

# 半无限大空间中无耗二维电磁目标的微波成像新方法<sup>1</sup>

卿安永 李敬\* 任朗\*

(上海大学通信工程系 上海 201800)

\*(西南交通大学电磁场与微波技术研究所 成都 610031)

**摘要** 本文提出利用模拟得到的时域散射信息对埋于半无限大空间中的无耗二维电磁目标进行微波成像的新方法——时域变分迭代法 (time-domain variational iterative method, TVIM)。这是一种基于电磁体等效原理、变分原理和傅立叶变换的迭代方法, 每次迭代各计算正问题和逆问题一次, 正问题采用时域有限差分 (finite-difference time-domain) 方法处理。列举了一些典型的数值反演实例, 并与有关文献结果作了比较, 考察了 TVIM 的收敛性能、反演复杂目标能力、抗随机噪声等反演性能, 并从理论上简要分析了形成 TVIM 良好反演性能的原因。

**关键词** 微波成像, 半无限大空间, 无耗二维电磁目标

**中图分类号** O441

## 1 引言

电磁逆散射 (微波成像) 是当今电磁学研究中应用性很强的前沿性研究课题<sup>[1-7]</sup>。地下管线等目标的探测即是一个很重要的应用场合, 这一问题的物理模型可视为如图 1 所示的半无限大空间中二维电磁目标的微波成像, 相比自由空间中目标的微波成像而言, 这类问题的求解要困难得多。不久前, 我们提出了一种方法<sup>[8]</sup>, 初步探讨了上述问题。该方法仅能有效处理低对比度、小尺寸的弱散射目标, 且收敛速度太慢, 迭代耗时太多, 在较少的迭代次数内反演精度有限。

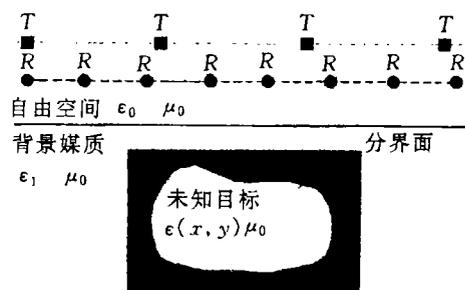


图 1 物理模型

## 2 基本原理

物理模型如图 1 所示, 其中  $R$  表示接收点,  $\epsilon$  和  $\epsilon(x, y)$  分别为背景媒质和未知目标的介电常数,  $T$  表示  $z$  轴方向的时域线电流源, 它激励出满足如下时域标量波动方程的电场  $E_z(\rho, t)$ ,

$$\nabla^2 E_z(\rho, t) - \mu_0 \epsilon(\rho) \partial^2 E_z(\rho, t) / \partial t^2 = \mu_0 \partial J_z(\rho, t) / \partial t. \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1997-03-03 收到, 1998-05-25 定稿  
国家自然科学基金资助项目

由体等效原理并利用  $E_z = E^{\text{scat}} + E^{\text{inc}}$  可得如下积分方程组

$$\begin{aligned} E_z(\rho^o, t) - \epsilon_0 \int_{t'} \iint_S g_1(\rho^o, \rho', t, t') \alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_z(\rho', \rho^t, t') d\rho' dt' \\ = E_z^{\text{inc}}(\rho^o, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$E_z^{\text{scat}}(\rho^r, t) = \epsilon_0 \int_{t'} \iint_S g_2(\rho^r, \rho', t, t') \alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_z(\rho', \rho^t, t') d\rho' dt', \quad (3)$$

其中  $\rho^r$  与  $\rho^o$  分别为位于自由空间中和未知目标内的场点,  $\rho^t(x_t, y_t)$  为激励源位置,  $\alpha(\rho) = [\epsilon(\rho) - \epsilon_1]/\epsilon_0$  为对比度函数,  $g_1(\rho^r, \rho, t, t')$  和  $g_2(\rho^o, \rho, t, t')$  为时域标量格林函数。对 (2) 式和 (3) 式求关于  $\alpha(\rho)$  的变分, 有

$$\begin{aligned} 0 = \delta E_z(\rho^o, t) - \epsilon_0 \int_{t'} \iint_S g_1(\rho^o, \rho', t, t') \left[ \delta\alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_z(\rho', \rho^t, t') \right. \\ \left. + \alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \delta E_z(\rho', \rho^t, t') \right] d\rho' dt', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta E_z^{\text{scat}}(\rho^r, t) = \epsilon_0 \int_{t'} \iint_S g_2(\rho^r, \rho', t, t') \left[ \delta\alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_z(\rho', \rho^t, t') \right. \\ \left. + \alpha(\rho') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \delta E_z(\rho', \rho^t, t') \right] d\rho' dt'. \end{aligned} \quad (5)$$

