/2} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k \in Z} g^{(i)}(n - Mk) D_{j+1}^{(i)} f. \quad (14)$$

该式表明: 第 (j) 级分辨率的离散信号近似表示 $A_j^d f$ 可由低一级分辨率 ($j+1$) 的模糊分量 $A_{j+1}^d f$ 和细节信号 $D_{j+1}^{(i)} f$ 重构, 从而达到对原始信号 $f(n)$ 的重构. 具体方法是: 首先是对模糊分量和细节信号进行插值抽样 (M) (up sampling), 然后分别通过对应的滤波器滤波, 最后叠加. 我们可以看出, 利用 (9)、(10) 式和 (14) 式即可实现对信号 $f(t)$ 的多分辨率分解和重构.

3 图象多通道多分辨分解的实现

根据文献 [6] 可知, 小波变换模型可以很容易地推广到任意维信号的处理, 因此我们就将 M 带小波变换推广到二维图象信号的处理.

设 $f(x, y) \in L^2(R^2)$ 为一有限能量的二维图象信号, 根据前面一维的推广可知 $L^2(R^2)$ 的多分辨近似就是一组满足性质 (1)-(4) 的 $L^2(R^2)$ 子空间 $\{V_j, j \in Z\}$, 信号 $f(x, y)$ 在分辨率为 j 时的近似等于它在 V_j 中的正交投影. 设尺度函数为 $\Phi(x, y)$, 则子空间 V_j 由 $\Phi_{j,m,n}(x, y)$ 张成. 这里我们只讨论 $L^2(R^2)$ 在水平和垂直方向为可分情况, 此时每一矢量空间 V_j 可以分解成两个相同的一维子空间 $V_j^1 \in L^2(R)$ 的张乘 (tensor product)

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^1,$$

这时尺度函数 $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$, 其中 $\phi(x)$ 是一维多分辨近似子空间 $\{V_j^1, j \in Z\}$ 的尺度函数. 因此 V_j 子空间应由正交基 $\{M^{-j}\phi_j(M^{-j}x-n)\phi_j(M^{-j}y-m), m, n \in Z\}$ 张成, 设 $\psi^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, M-1$) 为对应于尺度函数 $\phi(x)$ 的小波, 可以证明尺度函数 $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ 对应的小波 $\Psi(x, y)$ 共有 $M^2 - 1$, 其形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{(0,i)} &= \phi(x)\psi^{(i)}(y), \\ \Psi^{(i,0)} &= \psi^{(i)}(x)\phi(y), \\ \Psi^{(i,j)} &= \psi^{(i)}(x)\psi^{(j)}(y), \\ i, j &= 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

函数集:

$$\left. \begin{aligned} &\{M^{-j}\phi(M^{-j}x-n)\psi^{(i)}(M^{-j}y-m), \\ &M^{-j}\psi^{(i)}(M^{-j}x-n)\phi(M^{-j}y-m), \\ &M^{-j}\psi^{(i)}(M^{-j}x-n)\psi^{(j)}(M^{-j}y-m)\}_{(n,m) \in Z^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

构成 V_j 正补空间 W_j 的正交基, 而函数集:

$$\left. \begin{aligned} &\{M^{-j}\phi(M^{-j}x-n)\psi^{(i)}(M^{-j}y-m), \\ &M^{-j}\psi^{(i)}(M^{-j}x-n)\phi(M^{-j}y-m), \\ &M^{-j}\psi^{(i)}(M^{-j}x-n)\psi^{(j)}(M^{-j}y-m)\}_{(j,n,m) \in Z^3} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

构成 $L^2(R^2)$ 的正交基. 设

$$\left. \begin{aligned} A_j^d f &= \langle f(x, y), \phi_{j,n}(x)\phi_{j,m}(y) \rangle, \\ D_j^{l,k} &= \langle f(x, y), \Psi_{j,n,m}^{(l,k)}(x, y) \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$n, m \in Z$, $l, k = 0, 1, \dots, M-1$, 注意 l 与 k 不能同时为零. 因此象一维一样, 二维图象信号 $f(x, y)$ 的多分辨分析就变成了求不同子空间下的正交系数 $A_j^d f, D_j^{(l,k)} f$ 的问题.

