周期查询式限定服务排队系统研究 [1]

赵东风　李必海　郑苏民

(云南大学信息与电子科学系 昆明 650091)

摘 要　本文采用嵌入马尔可夫链理论和概率母函数的方法，在离散时间状态下对周期查询式限定 ($K=1$) 服务排队系统进行了分析，讨论了报文的平均排队队长和平均等待时间的特性，改进了 H. Tagai(1985) 的分析结果。

关键词　周期查询系统，限定服务，离散时间

中图号　TN913.2

1 引 言

周期查询式排队服务系统的出现至今已有 20 多年了。这种排队服务系统在工业过程控制、计算机集成制造系统 (CIMS) 、计算机系统和通信网络等方面都得到了广泛应用，使周期查询式排队服务系统的分析理论得到了进一步完善。文献 [1,2] 中研究了在时间上连续的周期查询式排队服务系统的性能，文献 [3–7] 中则对时间上离散的周期查询式排队服务系统进行了分析计算。本文采用了马尔可夫链理论和概率母函数的分析方法，对在时间上离散的周期查询式限定 (K=1) 服务排队系统进行了分析。考虑了报文的随机到达过程、服务时间的随机过程，以及查询转换时间的随机过程，推导出排队服务系统的平均排队队长公式和报文平均等待时间公式.

2 数学模型

在周期查询式限定 (K=1) 服务排队系统中有 N 个终端站，这 N 个终端站是由一个服务台依秩序查询服务。由于排队服务系统是在离散时间状态下的求解过程，因此，时间轴按单位时隙进行划分。

2.1 假设条件

(1) 每个终端站在任何一个时隙内都以相互独立、同分布的概率分布向各自的存贮器内送入报文，其分布的概率母函数、均值和方差分别是 $A(z)$， $\lambda=A'(1)$ 和 $\sigma_\lambda^2=A''(1)+\lambda-\lambda^2$ ；

(2) 任何两个相邻终端站之间的查询转换时间变量服从于一个相互独立、同分布的概率分布，其分布的概率母函数、均值和方差分别是 $R(z)$， $\gamma=R'(1)$ 和 $\sigma_\gamma^2=R''(1)+\gamma-\gamma^2$ ；

(3) 任何一个终端站在接受服务时，即由其存贮器内向外发送一个报文所用的时间变量服从于一个相互独立、同分布的概率分布，其分布的概率母函数、均值和方差分别是 $B(z)$， $\beta=B'(1)$ 和 $\sigma_\beta^2=B''(1)+\beta-\beta^2$ 。

[1] 1995-03-08 收到， 1995-12-15 定稿
国家 863/CIMS 主题和云南省教委基金资助项目

在所讨论的排队服务系统中，我们还认为每个终端站的存贮器容量足够大，不会产生报文丢失现象，服务规则按先到先服务的原则进行。

2.2　概率母函数 $G_i(z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_N)$

假设 i 号终端站 $(i = 1, 2 \cdots, N)$ 是在 t_n 时刻接受服务，即获得发送报文的权利，当 i 号终端站发送完存贮器内按限定式 $(K=1)$ 服务协议规定的报文数，服务台就马上查询 $i+1$ 号终端站。$i+1$ 号终端站在 t_{n+1} 时刻获得发送报文的权利。

定义随机变量 $\xi_i(n)$ 是 i 号终端站在 t_n 时刻其存贮器内存贮的报文数，则整个排队服务系统在 t_n 时刻的状态可表示为 $[\xi_1(n), \xi_2(n), \cdots, \xi_i(n), \cdots, \xi_N(n)]$ 。在 $\sum_{i=1}^{N} \lambda(\gamma + \beta) < 1$ 的条件下 [8]，其概率分布的母函数为

$$\begin{aligned} G_{i+1}(z_1, z_2, \cdots, z_{i+1}, \cdots, z_N) = R\left[\prod_{k=1}^{N} A(z_k)\right] \Bigg\{ B\left[\prod_{k=1}^{N} A(z_k)\right] \frac{1}{z_i} [G_i(z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_N) \\ - G_i(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \cdots, z_N)] \\ + G_i(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \cdots, z_N) \Bigg\}, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{1}$$