对 (4) 式和 (5) 式作傅立叶变换, 得

$$\begin{aligned} 0 = \delta \tilde{E}_z(\rho^o, \omega) + \omega^2 \epsilon_0 \iint_S G_1(\rho^o, \rho', \omega) \\ \times [\delta\alpha(\rho') \tilde{E}_z(\rho', \rho^t, \omega) + \alpha(\rho') \delta \tilde{E}_z(\rho', \rho^t, \omega)] d\rho', \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{E}_z^{\text{scat}}(\rho^r, \omega) = -\omega^2 \epsilon_0 \iint_S G_2(\rho^r, \rho', \omega) \\ \times [\delta\alpha(\rho') \tilde{E}_z(\rho', \rho^t, \omega) + \alpha(\rho') \delta \tilde{E}_z(\rho', \rho^t, \omega)] d\rho', \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $G_1(\rho, \rho', \omega)$  和  $G_2(\rho, \rho', \omega)$  为频域格林函数, 它们可由平面波展开法<sup>[8]</sup> 推得。

令  $\alpha(\rho) = \sum_{n=1}^N \alpha_n P_n(\rho)$ , 其中  $P_n(\rho)$  为脉冲函数, 采用点匹配法, 则

$$\begin{aligned} \delta \tilde{E}_z(\rho_m^o, \omega) + \omega^2 \epsilon_0 \sum_{n=1}^N [\delta\alpha_n \tilde{E}_z(\rho_n, \rho^t, \omega) + \alpha_n \delta \tilde{E}_z(\rho_n, \rho^t, \omega)] \\ \times \iint_{S_n} G_1(\rho_m^o, \rho', \omega) d\rho' = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{E}_z^{\text{scat}}(\rho_m^r, \omega) = -\omega^2 \epsilon_0 \sum_{n=1}^N [\delta\alpha_n \tilde{E}_z(\rho_n, \rho^t, \omega) + \alpha_n \delta \tilde{E}_z(\rho_n, \rho^t, \omega)] \\ \times \iint_{S_n} G_2(\rho_m^r, \rho', \omega) d\rho'. \end{aligned} \quad (9)$$

将 (8) 式和 (9) 式改写为矩阵方程形式为

$$\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{E}}_z = 0, \quad (10)$$

$$\delta \tilde{\mathbf{E}}_z^{\text{scat}} = \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\alpha} + \overline{\mathbf{D}} \cdot \delta \mathbf{E}_z, \quad (11)$$

其中  $I$  为单位阵。

消去 (10) 式和 (11) 式中含  $\delta\tilde{E}_z$  的项可得

$$\delta\tilde{E}_z^{\text{scan}} = \{C - D(I + B)^{-1}A\}\delta\alpha \triangleq M\delta\alpha, \quad (12)$$

(12) 式即为 TVIM 的反演方程。其解为

$$\delta\alpha = [\text{Re}(M^+ \cdot M)]^{-1}[\text{Re}(M^+ \cdot \delta\tilde{E}_z^{\text{scan}})], \quad (13)$$

其中上标 + 表示矩阵共轭转置, Re 表示取实部

### 3 数值结果

定义如下反映每次迭代后测量得到的散射场与经迭代得到的散射场之间相对误差的函数  $F(\alpha)$ , 用以控制反演进程, 当  $\sqrt{F_n} \leq 3 \times 10^{-4}$  时终止迭代。

$$F_n(\alpha) = \frac{\|E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} - E_{z,n}^{\text{scat}}\|^2}{\|E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}\|^2}, \quad (14)$$

其中  $E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}$  和  $E_{z,n}^{\text{scat}}$  为列向量, 分别储存测量或经  $n$  次迭代后得到的时域散射场, 范数

$$\|E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}\|^2 = \langle E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \ E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \rangle = (E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}})^T E_{z,\text{meas}}^{\text{scat}},$$

