

# 基于RRQR分解的高分辨谱估计方法的性能分析\*

李有明

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

**摘要** 本文研究了基于数据矩阵的秩校正QR(RRQR)高分辨谱估计方法,给出了该方法估计源方位角误差的一种非渐近方差估计式。理论分析和计算机模拟结果证明了这一结果的正确性。

**关键词** 阵列信号处理,方向估计,QR分解,性能分析

## 1 引言

近年来,在多元定位问题中,一类基于特征分解的高分辨阵列处理方法引起人们极大的兴趣。比较典型的有MUSIC<sup>[1]</sup>,Min-Norm<sup>[2]</sup>等方法。大量的理论分析和计算机模拟结果表明<sup>[3]</sup>,与传统方法相比,这类方法具有高的方向分辨特性。然而由于要对数据协方差阵做特征分解,运算量大,实时处理有一定难度。

在降低分辨性能不大的情况下,为减少运算量,人们做了不懈努力,并已取得一些进展。如ESPRIT<sup>[4]</sup>,RRQR(Rank Revealing QR)<sup>[5]</sup>、子空间迭代<sup>[6]</sup>等方法。

基于估计协方差矩阵的特征分解渐近误差估计结果<sup>[3]</sup>,人们较多地讨论了一大类基于特征分解方法的性能分析,而对于RRQR方法的性能分析还未见讨论。

本文利用矩阵扰动技巧,得到了基于数据矩阵的RRQR方法的估计方差表示式,理论分析和计算机模拟结果证明了这一结果的正确性。同时也表明,RRQR方法在较高信噪比(SNR)情形,性能接近MUSIC方法,而在低SNR情形,性能明显比MUSIC方法差,即RRQR方法的运算量减少是以性能损失为代价的。

## 2 RRQR方法简介

假设一阵列由 $N$ 个阵元组成,空间有 $M$ 个平面波信号被该阵列所接收。阵列输出的向量形式为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t),$$

其中 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$ ;  $\mathbf{S}(t) = (s_1(t), \dots, s_M(t))^T$ ;  $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))^T$ 为噪声向量;  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)]$ ,  $\mathbf{a}(\theta_i)$ 为第 $i$ 个信号源对应的方向向量,它们线性独立。

1993-06-18收到,1994-01-10定稿

\* 电子预研基金资助课题

李有明 男1963年生,讲师,主要从事阵列信号处理、矩阵计算、最优化理论与方法等研究。

若  $S(t)$  和  $n(t)$  是均值为零、相互独立的复平稳随机过程,  $n(t)$  的协方差阵为  $\sigma^2 I$ , 那么  $P$  次快拍所形成的数据矩阵为

$$X_p = A(\theta)S_M + N_p,$$

其中  $X_p, N_p$  为  $N \times P$  阶矩阵,  $X_p = [X(t_1), \dots, X(t_p)]$ ,  $N_p = [n(t_1), \dots, n(t_p)]$ ; 而  $S_M = [s(t_1), \dots, s(t_p)]$  为  $M \times P$  阶矩阵.

多源定位问题是从采样数据矩阵  $X_p$  估计出信号来向  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ .

不难明白, 直接对数据矩阵  $X_p$  作 QR 分解是很难求出信号或噪声子空间的. 这是因为上三角阵  $R$  的对角元不具有元素从大到小排列的特点. 为此我们自然希望寻求一种校正的 QR 分解, 使上三角阵  $R$  的对角元具有按模由大到小排列的特点. 这一问题与数学上如何求矩阵的秩是等价的. Chan 提出的 RRQR 分解<sup>[7]</sup>正具有这种特点. 因此这一工作为将广泛使用的 QR 分解方法应用于高分辨谱估计奠定了理论基础. 正是这样, S. Prasad 等<sup>[8]</sup>将这一理论应用于多源定位问题中, 得如下算法.

