

解不连续介质结构问题的积分方程法*

万里兮 盛克敏 任朗
(西南交通大学应用物理系, 四川峨眉)

摘要 本文讨论了用积分方程法处理不连续介质结构问题。先从模式匹配法出发, 通过一些变换和推导, 得到了相应的散射积分方程和传输积分方程。给出了传输积分方程存在解的充要条件。这个条件实际上就是这种介质结构的色散方程。作为例子, 导出了一阶不连续介质结构的简洁解。

关键词 介质波导; 积分方程法; 模式匹配法

一、引言

介质波导在毫米波技术中被广泛地采用。实用中有许多种结构, 根据其导波性质, 可以将它们分为两类: 第一类为传输系统, 它用于能量的传输或耦合; 第二类为散射系统, 它用于能量的发送和接收。在这两类系统中需要求解的问题是不同。在传输系统中, 需要求解传播常数, 场结构等等; 而在散射系统中, 则要知道反射系数, 透射系数和场分布等等。到目前为止, 已有许多方法可以求得这些量。但大都是近似的, 在理论上还不能让人满意。近年来广泛采用的模式匹配法是其中最严格的一种方法。许多人用它求得了比较精确的结果^[1-4]。但是, 这种方法不便于对不连续介质波导进行理论探讨, 也不易获得简化计算公式, 同时收敛也不够快。虽然如此, 这种方法在理论上的严格性却是公认的。这里, 我们以模式匹配法为基础, 提出一种改进方法——积分方程法。

二、散射积分方程组和传输积分方程组

1. 模式分离技术

对于介质波导来说, 由于它们是开放或半开放系统, 故一般不存在离散谱的本征解^[5]。为得到一个无限的离散谱, 我们采用模式分离技术。从结构上讲, 这就是在开放(或半开放)介质波导上、下加导体板(对半开放介质波导只加上导体板), 从而使开放系统变成了封闭系统。我们知道, 封闭系统中的定解问题具有一个无穷递增的特征值序列和相应的正交函数系。这样, 我们就将连续谱离散化了。以前有人用等效电路法^[3]来获得特征值, 现在我们采用场分析法。

* 1986年6月5日收到, 1987年9月16日修改定稿。

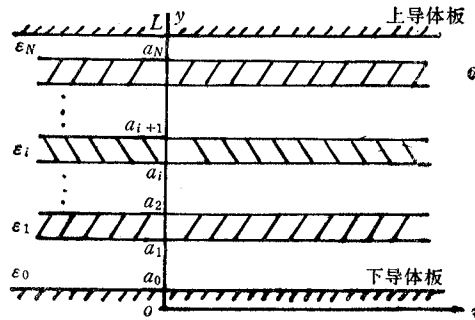


图1 多层介质层的模式分离技术
 ϵ_0, ϵ_N 一般为自由空间中的介电常数.

一种更普遍的问题是多层介质的本征问题求解。在图1所示的结构中, 电磁场在各个区域中的表达式为^[6]

$$\left. \begin{aligned} E_{xi} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ E_{yi} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \left(k_i^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_i \\ E_{zi} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_i} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z \partial y} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ H_{xi} &= -\frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ H_{yi} &= \frac{1}{j\omega\mu} \left(k_i^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_i \\ H_{zi} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z \partial y} \end{aligned} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

式中 ϕ_i 为磁矢位的 y 分量, ϕ_i 为电矢位的 y 分量, i 为第 i 层介质层的标号。 ϕ_i, ϕ_i 满足

$$\nabla^2 \phi_i + k_i^2 \phi_i = 0 \quad (2a)$$

$$\nabla^2 \phi_i + k_i^2 \phi_i = 0 \quad (2b)$$

式中 $k_i^2 = \omega^2 \mu \epsilon_i$.

以下只讨论 TM 波(即 ϕ 部分), TE 波可用类似的方法。图1中的结构是沿 z, x 方向无限沿伸, 假定波沿 z 方向传播, 所以有 $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ 。求解(2a)式得

$$\phi(y) = \begin{cases} A_0 \cos[k_{y0}(y - a_0)], & a_0 \leq y \leq a_1 \\ A_i \cos(k_{yi}y) + B_i \sin(k_{yi}y), & a_i \leq y \leq a_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ A_N \cos[k_{yN}(L - y)], & a_N \leq y \leq L \end{cases} \quad (3)$$