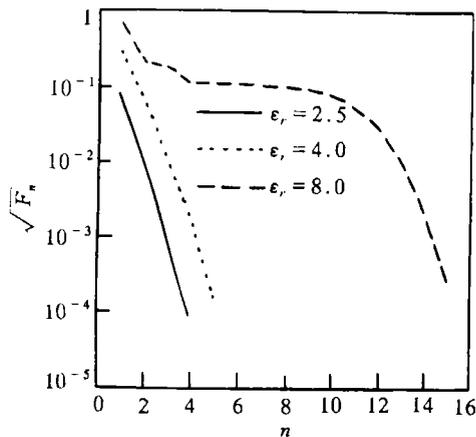


图 2 收敛性能

$\epsilon_1 = 2.0\epsilon_0$ 。迭代初值有三种选取方法, 第一种和第二种方法分别将初值选为  $\epsilon_0$  或  $\epsilon_1$ , 而第三种方法则是根据一些先验知识确定迭代初值, 本文采用第一种方法选取迭代初值。

首先考察收敛性能, 反演相对介电常数为 2.5、4.0 和 8.0 的三个点目标, 经 4、5 和 15 次迭代后得到反演结果为 2.5000、4.0000 和 8.0001, 在 IBM 350-P75 上每次迭代耗时 108s。相对误差值  $\sqrt{F_n}$  随迭代次数  $n$  的变化趋势如图 2 所示。显然, TVIM 迭代稳定, 收敛迅速, 反演结果准确。

下面看看 TVIM 反演任意复杂目标的能力。我们反演了高对比度方柱、多柱、洞及大尺寸柱等典型目标, 经有限次迭代后均准确得到了符合精度要求的真实分布。图 3 所示多柱系, 其内部介电参数分布很不均匀, 且存在较强的多次散射效应, 对它的反演很有代表性。

下面考察 TVIM 的抗噪声性能。选择相对介电常数为 2.5 的方柱作为未知目标, 在模拟得到的测量散射场数据中分别引入 0.1%、0.5%、1%、2%、5%、10%、20%、50% 和 100% 的伪随机噪声干扰, 反演结果和表 1 所示有关数据表明, TVIM 在此种情况下至少可承受 20% 的随机噪声干扰。