3　平均排队队长

3.1　平均存贮的报文数 $g_i(j)$

定义在 t_n 时刻第 i 号终端站开始接受服务时，第 j 号终端存贮器内平均存贮的报文数为 $g_i(j)$，其值由下式计算

$$g_i(j) = \lim_{z_1, z_2, \cdots, z_j, \cdots, z_N \to 1} \frac{\partial G_i(z_1, z_2, \cdots, z_j, \cdots, z_N)}{\partial z_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, N; \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

3.2　$g_{i0}(j)$

定义

$$\begin{aligned} g_{i0}(j) = \lim_{z_1, z_2, \cdots, z_j, \cdots, z_N \to 1} \frac{\partial G_i(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1} \cdots, z_N)}{\partial z_j}, \\ i = 1, 2, \cdots, N; \quad j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, N. \end{aligned} \tag{3}$$

3. 3　$g_i(j, k)$

定义

$$\begin{aligned} g_i(j, k) = \lim_{z_1, z_2, \cdots, z_j, \cdots, z_k, \cdots, z_N \to 1} \frac{\partial^2 G_i(z_1, z_2, \cdots, z_j, \cdots, z_k, \cdots, z_N)}{\partial z_j \partial z_k}, \\ i = 1, 2, \cdots, N; \quad j = 1, 2, \cdots, N; k = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{4}$$

对 (1) 式计算得到

$$\begin{aligned} g_{i+1}(j, k) =& \lambda^2 R''(1) + \lambda^2 \gamma + [N\lambda^2\gamma/(1 - N\rho)][2\gamma\rho + \rho + \lambda B''(1)] \\ &+ (\lambda\gamma + \rho)[g_i(k) + g_i(j)] - \rho[g_{i0}(k) + g_{i0}(j)] + g_i(j, k), \quad i \neq j \neq k; \end{aligned} \tag{5}$$

$$g_{i+1}(j,i) = \lambda^2 R''(1) + \lambda^2\gamma + [N\lambda\gamma/(1-N\rho)][2\lambda\gamma\rho - \lambda\gamma + \lambda\rho - \rho + \lambda^2 B''(1)] + (\lambda\gamma+\rho)[g_i(i)+g_i(j)] - g_i(j) + (1-\rho)g_{i0}(j) + g_i(j,i), \quad i \neq j; \tag{6}$$

$$g_{i+1}(j,j) = \lambda^2 R''(1) + \gamma A''(1) + [N\lambda\gamma/(1-N\rho)][2\lambda\gamma\rho + \beta A''(1) + \lambda^2 B''(1)] + 2(\lambda\gamma+\rho)g_i(j) - 2\rho g_{i0}(j) + g_i(j,j), \quad i \neq j; \tag{7}$$

$$g_{i+1}(i,i) = \lambda^2 R''(1) + \gamma A''(1) + [N\lambda\gamma/(1-N\rho)][2(1-\lambda\gamma)(1-\rho) + \beta A''(1) + \lambda^2 B''(1)] + 2(\lambda\gamma+\rho-1)g_i(i) + g_i(i,i). \tag{8}$$

由 (5) 式和 (6) 式计算 $\sum_{i=1}^{N} g_{i+1}(j,k)$ ，得到

$$N\lambda^2 R''(1) + N\lambda^2\gamma + [N^2\lambda^2\gamma/(1-N\rho)][2\gamma\rho + \rho + \lambda B''(1)] - 2N\lambda\gamma(\lambda\gamma+\rho)/(1-N\rho) - g_j(k) - g_k(j) + g_{k0}(j) + g_{j0}(k) + 2(\lambda\gamma+\rho)\sum_{i=1}^{N} g_i(j) - 2\rho\sum_{i=1}^{N} g_{i0}(j) = 0. \tag{9}$$

由 (7) 式和 (8) 式计算 $\sum_{i=1}^{N} g_{i+1}(j,j)$ ，得到

$$N\lambda^2 R''(1) + N\gamma A''(1) + [N^2\lambda\gamma/(1-N\rho)][2\lambda\gamma\rho + \beta A''(1) + \lambda^2 B''(1)] + 2N\lambda\gamma \times (1-\lambda\gamma-\rho)/(1-N\rho) - 2g_i(i) + 2(\lambda\gamma+\rho)\sum_{i=1}^{N} g_i(j) - 2\rho\sum_{i=1}^{N} g_{i0}(j) = 0. \tag{10}$$