这里我们省略因子 $e^{-jk_z z}$ 。 k_x 和 k_{yi} 满足

$$k_{yi}^2 + k_z^2 = k_i^2 \quad (4)$$

式里的 k_z 没有下标 i , 因为由相位匹配条件知道, 波在所有的介质层中都以同一速度传播, 故 k_z 与 i 无关. 在各介质层的界面上, 电磁场的切向分量应连续, 用 (3) 式我们可以得到一组关于 $A_0, A_1, \dots, A_N; B_1, B_2, \dots, B_{N-1}$ 的齐次线性方程, 它有非零解的充要条件是系数矩阵的行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} \frac{k_{y0}}{\epsilon_0} \sin[k_{y0}(a_1 - a_0)] & \frac{k_{y1}}{\epsilon_1} \sin(k_{y1}a_1) & -\frac{k_{y1}}{\epsilon_1} \cos(k_{y1}a_1) & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{k_{y1}}{\epsilon_1} \sin(k_{y1}a_2) & \frac{k_{y1}}{\epsilon_1} \cos(k_{y1}a_2) & \frac{k_{y2}}{\epsilon_2} \sin(k_{y2}a_2) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos[k_{y0}(a_1 - a_0)] & -\cos(k_{y1}a_1) & -\sin(k_{y1}a_1) & 0 & \dots \\ 0 & \cos(k_{y1}a_2) & \sin(k_{y1}a_2) & -\cos(k_{y2}a_2) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(k_{y_{N-1}}a_{N-1}) & -\cos[k_{yN}(L - a_N)] & & & & \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

这样, 就得到该问题的特征方程. 对 TE 波也有类似的结果. 此外, 我们还可以得到两个正交关系

$$\text{TM} \quad \int_0^L \frac{1}{\epsilon(y)} \phi_{ym}(y) \phi_{yn}(y) dy = 0 \quad (6)$$

$$\text{TE} \quad \int_0^L \phi_{ym}(y) \phi_{yn}(y) dy = 0 \quad (7)$$

式中 $m \neq n$. 于是, 任何一个存在于该结构中的场都可用 ψ 和 ϕ 附以相位因子而得到:

$$\psi(y, z) = \sum_n \alpha_n \phi_{yn}(y) e^{-jk_{zn}^{\text{TM}} z} \quad (8)$$

$$\phi(y, z) = \sum_n \gamma_n \phi_{yn}(y) e^{-jk_{zn}^{\text{TE}} z} \quad (9)$$

2. 多级阶梯的散射积分方程组

我们研究的都是突变结构的波导, 这是因为大多数毫米波元器件都是突变结构. 就最一般的情况来说, 一个断面形状复杂的结构, 可以用若干个阶跃不连续结构来近似. 当这些阶梯数增加, 而且每个台阶宽度减小时, 就逼近实际结构, 如图 2 所示. 于是, 其解也就逼近实际结构的解.

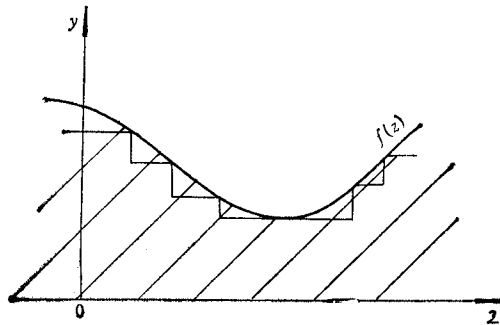


图 2 复杂断面的阶梯逼近

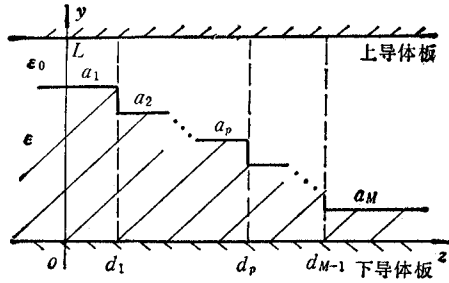


图3 多级阶梯的散射问题

为说明该方法,我们这里只考虑垂直投射。在图3所示的结构中,当一入射波自左向右垂直入射时,将产生反射和透射,第一个突变面的透射波即是第二个突变面的人射波,第二个突变面的透射波即是第三个突变面的人射波,如此等等。我们以第一个下标表示区域,第二个下标表示模的次数,则各区域通式为

$$\phi_p(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{pn}(y) (\alpha_{pn} e^{-ik'_{zpn} z} + \beta_{pn} e^{ik'_{zpn} z}) \quad (10)$$

$$\phi_p(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{pn}(y) (\gamma_{pn} e^{-ik''_{zpn} z} + \delta_{pn} e^{ik''_{zpn} z}) \quad (11)$$

相位因子的 k_z 上角标一撇表示 TM 波,两撇表示 TE 波。代入(1)式得

$$E_{xp} = \sum_{n=1}^{\infty} (-j) k'_{zpn} \phi_{pn}(y) (\gamma_{pn} e^{-ik''_{zpn} z} - \delta_{pn} e^{ik''_{zpn} z}) \quad (12a)$$

$$E_{yp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega\epsilon_p} (k_p^2 - k'_{ypn}{}^2) \phi_{pn}(y) (\alpha_{pn} e^{-ik'_{zpn} z} + \beta_{pn} e^{ik'_{zpn} z}) \quad (12b)$$