#### RRQR 算法

对  $i = N, N-1, \dots, 1$ , 执行如下(1)~(5)步骤:

- (1)  $X_{ii}$  为  $X_p$  的  $i \times i$  阶顺序主子阵;
- (2) 求  $X_{ii}$  的最小奇异值和左奇异向量  $v$ , 这通常用逆幂法实现;
- (3) 求交换矩阵  $\tilde{P}$  使  $|(\tilde{P}^T v)_i| = \|v\|_\infty$ ;
- (4) 对  $X_{ii}\tilde{P}$  作 QR 分解,  $X_{ii}\tilde{P} = Q\tilde{R}_{ii}$ ;
- (5) 校正  $R, Q, P$  如下:

$$\begin{aligned} R &\leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{R}_{ii} & Q_i^H R_{i2} \\ O_{(N-i) \times i} & R_{22} \end{bmatrix}, \\ Q &\leftarrow Q \begin{bmatrix} Q_1 & O_{i \times (N-i)} \\ O_{(N-i) \times i} & I \end{bmatrix}, \\ P &\leftarrow P \begin{bmatrix} P & O_{i \times (N-i)} \\ O_{(N-i) \times i} & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

最后  $X_p$  通过  $N$  步校正, 可分解为

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $R_{22}$  的模最小, 同时  $R$  的对角元  $r_{ii}$  满足

$$|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \dots \geq |r_{MM}| > |r_{M+1M+1}| \geq \dots \geq |r_{NN}|.$$

因此类似于特征分解, 可通过  $R$  的对角元大小判定信号源数目.  $Q_1, Q_2$  的列向量分别张成信号和噪声子空间. 由此, 类似于特征类方法, 构造谱函数

$$f(\theta, Q_2) = a^H(\theta) Q_2 Q_2^H a(\theta)$$

或

$$f(\theta, Q_1) = a^H(\theta) [I - Q_1 Q_1^H] a(\theta), \quad (1)$$

则有如下结论:

$$f^{(i)}(\theta, Q_2) = 0, \text{ 当 } \theta = \theta_i \text{ 时, } (i = 1, \dots, M).$$

据此可估计出信号来向.

### 3 RRQR 方法的性能分析

由上面结论知,对  $P$  次快拍形成的数据矩阵  $X_p$ ,有正交交换矩阵  $P$ ,使  $X_p P$  的 QR 分解具有如下形式:

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix}.$$

若按(1)式形成谱函数估计信号来向,那么由噪声产生的估计误差如下定理所示.

**定理** 设  $X_p$  有如下分解:

$$X_p P = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix}$$

若记  $\theta_k$  为精确信号来向,  $\tilde{\theta}_k$  为估计来向,  $\Delta\theta_k = \theta_k - \tilde{\theta}_k$ , 那么

$$\text{Var}(\Delta\theta_k) = \alpha_k^H \alpha_k \sigma^2 / (2\gamma_k). \quad (2)$$

这里  $\gamma_k = \alpha^{(w)}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$ ,  $\alpha_k = P R_1^+ Q_1^H \alpha(\theta_k)$ ,  $\sigma^2$  为噪声功率,  $\alpha^{(w)}(\theta)$  为  $\alpha(\theta)$  关于  $\theta$  的导数向量.

**证明** 设由  $P$  次快拍形成的数据矩阵为  $X_p = [x(t_1), \dots, x(t_p)]$ . 无噪声时,由 RRQR 分解知,存在交换矩阵  $P$  使得

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1,$$

其中  $Q_1 \in C^{N \times M}$ ,  $Q_2 \in C^{N \times (N-M)}$ ,  $R_1 \in C^{M \times p}$ , 且  $(X_p P)^H Q_2 = 0$ .

因此谱函数构造如下:  $f(\theta, Q_2) = \|Q_2^H \alpha(\theta)\|_2^2$ , 此时

$$f(\theta_k, Q_2) = 0, (k = 1, \dots, M).$$

当有噪声存在时,数据阵具有如下形式:  $\bar{X}_p = X_p + N$ , 其中  $N$  为噪声矩阵, 其元素的实、虚部为相互独立的高斯随机变量, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2/2$ , 且元素间相互独立.