将 (9) 式的结果代入 (10) 式中，得到平均排队队长为

$$g_i(i) = \frac{N}{2[1-N\lambda(\gamma+\beta)]}\left\{2\lambda\gamma(1-\lambda\gamma) + \frac{(N-1)\lambda^2\gamma(\rho-\gamma)}{1-N\rho} + \left[1+\frac{\rho}{1-N\rho}\right]\gamma A''(1) + \frac{N\lambda^3\gamma B''(1)}{1-N\rho} + \lambda^2 R''(1)\right\}, \quad i=1,2,\cdots,N. \tag{11}$$

4 平均等待时间

4.1 概率母函数 $Q_i(z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_N)$

当 i 号终端站在 t_n 时刻接受服务台查询后，在 $t_{n'}$ 时刻发送完一个报文，这时其存贮器内存贮的报文数为 $\xi_i(n')$ ，则排队服务系统在 $t_{n'}$ 时刻的状态可表示为 $[\xi_1(n'), \xi_2(n'), \cdots, \xi_i(n'), \cdots, \xi_N(n')]$ 。系统状态变量的概率分布的母函数为

$$Q_i(z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_N) = \left\{B\left[\prod_{k=1}^{N} A(z_k)\right]\Big/(Cz_i)\right\}[G_i(z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_N) - G_i(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \cdots, z_N)], \quad i=1,2,\cdots,N, \tag{12}$$

其中 $C = 1 - G_i(1,1,\cdots,z_i,1,\cdots,1)|_{z_i=0}$ 。

4.2 $\overline{W}_L$

用 w_i 表示一个报文从进入 i 号终端站 $(i=1,2,\cdots,N)$ 的存贮器到其被发送出去的时间，随机变量 w_i 的概率母函数为 $W_i(z_i)$ 。根据排队理论，可建立关系式：

$$W_i(A(z_i))B(A(z_i)) = Q_i(1,1,\cdots,z_i,1,\cdots,1), \qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{13}$$

对 (13) 式求导得到

$$\begin{aligned}\overline{w}_i = {} & R''(1)/(2\gamma) + 1/\{2[1-N\lambda(\gamma+\beta)]\}[(N-1)\gamma+(N-1)\rho+2N\gamma\rho \\ & +(1-N\rho+\rho)A''(1)/\lambda^2+N\lambda B''(1)+N\lambda R''(1)].\end{aligned} \tag{14}$$

由于本周期查询式限定 $(K=1)$ 服务排队系统是在离散时间状态下进行分析，因此报文在任一时隙中到达，到这一时隙结束的时间定义为剩余时间，其平均值由下式计算 [4]:

$$\overline{w}_s = A''(1)/(2\lambda^2). \tag{15}$$

报文在存贮中等待发送的平均时间

$$\begin{aligned}\overline{W}_L &= \overline{w}_i - \overline{w}_s \\ &= R''(1)/(2\gamma) + 1/\{2[1-N\lambda(\gamma+\beta)]\}[(N-1)\gamma+(N-1)\rho+2N\gamma\rho \\ &\quad +(N\lambda\gamma+\rho)A''(1)/\lambda^2+N\lambda B''(1)+N\lambda R''(1)].\end{aligned} \tag{16}$$

5　排队服务系统模拟

在周期查询式限定 $(K=1)$ 服务排队系统中，每个终端站在任一单位时隙期内送入其存贮器中的报文数服从 Poisson 分布，其报文长度为 2500bit ，信道速率为 50Mbit/s ，查询转换延时为 $5\mu s$ 。理论计算和计算机模拟采用相同的参数值，对限定 $(K=1)$ 服务的理论计算和计算机模拟结果如表 1 — 4 所示。

表 1　平均存贮的报文数 ($\lambda = 0.001$ 报文 / 时隙)

N	理论	模拟	N	理论	模拟
5	0.00528	0.00521± 0.00010	35	0.05555	0.05554± 0.00033
10	0.01118	0.01112±0.00015	40	0.06931	0.06936±0.00037
15	0.01782	0.01772±0.00018	45	0.08586	0.08598±0.00041
20	0.02536	0.02535±0.00022	50	0.10617	0.10624±0.00046
25	0.03397	0.03389±0.00026	55	0.13167	0.13167±0.00051
30	0.04392	0.04384±0.00029	60	0.16469	0.16485±0.00057

表 2　平均存贮的报文数 ($\lambda = 0.0005$ 报文 / 时隙)