$$E_{xp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k'_{zpn}}{\omega\epsilon_p} \frac{d\phi_{pn}(y)}{dy} (\alpha_{pn} e^{-ik'_{zpn} z} - \beta_{pn} e^{ik'_{zpn} z}) \quad (12c)$$

$$H_{xp} = \sum_{n=1}^{\infty} j k'_{zpn} \phi_{pn}(y) (\alpha_{pn} e^{-ik'_{zpn} z} - \beta_{pn} e^{ik'_{zpn} z}), \quad (12d)$$

$$H_{yp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega\mu} (k_p^2 - k'_{ypn}{}^2) \phi_{pn}(y) (\gamma_{pn} e^{-ik''_{zpn} z} + \delta_{pn} e^{ik''_{zpn} z}) \quad (12e)$$

$$H_{xp} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-k''_{zpn}}{\omega\mu} \frac{d\phi_{pn}(y)}{dy} (\gamma_{pn} e^{-ik''_{zpn} z} - \delta_{pn} e^{ik''_{zpn} z}) \quad (12f)$$

在各个介质区的突变面上,场的切向分量应连续,即 E_{xp} , E_{yp} , H_{xp} , H_{yp} 应连续。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} k''_{zpn} \phi_{pn}(y) (\gamma_{pn} e^{-ik''_{zpn} d_p} - \delta_{pn} e^{ik''_{zpn} d_p}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} k''_{z(p+1)n} \phi_{p+1n}(y) (\gamma_{p+1n} e^{-ik''_{z(p+1)n} d_p} - \delta_{p+1n} e^{ik''_{z(p+1)n} d_p}) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_p} (k_p^2 - k'_{ypn}{}^2) \phi_{pn}(y) (\alpha_{pn} e^{-ik'_{zpn} d_p} + \beta_{pn} e^{ik'_{zpn} d_p})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} (k_{p+1}^2 - k_{y_{p+1n}}'^2) \phi_{p+1n}(y) (\alpha_{p+1n} e^{-ik'_{z_{p+1n}} d_p} + \beta_{p+1n} e^{ik'_{z_{p+1n}} d_p}) \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} k'_{z_{pn}} \phi_{pn}(y) (\alpha_{pn} e^{-ik'_{z_{pn}} d_p} - \beta_{pn} e^{ik'_{z_{pn}} d_p}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} k'_{z_{p+1n}} \phi_{p+1n}(y) (\alpha_{p+1n} e^{-ik'_{z_{p+1n}} d_p} - \beta_{p+1n} e^{ik'_{z_{p+1n}} d_p}) \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (k_p^2 - k_{y_{pn}}''^2) \phi_{pn}(y) (\gamma_{pn} e^{-ik''_{z_{pn}} d_p} + \delta_{pn} e^{ik''_{z_{pn}} d_p}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (k_{p+1}^2 - k_{y_{p+1n}}''^2) \phi_{p+1n}(y) (\gamma_{p+1n} e^{-ik''_{z_{p+1n}} d_p} + \delta_{p+1n} e^{ik''_{z_{p+1n}} d_p}) \end{aligned} \quad (13d)$$

$$p = 1, 2, \dots, M-1$$

注意,在最后一个突变面上,由于没有反射, β_{Mn} , δ_{Mn} 为零。从上面可以发现,在垂直入射时, TE 波与 TM 波无耦合。因此,我们可以分别考虑这两种波的行为。这里以 TM 波为例,对 TE 波可以类似处理。到此为止,我们都是按照模式匹配法做的。从下面开始,我们将用另一方法来处理 (13b) 和 (13c) 式。

假定四个函数 $g_{p1}(y)$, $g_{p2}(y)$, $g'_{p+11}(y)$, $g'_{p+12}(y)$, 它们满足

$$g_{p1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_p} k'_{z_{pn}} \phi_{pn}(y) \alpha_{pn} e^{-ik'_{z_{pn}} d_p} \quad (14a)$$

$$g_{p2}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_p} k'_{z_{pn}} \phi_{pn}(y) \beta_{pn} e^{ik'_{z_{pn}} d_p} \quad (14b)$$

$$g'_{p+11}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} k'_{z_{p+1n}} \phi_{p+1n}(y) \alpha_{p+1n} e^{-ik'_{z_{p+1n}} d_p} \quad (14c)$$

$$g'_{p+12}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} k'_{z_{p+1n}} \phi_{p+1n}(y) \beta_{p+1n} e^{ik'_{z_{p+1n}} d_p} \quad (14d)$$