对  $\bar{X}_p$  使用 RRQR 分解得

$$\bar{X}_p P = \bar{Q} \bar{R} = [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}.$$

由于噪声影响, 此时于  $\theta = \theta_k$  处  $(\bar{X}_p P)^H \alpha(\theta) \neq 0$ , 因此通常信号来向由下式估计:

$$\begin{cases} \min_{\theta} \|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2, \\ \bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I. \end{cases}$$

由于  $\bar{P}, P$  为正交矩阵, 具有二范数不变性, 故

$$\|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|\bar{X}_p^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|P^H \bar{X}_p^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2.$$

若记  $\bar{Q}_2 = Q_2 + \Delta Q_2$ , 并注意到  $\bar{X}_p = X_p + N$ , 则

$$(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2 = (X_p P)^H Q_2 + (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2 + (NP)^H \Delta Q_2.$$

由于  $(X_p P)^H Q_2 = 0$ , 如果忽略高阶误差项, 则有如下近似式:

$$(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2 = (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2$$

由此问题可化为

$$\min_{\bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I} \| (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2 \|_2^2.$$

其最小二乘解为

$$\Delta Q_2 = -[(X_p P)^H]^+ (NP)^H Q_2.$$

由于  $X_p P = Q_1 R_1$ , 故  $[(X_p P)^H]^+ = Q_1 (R_1^+)^H$ . 这里  $R_1^+ = R_1^H (R_1 R_1^H)^{-1}$  (由于一般情况下,  $P > M$ ),  $(R_1^+)^H = (R_1 R_1^H)^{-1} R_1$ , 所以  $\Delta Q_2 = -Q_1 (R_1^+)^H (NP)^H Q_2$ , 并且近似地成立  $\bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I$ .

由于噪声影响, 谱函数为

$$f(\bar{\theta}, \bar{Q}_2) = \|\bar{Q}_2^H \alpha(\bar{\theta})\|^2.$$

设所得  $\bar{\theta}_k$  为  $\bar{\theta}_k = \theta_k + \Delta\theta_k, k = 1, 2, \dots, M$ . 由于  $\bar{\theta}_k$  满足  $\min_{\theta} f(\theta, \bar{Q}_2)$ , 故  $f'_\theta(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2) = 0$ .

考察  $f'_\theta(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2)$  于  $\theta_k$  处 Taylor 展开式:

$$0 = f'_\theta(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2) = f'_\theta(\theta_k, \bar{Q}_2) + \frac{\partial^2 f(\theta_k, \bar{Q}_2)}{\partial \theta^2} (\bar{\theta}_k - \theta_k) + R_n.$$

若定义

$$N(\theta, Q_2) = -\partial f(\theta, Q_2) / \partial \theta = -\alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta) - \alpha^H(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta),$$

$$D(\theta, Q_2) = \alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta) + 2\alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta) + \alpha^H(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta),$$

则  $\Delta\theta_k = N(\theta_k, \bar{Q}_2) / D(\theta_k, \bar{Q}_2)$ . 然而

$$N(\theta_k, \bar{Q}_2) = N(\theta_k, Q_2) + \Delta N, \quad D(\theta_k, \bar{Q}_2) = D(\theta_k, Q_2) + \Delta D,$$

其中  $D(\theta_k, Q_2) = 2\alpha^{(w)H}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$ , 故  $\Delta\theta_k = \Delta N / (D + \Delta D) \approx \Delta N / D$ . 将  $\bar{Q}_2 = Q_2 + \Delta Q_2$  代入  $N(\theta_k, \bar{Q}_2)$ , 经过一系列代数运算得

$$N(\theta_k, \bar{Q}_2) \approx -2\text{Re}[\alpha^H(\theta_k) \Delta Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)].$$

将  $\Delta Q_2 = -Q_1 (R_1^+)^H (NP)^H Q_2$  代入上式, 取方差, 经过一系列化简得

$$\text{Var}(\Delta\theta_k) = \alpha_k^H \alpha_k \lambda^2 / (2\tau_k)$$

其中  $\alpha_k = PR_1^+ Q_1^H \alpha(\theta_k)$ ,  $\tau_k = \alpha^{(w)H}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$ ,  $R_1^+ = R_1^H (R_1 R_1^H)^{-1}$ . 证毕

#### 4 计算机模拟分析

为了验证上述结果的正确性, 我们做了如下模拟分析.