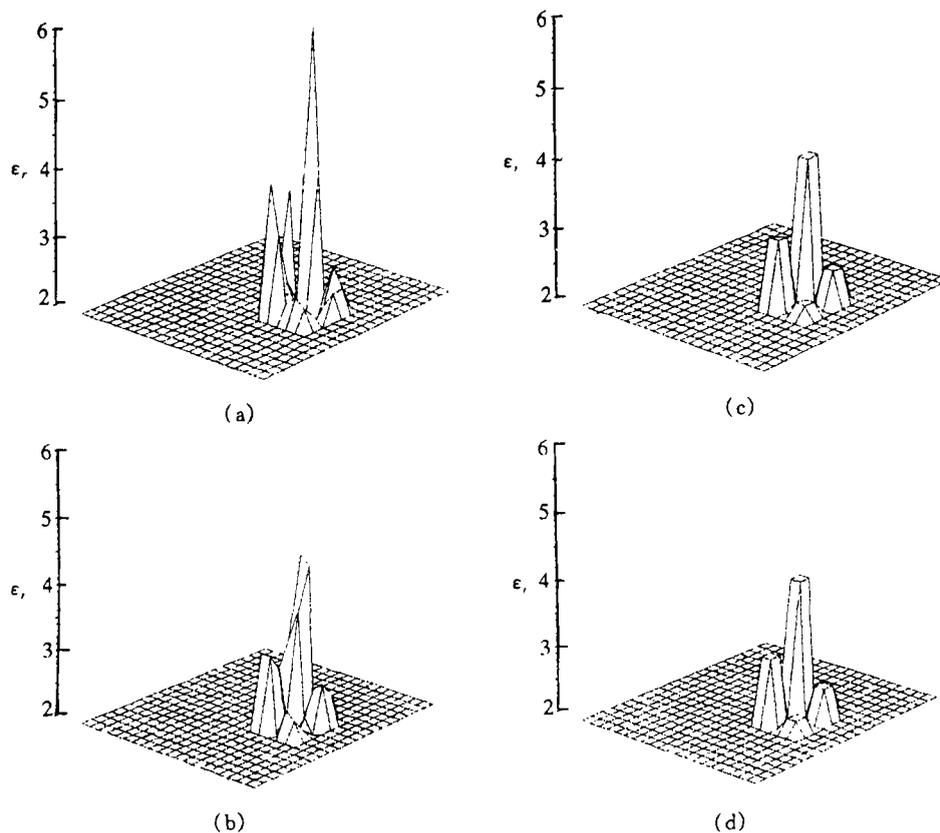


图3 多柱 (a)-(d) 为第 1、3、5、7 次迭代结果

为了更明确地表明 TVIM 的良好反演性能, 我们将 TVIM 与文献 [8] 中所述方法作一简单的比较。选择未知目标为相对介电常数为 2.5 的点目标和方柱, 文献 [8] 所述方法经 3 或 6 次迭代后  $\sqrt{F_n}$  降至小于  $3 \times 10^{-2}$ , TVIM 经 4 或 5 次迭代后  $\sqrt{F_n}$  降至远小于  $5 \times 10^{-4}$ , 详细的比较结果如图 4 和表 2 所示。

值得指出的是, 文献 [8] 所述方法不能反演高对比度方柱和大尺寸柱两个强散射目标, 当背景媒质的相对介电常数不小于 2.0 时, 洞也很难反演。

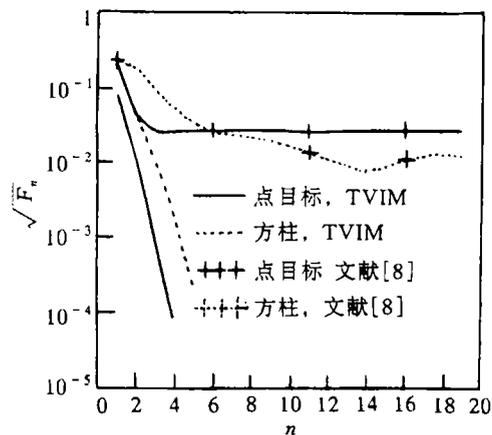


图4 TVIM 与文献 [8] 所述方法的收敛性能比较

表 1 抗随机噪声性能

噪声幅度 (%)	0.1	0.5	1	2	5	10	20	50	100
$(\sqrt{F_n}(\times 10^{-2}))$	0.028	0.083	0.166	0.333	0.837	1.675	3.168	5.555	10.60

表 2 TVIM 与文献 [8] 所述方法的比较

	目标 1		目标 2	
	文献 [8]	TVIM	文献 [8]	TVIM
迭代次数	3	4	6	5
最小 $(\sqrt{F_n}(\times 10^{-2}))$	2.5268	$\leq 7.466 \times 10^{-3}$	0.7720	$\leq 2.149 \times 10^{-2}$
反演结果	2.4652	2.5000	-	-
每次迭代耗时 (s)	74	108	74	108

目标 1: 相对介电常数为 2.5 的点目标 目标 2: 相对介电常数为 2.5 的方柱

## 4 分 析

由帕斯瓦耳定理可知有如下关系成立:

$$F_n(\alpha) = \frac{\| \mathbf{E}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} - \mathbf{E}_{z,n}^{\text{scat}} \|^2}{\| \mathbf{E}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \|^2} = \frac{\| \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} - \tilde{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}} \|^2}{\| \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \|^2}, \quad (15)$$

其中  $\tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}$  和  $\tilde{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}}$  为  $\overline{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}$  和  $\overline{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}}$  的傅立叶变换。

$$\| \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \|^2 = \langle \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \rangle = \left( \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \right)^+ \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}}.$$

求  $F_n(\alpha)$  的梯度, 有

$$\mathbf{g}_n = \nabla F_n(\alpha) = 2\text{Re} \left\{ \left[ \nabla \left( \tilde{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}} \right)^+ \right] \tilde{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}} - \left[ \nabla \left( \tilde{\mathbf{E}}_{z,n}^{\text{scat}} \right)^+ \right] \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \right\} / \left\| \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \right\|^2. \quad (16)$$

在本文第 2 节我们曾导出  $\delta \tilde{\mathbf{E}}_z^{\text{scat}} = \mathbf{M} \delta \alpha$ , 即

$$\nabla \tilde{\mathbf{E}}_z^{\text{scat}} = \mathbf{M}. \quad (17)$$

将 (17) 式代入 (16) 式可得

$$\mathbf{g}_n = -2\text{Re} \left\{ (\overline{\mathbf{M}})^+ \delta \tilde{\mathbf{E}}_z^{\text{scat}} \right\} / \left\| \tilde{\mathbf{E}}_{z,\text{meas}}^{\text{scat}} \right\|^2. \quad (18)$$