结合 (12) 式,我们可以发现它们的物理意义就是分别代表第 p 个界面两侧的人射场,反射场和透射场。利用正交关系后,将它们代入 (13c) 消去 α_{pn} , β_{pn} , α_{p+1n} , β_{p+1n} , 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k'_{z_{pn}}} \phi_{pn}(y) \frac{\int_0^L g_{p1}(t) \phi_{pn}(t) dt}{\int_0^L \frac{1}{\varepsilon_p} |\phi_{pn}(t)|^2 dt} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k'_{z_{pn}}} \phi_{pn}(y) \frac{\int_0^L g_{p2}(t) \phi_{pn}(t) dt}{\int_0^L \frac{1}{\varepsilon_p} |\phi_{pn}(t)|^2 dt} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k'_{z_{p+1n}}} \phi_{p+1n}(y) \frac{\int_0^L g'_{p+11}(t) \phi_{p+1n}(t) dt}{\int_0^L \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} |\phi_{p+1n}(t)|^2 dt} \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k'_{z_{p+1n}}} \phi_{p+1n}(y) \frac{\int_0^L g'_{p+12}(t) \phi_{p+1n}(t) dt}{\int_0^L \frac{1}{\varepsilon_{p+1}} |\phi_{p+1n}(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

每一个和式在其收敛域内绝对一致收敛,因为它们都代表一种场,而场不可能无穷大,它的绝对值的平方是有限量,故求和绝对一致收敛。我们将积分与求和交换次序,并略加整理得

$$\begin{aligned} & \int_0^L K_{p_1}(y, z) g_{p_1}(z) dz - \int_0^L K_{p_1}(y, z) g_{p_2}(z) dz \\ &= \int_0^L K_{p+11}(y, z) g'_{p+11}(z) dz - \int_0^L K_{p+11}(y, z) g'_{p+12}(z) dz, \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$K_{p_1}(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{p_n}(y) \psi_{p_n}(z)}{k'_{z p_n} \int_0^L \frac{1}{\epsilon_p} |\psi_{p_n}(t)|^2 dt} \quad (16)$$

在(15)式中存在界面 p 右侧的场 $g'_{p+11}(y)$ 和 $g'_{p+12}(y)$, 为消去它们,我们从(14)式中消去 $\alpha_{p_n}, \beta_{p_n}, \alpha_{p+1n}, \beta_{p+1n}$, 得到界面 p 右侧场和界面 $p+1$ 左侧场的关系:

$$\int_0^L g_{p+11}(z) K_{p+12}(y, z) dz = \int_0^L g'_{p+11}(z) K_{p+11}(y, z) dz \quad (17a)$$

$$\int_0^L g_{p+12}(z) K_{p+12}(y, z) dz = \int_0^L g'_{p+12}(z) K_{p+11}(y, z) dz \quad (17b)$$

式中

$$K_{p+12}(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{p+1n}(y) \psi_{p+1n}(z)}{k'_{z p+1n} \int_0^L \frac{1}{\epsilon_{p+1}} |\psi_{p+1n}(t)|^2 dt} e^{ik'_{z p+1n} \Delta_{p+1}} \quad (18)$$

$$\Delta_{p+1} = d_{p+1} - d_p$$

将(17)式代入(15)式,就得到

$$\int_0^L [g_{p_1}(z) - g_{p_2}(z)] K_{p_1}(y, z) dz = \int_0^L [g_{p+11}(z) - g_{p+12}(z)] K_{p+12}(y, z) dz, \quad (19a)$$

将(14)式代入(13b),并考虑到(17)式,我们有

$$\int_0^L [g_{p_1}(z) + g_{p_2}(z)] K_{p+11}(y, z) dz = \int_0^L [g_{p+11}(z) + g_{p+12}(z)] K_{p+12}(y, z) dz. \quad (19b)$$

$$p = 1, 2, \dots, M-1.$$

注意,当 $p = M-1$ 时,(19)式右端只有一项,并且(19b)式可以简化成一个简单的多项式。这样,我们就得到了一个积分方程组。在散射问题中,我们总是假定第一区的人射波已知,例如,基模入射,由(14)式可知,即 $g_{11}(y)$ 已知。我们将这个积分方程组写开,并将已知项放在等号的右端,就得到一个第一类 F , 积分方程组,写成矩阵式为

$$\int_0^L \bar{K}(y, z) G(z) dz = F(y) \quad (20)$$

式中 $\bar{K}(y, z)$ 是核矩阵, $G(z)$ 是未知函数列矩阵, $F(y)$ 是已知函数列矩阵。

观察核表达式(16)和(18)两式,我们可以发现,它们仅仅与上下导体板的距离 L , 介质层厚度,介电常数,以及特征函数有关。任何一个散射结构一旦确定,那么核也就随之确定,与场的人射情况无关。因此我们称它们为结构因子,核矩阵 $\bar{K}(y, z)$ 我们称它为广义结构因子。从整个推导过程中,我们可以看到,并没有对结构的不连续性的具体情况作任何限定,故以上推导和结果适用于任何结构的阶梯,包括有限周期结构。