N	理论	模拟	N	理论	模拟
45	0.02949	0.02951± 0.00024	75	0.06202	0.06202± 0.00035
50	0.03394	0.03396±0.00026	80	0.06918	0.06920±0.00037
55	0.03872	0.03880±0.00027	85	0.07702	0.07701±0.00039
60	0.04387	0.04397±0.00029	90	0.08566	0.08577±0.00041
65	0.04943	0.04943±0.00031	95	0.09522	0.09520±0.00043
70	0.05546	0.05551±0.00033	100	0.10586	0.10584±0.00045

表 3 报文平均等待时间 ($\lambda = 0.001$ 报文 / 时隙)

N	理论 (时隙)	模拟 (时隙)	N	理论 (时隙)	模拟 (时隙)
5	2.43651	2.41109± 0.04727	35	31.08537	31.16774± 0.13986
10	5.73596	5.77369±0.06484	40	39.14286	39.15953±0.15694
15	9.47006	9.50931±0.07882	45	48.95545	48.89977±0.17751
20	13.73077	13.76782±0.09324	50	61.16667	61.31769±0.20265
25	18.63793	18.70555±0.10767	55	76.77849	76.71228±0.23254
30	24.35075	24.42914±0.12254	60	97.44118	97.40450±0.27051

表 4 报文平均等待时间 ($\lambda = 0.0005$ 报文 / 时隙)

N	理论	模拟	N	理论	模拟
45	31.04485	31.16821± 0.17013	75	66.84042	66.74744± 0.25653
50	35.87931	35.79874±0.18235	80	74.85715	74.77200±0.27397
55	41.09498	41.11324±0.19665	85	83.70188	83.91617±0.29245
60	46.73881	46.69875±0.21060	90	93.50990	93.45477±0.31114
65	52.86576	52.87193±0.22512	95	104.44760	104.49690±0.33363
70	59.54065	59.66660±0.24066	100	116.72220	116.88640±0.35772

6 结 束 语

本文采用新的分析方法对周期查询式限定 (K=1) 服务排队系统进行了更深入的研究，从而获得了更精确的分析结果。另外，在计算机模拟过程中我们选取了 95% 的概率取值的置信区，并在模拟过程中改进了数据的统计处理方法，因而大大提高了排队系统的模拟实验精度，从表 1 一表 4 中给出的数值可以看出，理论计算与模拟结果是一致的。

致谢 衷心感谢电子科技大学的洪福明教授、査光明教授和熊贤祚教授！衷心感谢中国科学院沈阳自动化所的薛劲松教授！衷心感谢清华大学的吴澄教授和李芳芸教授！

参 考 文 献

[1] Hashida O. Rev. Elec. Commun. Lab., 1972, 20(3,4): 189–199.

[2] Ferguson M J, Aminetzah Y J. IEEE Trans. on Commun., 1985,COM-33(3): 223–231.

[3] Rubin I, De Moraes L F. IEEE J. of Select. Areas Commun., 1983, SAC-1(5): 935–947.

[4] 赵东风，郑苏民. 通信学报，1994, 15(2): 18–23.

[5] 赵东风，郑苏民. 电子学报，1994，22(5): 102–107.

[6] Tagai H. Performance. Evaluation, 1985, 5(4): 271–277.

[7] 赵东风，郑苏民. Waiting time analysis for polling and token passing scheme for computer and communication systems. Proc. of 1992 Int. Conf. on Communication Technology, Beijing, China. 1992, 15.04.1–15.04.3.

[8] Ibe O C, Cheng X. IEEE Trans. on Automat. Contr., 1988, AC-33(1): 102–103.

STUDY OF POLLING SYSTEMS WITH LIMITED SERVICE

Zhao Dongfeng　Li Bihai　Zheng Sumin

(Department of Information and Electronics, Yunnan University, Kunming 650091)

Abstract This paper analyzes a queue model of the polling system with limited service ($K = 1$) in discrete time. By the imbedded Markov chain theory and the generating function method, the mean values of queue length and message waiting time are explicitly obtained. The results obtained by H. Tagai (1985) are revised.

Key words Polling system, Limited service, Discrete time

赵东风： 男，1957 年生，硕士，副教授，从事计算机网络、一点多址通信、ISDN 和 CIMS 的科研和教学工作.

李必海： 男，1937 年生，教授，系主任，中国电子学会教育委员会委员，从事电子电路、计算机网络和通信网的科研和教学工作.

郑苏民： 男，1933 年生，教授，中国电子学会云南分会副理事长，从事中文信息处理、计算机网络和图象处理的科研和教学工作.