设一均匀直线阵由  $N = 10$  个阵元组成, 空间有两个平面波信号分别沿  $\theta_1 = 10^\circ$ ,

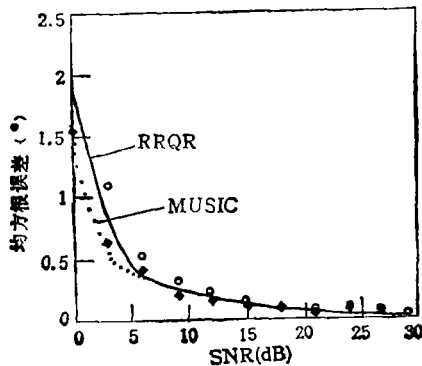


图1 估计均方根误差比较

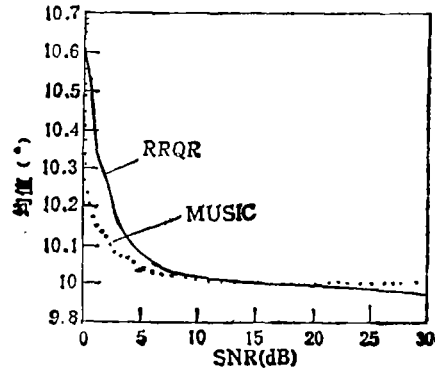


图2 估计均值比较

$\theta_2 = 20^\circ$  被该阵列所接收。为便于编程, 快拍数取为 10, 信噪比定义为  $\text{SNR} = 10 \log(1/\sigma^2)$ , 此处  $\sigma^2$  代表噪声功率。RRQR 方法的理论方差由前述定理(2)式给出, MUSIC 方法的方差分析基于文献[8]。两种方法于  $\theta = 10^\circ$  时随信噪比的理论均方根误差如图 1 所示。(其中  $\circ, \diamond$  分别为两种方法的估计均方根误差。)由图可以看出, RRQR 方法估计方差比 MUSIC 方法的方差大, 而且模拟结果与理论结果十分一致, 由此证明了本文结果的正确性。图 2 为两种方法于  $\theta = 10^\circ$  时的估计均值。

## 5 结束语

本文给出了 RRQR 方法估计源方位角误差的一种非渐近方差估计式。计算机模拟结果证明, 当信噪比较高时, 理论方差与模拟误差十分一致, 但当信噪比较低时, 两者偏差较大。因此低信噪比时如何较好地给出该方法方差分析有待进一步研究。

**致谢** 本文得到导师保铮教授的悉心指教, 特此致谢。

## 参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, AP-34(3):276—280.
- [2] Kumaresan R, *et al.* IEEE Trans. on AES, 1983, AES-19(1):135—139.
- [3] Kaveh M, Barabell A. IEEE Trans. on ASSP, 1986, ASSP-34(2):331—341.
- [4] Roy R H, Kailath T. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(7):984—995.
- [5] Prasad S, Chandna B. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(5):1224—1228.
- [6] 李有明, 保铮. 电子学报, 1994, 22(2): 47—52.
- [7] Chan T F. Linear Algebra Appl. 1987, 88/89(1):67—82
- [8] Li Fu, Vaccaro R J. IEEE Trans. on AES, 1990, AES-26(4):976—985.

## PERFORMANCE ANALYSES OF A HIGH RESOLUTION METHOD BASED ON RRQR DECOMPOSITION

Li Youming

(*Institute of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071*)

**Abstract** A fast high resolution method based on rank-revealing QR decomposition is analysed, and an analytical expression of the variance of the direction of arrival estimation error is presented. Simulation results verify the analysis.

**Key words** Array signal processing, Direction finding, QR decomposition, Performance analysis