3. 对称阶梯的传输积分方程组

过去对传输结构的讨论,大都限于单个不连续性结构。现在我们考虑多级不连续传输结构,如图4所示。我们的目的是要求得该系统的传输积分方程。

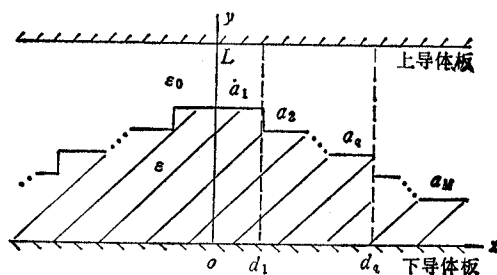


图4 横截面对称的不连续传输结构
\$yoz\$ 平面为对称面

如图4建立坐标,假定波沿 \$z\$ 方向传播。这时,位函数为

$$\phi_q(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{qn} \phi_q(x) \phi_{qn}(y) e^{-ik'_{zn}z} \quad (21a)$$

$$\phi_q(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{qn} \phi_q(x) \phi_{qn}(y) e^{-ik''_{zn}z} \quad (21b)$$

式中 \$q = 1, 2, \dots, M\$, 为区域标号。\$k'_{zn}, k''_{zn}\$ 分别满足

$$k'_{xq}{}^2 + k'_{yqn}{}^2 + k'_{zn}{}^2 = k_q^2 \quad (22a)$$

$$k''_{xq}{}^2 + k''_{yqn}{}^2 + k''_{zn}{}^2 = k_q^2 \quad (22b)$$

由相位匹配条件知道 \$k'_{zn}, k''_{zn}\$ 与区域无关,即与 \$q\$ 无关。将(21)式代入场表示式(1)式,得到各个区域的场分量表示式。在各个区域相交的界面上,电磁场的切向分量应连续,即

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_q} \tau_{qn} (k_q^2 - k'_{yqn}{}^2) \phi_q(d_q) \phi_{qn}(y) e^{-ik'_{zn}z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon_{q+1}} \tau_{q+1n} (k_{q+1}^2 - k'_{yq+1n}{}^2) \phi_{q+1}(d_q) \phi_{q+1n}(y) e^{-ik'_{zn}z} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{k'_{zn}}{\omega \epsilon_q} \tau_{qn} \phi_q(d_q) \frac{d\phi_{qn}(y)}{dy} e^{-ik'_{zn}z} - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{qn} \frac{d\phi_q(d_q)}{dx} \phi_{qn}(y) e^{-ik'_{zn}z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{k'_{zn}}{\omega \epsilon_{q+1}} \tau_{q+1n} \phi_{q+1}(d_q) \frac{d\phi_{q+1n}(y)}{dy} e^{-ik'_{zn}z} \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{q+1n} \frac{d\phi_{q+1}(d_q)}{dx} \phi_{q+1n}(y) e^{-ik'_{zn}z} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{qn} (k_q^2 - k''_{yqn}{}^2) \phi_q(d_q) \phi_{qn}(y) e^{-ik''_{zn}z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{q+1n} (k_{q+1}^2 - k''_{yq+1n}{}^2) \phi_{q+1}(d_q) \phi_{q+1n}(y) e^{-ik''_{zn}z} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{qn} \frac{d\phi_q(d_q)}{dx} \phi_{qn}(y) e^{-ik'_{zn}z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k''_{zn}}{\omega\mu} \sigma_{qn} \phi_q(d_q) \frac{d\phi_{qn}(y)}{dy} e^{-ik''_{zn}z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{q+1n} \frac{d\phi_{q+1}(d_q)}{dx} \phi_{q+1n}(y) e^{-ik'_{zn}z} \\ & \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k''_{zn}}{\omega\mu} \sigma_{q+1n} \phi_{q+1}(d_q) \frac{d\phi_{q+1n}(y)}{dy} e^{-ik''_{zn}z} \end{aligned} \right\}$$

$$q = 1, 2, \dots, M-1,$$

与上节一样, 我们假定四个函数 $g_{q1}(y)$, $g'_{q+11}(y)$, $g_{q2}(y)$, $g'_{q+12}(y)$, 它们满足

$$g_{q1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{qn}}{\varepsilon_q} (k_q^2 - k'_{yqn}{}^2) \phi_q(d_q) \phi_{qn}(y) e^{-ik'_{zn}z} \quad (24a)$$

$$g'_{q+11}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{q+1n}}{\varepsilon_{q+1}} (k_{q+1}^2 - k'_{yq+1n}{}^2) \phi_{q+1}(d_q) \phi_{q+1n}(y) e^{-ik'_{zn}z} \quad (24b)$$

$$g_{q2}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{qn} (k_q^2 - k''_{yqn}{}^2) \phi_q(d_q) \phi_{qn}(y) e^{-ik''_{zn}z} \quad (24c)$$

$$g'_{q+12}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{q+1n} (k_{q+1}^2 - k''_{yq+1n}{}^2) \phi_{q+1}(d_q) \phi_{q+1n}(y) e^{-ik''_{zn}z} \quad (24d)$$

利用正交关系 (6), (7) 式后, 就得到一组 τ_{qn} 、 σ_{qn} 的表达式, 再将这组表达式和 (24) 式代入 (23) 式, 就得到一组积分方程组, 整理后得