图 1 给出了一实验结果, 图 1(a) 为原始图象 Lenna(256 × 256 × 8 bits), 图 1(b) 为分辨率 $J = 1$ 时的模糊分量 $A_1^d f$ 和细节分量 $D_1^{(l,k)} f$, 图 1(c) 为分辨率 $J = 2$ 时的模糊分量 $A_2^d f$ 和细节分量 $D_2^{(l,k)} f$, $D_1^{(l,k)} f$, 图 1(d) 为重构的原始图(注: 为了便于拍照, 对细节分量的灰度级作了适当提高)。在实验中, 我们所选用的尺度函数和小波函数对应的滤波器为 8 点 4 通道的 FIR-QMF 滤波器, 其系数如表 1 所示。同时在计算中发现, 在将图象分解成相同带数的条件下, M 带小波变换的分解速度比二带小波变换的要快, 这是因为在 M 带小波变换时, 图象是按多频带进行分解的。

表 1 滤波器参数

h	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$
0.114701	0.026913	0.135299	-0.076641
0.385299	-0.326641	-0.218254	0.076641
0.576641	-0.888520	-0.326641	0.114701
0.576641	0.135299	0.680194	-0.385299
0.385299	0.680194	-0.135299	0.576641
0.114701	0.326641	-0.488852	-0.576641
-0.076641	-0.218254	0.326641	0.385299
-0.076641	-0.135299	0.026913	-0.114710

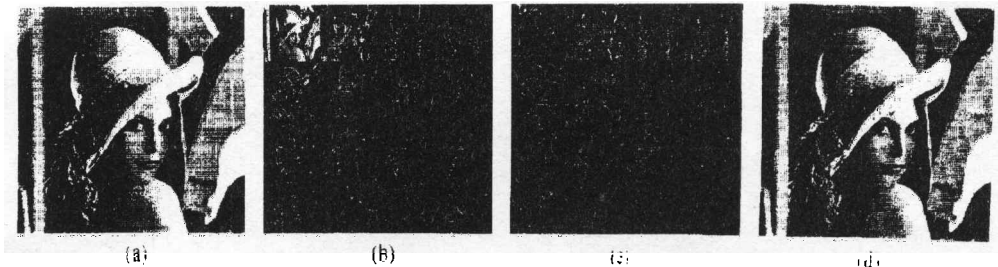


图 1 (a) 原始图象, (b) $J = 1$ 时的模糊分量与细节分量, (c) $J = 2$ 时的模糊分量与细节信号, (d) 重构的原如图象

4 用 M 带小波变换实现图象的边缘检测

图象边缘提取是人们非常感兴趣的问题, Mallat 的二带小波边缘极大值检测理论在图象边缘检测上获得极大成功^[7]。下面我们在 Mallat 的边缘检测理论上, 讨论如何利用 M -带小波变换来获取图象的边缘信号。

在 M 带小波变换中, 由于尺度函数 $\phi(t)$ 对应了 $M-1$ 个小波函数, 因此不能直接应用 Mallat 小波边缘检测理论来进行边缘检测。零交叉检测边缘是利用边缘信号在时域空间上的突变来进行检测的^[8]。根据文献^[9]可知, 时域空间中的边缘对应于频域中与边缘垂直方向上的高频成份。因此, 我们根据边缘的时域和频域空间中的这一特点, 对一给定的二维图象 $f(x, y) \in L^2(R)$ 采用以下方法来实现边缘的提取。

首先将所给图象 $f(x, y)$ 分别对 $\phi\psi^{(i)}, \psi^{(i)}\psi^{(j)}, (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, M-1)$ 作水平方向的 M -带小波分解求极大小波变换值, 并将所得极值进行叠加构成水平方向的高通滤波, 获取水平方向的边缘信号;

其次将所给图象 $f(x, y)$ 分别对 $\psi^{(i)}\phi, \psi^{(i)}\psi^{(j)}, (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, M-1)$ 作竖直方向的 M 带小波分解求极大小波变换值, 并将所得极值进行叠加构成竖直方向图象的小波变换的极大值, 以实现竖直方向的高通滤波, 获取竖直方向的边缘信号;

然后将水平方向和竖直方向的 M 带小波变换所得结果进行叠加, 并将叠加的结果与一门槛作比较, 当正超过门槛值时, 则判为边缘点, 反之则不是;