$\mathbf{P}_n = -\mathbf{g}_n$  为  $F_n(\alpha)$  的最速下降方向, 由 (13) 和 (18) 式可见  $\delta \alpha$  为  $\mathbf{P}_n$  的线性组合, 这意味着迭代沿  $F_n(\alpha)$  的最速下降方向进行, 这是 TVIM 能迅速收敛的主要原因。

(12) 式表明 TVIM 本质上是一种非线性方法, 其反演方程反映的是散射场微小变化与目标介电参数微小变化之间的近似线性关系, 即散射场与目标介电参数之间的非线性关系, 数学模型与问题的物理实质更加接近, 因而 TVIM 的反演结果更准确。而且, 随着迭代的进行, 反演方程的非线性度迅速降低, 迭代收敛更加迅速, 从而使 TVIM 突破了原有方法在目标尺寸和对对比度上的苛刻限制。

第三个原因是更有效地利用了迭代得到的目标内部总电场分布。由关系  $E^i + E^s = E^t$  导出 (2) 式这一约束方程, 与 (3) 式一起, 对解所处空间作了更严格的限制, 大大缩小了解空间, 既加速了迭代搜索速度, 又提高了迭代收敛的稳定性, 弱化了对散射场测量的要求。

## 5 结 论

本文提出了分层媒质中二维无耗电磁目标微波成像的 TVIM 法, 通过数值结果和比较证明了它收敛稳定、迅速, 反演结果准确, 适应复杂目标的能力强, 抗强随机噪声干扰。

## 参 考 文 献

- [1] Wang Y M, Chew W C. An iterative solution of the two-dimensional electromagnetic inverse scattering problem. *Int. J. Imag. Syst. Technol.*, 1989, 1(1): 100-108.
- [2] Kleinman R E, Van den Berg P M. Nonlinearized approach to profile inversion. *Int. J. Imag. Syst. Technol.*, 1990, 2(1): 119-126.
- [3] Moghaddam M, Chew W C. Study of some practical issues in inversion with the Born iterative method using time-domain data. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1993, AP-41(2): 177-184.
- [4] Lin H T, Kiang Y W. Microwave imaging for a dielectric cylinder. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1994, MTT-42(8): 1572-1579.
- [5] 卿安永, 李 敬, 任 朗. 一种探测二维电磁目标的新方法. *通信学报*, 1997, 18(6): 19-24.
- [6] 卿安永, 李 敬, 任 朗. 自由空间中理想介质柱的微波成像. *电子学报*, 1997, 25(12): 25-29.
- [7] 卿安永. 电磁散射与逆散射: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 1997.
- [8] Qing A Y, Jen L. Microwave imaging of dielectric cylinder in layered media. *J. Electromag. Waves Appl.*, 1997, 11(2): 259-269.

## A NOVEL METHOD FOR MICROWAVE IMAGING OF TWO-DIMENSIONAL LOSSLESS ELECTROMAGNETIC TARGET IN HALF SPACE

Qing Anyong    Li Jing\*    Ren Lang\*

(*Department of Communication Engineering, Shanghai University, Shanghai 201800*)

\*(*Inst. of EM Theory and Microwave Technol., Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031*)

**Abstract** A novel method, time-domain variational iterative method(TVIM), for microwave imaging of two-dimensional lossless electromagnetic target buried in half space using time-domain scattering data is presented in this paper. It is an iterative method derived using volume equivalence principle, variation principle and Fourier transform. The direct problem is solved by finite-difference time-domain(FDTD) method and the inverse problem is solved iteratively. Some typical results are given to show its performance, such as converging property, ability to invert arbitrary targets, tolerance of random noise, etc. Comparison with the former methods is also done. Those factors which make TVIM performs better are also investigated.

**Key words** Microwave imaging, Half space, Two-dimensional lossless electromagnetic target

卿安永: 男, 1972 年生, 讲师, 博士后, 目前主要从事电磁成像的理论与技术、电磁理论、小波变换在电磁理论中的应用等方面的研究。

李 敬: 男, 博士, 副教授, 主要从事电磁探测、电磁散射等领域的研究。

任 朗: 男, 1913 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事天线和电磁场理论的研究。