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^L [K_{q1}(y, t) - K_{q+11}(y, t)] g_{q1}(t) dt - \int_0^L [K_{q2}(y, t) - K'_{q+12}(y, t)] g_{q2}(t) dt = 0 \\ & \int_0^L [K_{q3}(y, t) - K'_{q+13}(y, t)] g_{q1}(t) dt + \int_0^L [K_{q4}(y, t) - K_{q+14}(y, t)] g_{q2}(t) dt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$q = 1, 2, \dots, M-1$$

式中

$$\left. \begin{aligned} K_{q1}(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k'_{zn}}{\omega\varepsilon_q} \frac{d\phi_{qn}(y)}{dy} \frac{\phi_{qn}(t)}{(k_q^2 - k'_{yqn}{}^2) \int_0^L \frac{1}{\varepsilon_q} |\phi_{qn}(t)|^2 dt} \\ K_{q2}(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_q(d_q)/dx) \phi_{qn}(y) \phi_{qn}(t)}{(k_q^2 - k'_{yqn}{}^2) \phi_q(d_q) \int_0^L |\phi_{qn}(t)|^2 dt} \\ K'_{q+12}(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_{q+1}(d_q)/dx) \phi_{q+1n}(y) \phi_{q+1n}(t)}{(k_{q+1}^2 - k'_{yq+1n}{}^2) \phi_{q+1}(d_q) \int_0^L |\phi_{q+1n}(t)|^2 dt} \\ K_{q3}(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_q(d_q)/dx) \phi_{qn}(y) \phi_{qn}(t)}{(k_q^2 - k'_{yqn}{}^2) \phi_n(d_q) \int_0^L \frac{1}{\varepsilon_q} |\phi_{qn}(t)|^2 dt} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$K'_{q+1s}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_{q+1}(d_q)/dx)\phi_{q+1n}(y)\phi_{q+1n}(t)}{(k_{q+1}^2 - k'_{yq+1n})\phi_{q+1}(d_q) \int_0^L \frac{1}{\epsilon_{q+1}} |\phi_{q+1n}(t)|^2 dt}$$

$$K_{qa}(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{k''_{zn}}{\omega\mu} \frac{(d\phi_{qn}(y)/dy)\phi_{qn}(t)}{(k_a^2 - k''_{yqn}) \int_0^L |\phi_{qn}(t)|^2 dt}$$

我们将(25)式写成矩阵方程

$$\int_0^L \bar{K}(y, t)G(t)dt = 0 \tag{27}$$

式中 $\bar{K}(y, t)$ 是核矩阵, $G(t)$ 是未知函数列矩阵。可见它仍然是一个第一类 F 积分方程组。

到此为止,我们得到了散射积分方程组和传输积分方程组。依赖积分方程的理论,我们可以得到所要求形式的解。

三、一阶不连续结构传播常数的色散方程

1. 色散方程

对于传输程分方程组,我们可以证明(附录)其核矩阵满足

$$\left| \mathcal{L} \left\{ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y, t)][R_{ij}(t)] dt \right\} \right| = 0 \tag{28}$$

式中 \mathcal{L} 为对 y 某种运算的算子, $[R_{ij}(t)]$ 为一已知对角矩阵。这个公式其实就是色散方程。现在我们来讨论它在一阶不连续结构中的应用。

工程实用中有如图 5 所示的一些波导,它们都是关于对称面 $A-A'$ 对称的一阶不连

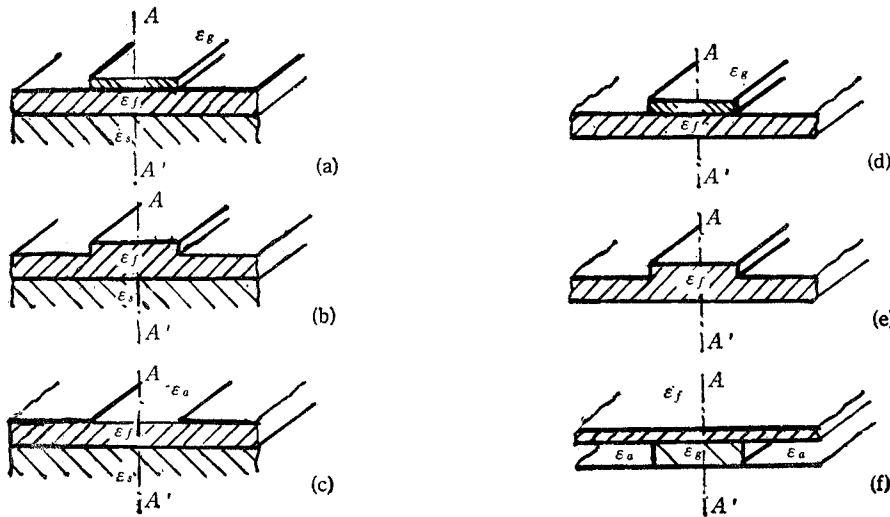


图 5 典型的开放式介质波导 ($\epsilon_f, \epsilon_g \geq \epsilon_s \geq \epsilon_a$)