最后, 将所接受的点连接成链, 即可得图象的边缘。

M 带小波边缘检测算法仍在原始图象 Lenna(256 × 256 × 8 bit) 上进行, 图 2 给出了边缘检测结果, 从图中我们可清晰分辨图象中的轮廓特征, 实验结果证实这种算法边缘性很好, 从而实现了 M -带小波变换的边缘检测。

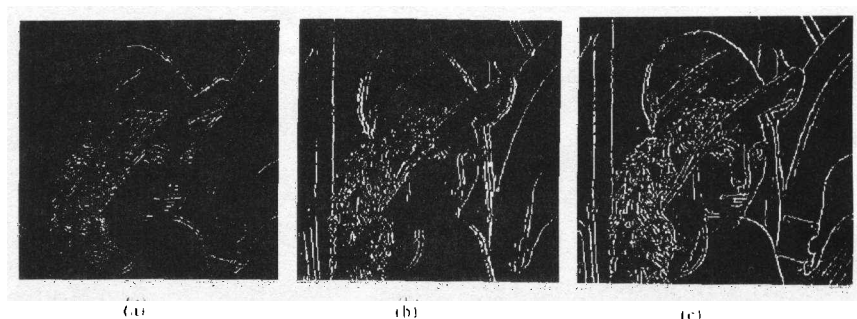


图 2 (a) 水平方向的边缘信号 (b) 竖直方向的边缘信号 (c) 整个图象的边缘信号

6 结 论

从实验模拟结果可以看出: (1) M 带小波变换实现了图象的多分辨分解和重构; (2) M 带小波变换实现了图象边缘的检测。因此通过以上分析和实验模拟结果我们可以看出, M 带小波变换对信号的处理, 特别是对提高图象的压缩速度和图象边缘的检测将成为有力工具。

参 考 文 献

- [1] Jawerth B, Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analysis. SIAM, 1994, 36(3): 377-412.
- [2] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelet. Commu. Pure Appl., 1988, 41(2): 909-996.
- [3] Mallat S G. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Trans. on ASSP, 1989, 37(12): 2091-2110.
- [4] Zou H, Tewfik A H. Discrete orthogonal M -band wavelet decomposition. In proc. ICASSP, San Francisco: 1992, 4(iv): 605-608.
- [5] Steffen P, Heller P N, Gopinuth R A. Theory of regular M -band wavelet bases. IEEE Trans. on SP, 1993, 41(12): 3497-3511.
- [6] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. on PAMI, 1989, 11(11): 674-693.
- [7] Mallat S G. Characterization of signals from multiscale edges. IEEE trans. PAMI, 1992, 14(7): 710-732.
- [8] 马尔 D 著, 姚国正, 等译. 视觉计算理论. 北京: 科学出版社, 1988, 40-281.

- [9] Ikononopouls A, Kunt M. High compression image coding via directonal filtering. *Signal Processing*, 1985; 8(1): 179-203.

APPLICATION OF M -BAND WAVELET TRANSFORM TO IMAGES

Tang Xianghong Gong Yu Gong Yaohuan Gu Deren

(*Dept. of Electronic Tech., Univ. Electronic Sci. & Tech. of China, Chengdu 610054*)

Abstract Wavelet transform, especially the multiresolution representation, is a very effective tool for analyzing the information contents of a signal. Based on Mallat's multiresolution analysis, this paper discusses the theoretical analysis of M -band multiresolution signal decomposition, proposes a new algorithm for realizing the theory, studies the properties of an operator which approximates a signal at a given resolution, and applies the theory to images. The results show that, first, images can be decomposed and reconstructed by M -band multiresolution representation; second, the edges of image can be detected by M -band wavelet transform.

Key words Wavelet transform, M -band wavelet transform, Multiresolution analysis, Edge detection, Zero-crossing

唐向宏: 男, 1962 生, 博士生, 目前研究领域: 图象信号处理、小波理论及应用.

龚宇: 男, 1970 生, 讲师, 目前研究领域: 数字信号处理、高速并行处理.

龚耀寰: 男, 1938 生, 教授, 博士生导师, 目前研究领域: 自适应抗干扰、高速信号处理、编码与加密.

顾德仁: 男, 1924 生, 教授, 博士生导师, 目前研究领域: 电路与系统、信息与信号处理、高清晰电视.