(a) 光带介质波导; (b) 光脊波导; (c) 光缝波导; (d) 毫米波带介质波导; (e) 脊波导; (f) 倒置带波导

续结构。这时, (28) 式可以化为比较简单的二阶行列式。为求得 TM 波和 TE 波的色散方程, 我们取 \mathcal{L} 为对 y 的积分运算。注意到正交关系 (6)、(7) 式, 以及所有的

$$\int_0^L \frac{d\phi_{qn}(y)}{dy} dy = 0$$

我们就得到色散方程

$$\begin{aligned} \text{TM 波} \quad & \frac{(d\phi_1(d_1)/dx) \int_0^L \phi_{1m}(y) dy}{(k_1^2 - k_{y1m}^2) \phi_1(d_1)} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_2(d_1)/dx) \int_0^L \phi_{2n}(y) dy \int_0^L \frac{1}{\epsilon_1} \phi_{1m}(y) \phi_{2n}(y) dy}{(k_2^2 - k_{y2n}^2) \phi_2(d_1) \int_0^L \frac{1}{\epsilon_2} |\phi_{2n}(t)|^2 dt} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{TE 波} \quad & \frac{(d\phi_1(d_1)/dx) \int_0^L \phi_{1m}(y) dy}{(k_1^2 - k_{y1m}^2) \phi_1(d_1)} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d\phi_2(d_1)/dx) \int_0^L \phi_{2n}(y) dy \int_0^L \phi_{1m}(y) \phi_{2n}(y) dy}{(k_2^2 - k_{y2n}^2) \phi_2(d_1) \int_0^L |\phi_{2n}(t)|^2 dt} \end{aligned} \quad (30)$$

式中 m 表示第 m 个模式。由于这两式相互独立, 就意味着它们分别代表两类独立波的传播特性, 并且它们都与自身这类波的高次模相关。我们将它作一级近似, 即只取 $n = 1$, 这时

$$\begin{aligned} \text{TM 波} \quad & \frac{(d\phi_1(d_1)/dx) \phi_2(d_1)}{\phi_1(d_1) d\phi_2(d_1)/dx} \\ & - \frac{(k_1^2 - k_{y1m}^2) \int_0^L \phi_{21}(y) dy \int_0^L \frac{1}{\epsilon_1} \phi_{1m}(y) \phi_{21}(y) dy}{(k_2^2 - k_{y2m}^2) \int_0^L \phi_{1m}(y) dy \int_0^L \frac{1}{\epsilon_2} |\phi_{21}(t)|^2 dt} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{TE 波} \quad & \frac{(d\phi_1(d_1)/dx) \phi_2(d_1)}{\phi_1(d_1) d\phi_2(d_1)/dx} \\ & - \frac{(k_1^2 - k_{y1m}^2) \int_0^L \phi_{21}(y) dy \int_0^L \phi_{1m}(y) \phi_{21}(y) dy}{(k_2^2 - k_{y2m}^2) \int_0^L \phi_{1m}(y) dy \int_0^L |\phi_{21}(t)|^2 dt} \end{aligned} \quad (32)$$

式中的右端分子分母的数值接近, 若用 1 代替, 这正是用等效介电常数法所求得的结果^[7]。可见等效介电常数法只是此方法的一种粗糙的近似。

2. 数值结果

我们用 (29)、(30) 两式对图 5 (f) 的一个介质波导进行了具体的数值计算, 结果如图 6 (a), (b) 所示。波导参数如图中标明。图中也给出了用等效介电常数法的结果。两种方法的结果比较接近, 当 ω 较大时, 两种方法的结果几乎一样。这里, 我们对 n 取了不同值, 结果表明 (29)、(30) 两式收敛很快。因此, 在工程应用中, 我们完全可以用前几项

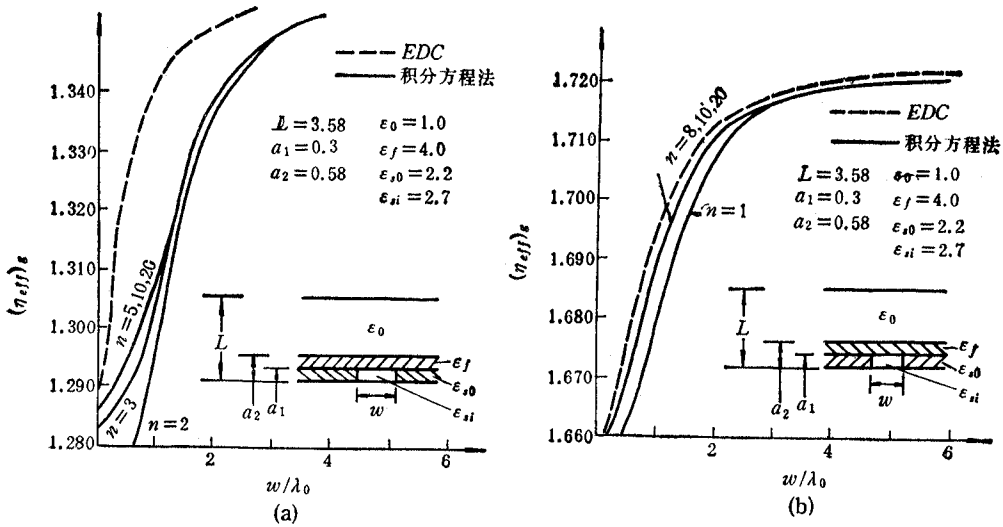


图 6 (a) 倒置线的 TM 波的 $(\eta_{eff})_g$ 曲线, (b) 倒置线的 TE 波的 $(\eta_{eff})_g$ 曲线。

来作为计算公式。

四、结 论

积分方程法是将模式匹配法中对线性方程组的求解转化为对线性积分方程组的求解。依赖于积分方程的理论,可以得到我们所需要形式的解。一阶不连续结构传播常数的解(29),(30)两式具有理论上的准确性和实用上的简单性。它们的相互独立性表示了波的传播有可能以独立模传播。从这里我们看到,积分方程法求解传播常数的优越性就是能获得精确而又简洁的解。

附录 为了证明(28)式,我们先证明,对(27)式来说,任意的列矩阵 $G(t)$ 都能使它恒成立。令

$$[f_i(y)] = \begin{bmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}(y,s) & \bar{K}_{12}(y,s) & \cdots & \bar{K}_{1n}(y,s) \\ \bar{K}_{21}(y,s) & \bar{K}_{22}(y,s) & \cdots & \bar{K}_{2n}(y,s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{n1}(y,s) & \bar{K}_{n2}(y,s) & \cdots & \bar{K}_{nn}(y,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{bmatrix} ds$$

将它共轭转置后左乘(27)式,然后对 y 积分得

$$J(f,g) = \int_0^L \{ [f_i(y)]^+ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y,t)] [g_i(t)] dt \} dy \\ = \int_0^L \left\{ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y,s)] [g_i(s)] ds \right\}^+ \left\{ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y,t)] [g_i(t)] dt \right\} dy$$

显然对 y 积分中的数恒大于或等于零。若 $J(f,g) = 0$, 则不论 $[g_i(t)]$ 为何列矩阵, 都有

$$\left\{ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y,s)] [g_i(s)] ds \right\}^+ \left\{ \int_0^L [\bar{K}_{ij}(y,t)] [g_i(t)] dt \right\} = 0$$

或

$$\int_0^L [\bar{K}_{ij}(y, t)] [g_i(t)] dt = 0 \quad (A-1)$$

即命题成立。

现在我们取 $[g_i(t)] = [R_{ij}(y, t)] [a_i]$, 其中 $[R_{ij}(y, t)]$ 为已知对角矩阵, $[a_i]$ 为一常数矩阵, 将它代入 (A-1) 式, 同时取对 y 的一种运算, 例如微分或者积分, 用算子符号 \mathcal{L} 来表示该运算, 则 (A-1) 式就化为一个齐次线性方程组, 有非零解的充要条件就是 (28) 式。

作者感谢四川大学数学系张石生副教授在数学方面的许多指教。

参 考 文 献

- [1] K. Solbach, I. Wolff, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-26**(1978), 266—274.
- [2] R. Mittra, Yun-Li Hou, V. Jamnejad, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-28**(1980), 36—43.
- [3] Song-Tsuen, Peng, A. Oliner, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981), 843—854.
- [4] Song-Tsuen, Peng, A. Oliner, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981), 855—868.
- [5] R. Courant, D. Hilbert 著, 钱敏、郭敦仁译, 数学物理方法, 卷1, 科学出版社, 1981年, 第261页.
- [6] R. F. Harrington, 著, 孟侃译, 正弦电磁场, 上海科学技术出版社, 1964年, 第139页.
- [7] 吴万春, 微波毫米波与光集成电路的理论基础, 西北电讯工程学院出版社, 1985年, 第207—213页.

THE INTEGRAL EQUATION METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF DISCONTINUOUS DIELECTRIC STRUCTURE

Wan Lixi, Sheng Kemin, Ren Lan

(Applied Physics Department, South-Western Jiaotong University, Emei, Sichuan)

ABSTRACT From the mode-matching method, by doing some transforms and derivations, the scattering and propagation integral equations for solving the problems of discontinuous dielectric structure are obtained. The necessary and sufficient condition for the existence of solution of propagating equations is given. It is really the dispersion equation of the dielectric structure. As an example, a succinct solution of one-step discontinuous dielectric structure is derived.

KEY WORDS Dielectric waveguide; Integral equation method; Mode-matching method