

## Thompson-FDTD 方法中的两步法<sup>1</sup>

廖 成 任 朗

(西南交通大学电磁所 成都 610031)

**摘 要** 本文将流体力学领域的微分-Thompson 变换与时域有限差分 (FDTD) 技术结合起来, 所形成的 Thompson-FDTD 方法, 首次用来计算和分析任意形状介质体的电磁散射特性。该方法至少具有两个明显的优点: 可以把不规则形体变换成规则形体, 有利于精确匹配边界条件; 可以任意调配网格分布, 有利于提高计算精度。其数值实现进一步证实了该方法能精确模拟任意形状介质目标的电磁散射过程。

**关键词** Thompson 变换, 时域有限差分, 任意形状介质, 电磁散射

**中图分类号** O441, O241

### 1 引 言

基本的直角坐标 FDTD 算法最先由 Yee<sup>[1]</sup> 提出, 其后经过许多研究者的发展和完善。为了求解具有不规则边界物体的散射问题, 许多学者利用非正交 FDTD 算法<sup>[2]</sup>, 叠加网格<sup>[3]</sup> 或亚网格<sup>[4]</sup> 技术等来求解麦克斯韦方程组, 都获得了较常规 FDTD 更满意的结果。从另一个角度出发, 作者将流体力学领域的微分-Thompson 变换<sup>[5]</sup> 引入到电磁学领域, 形成 Thompson-FDTD 方法<sup>[6]</sup>。该方法不但可以精确模拟不规则散射体的几何边界<sup>[7,8]</sup>, 而且本文将根据散射体具体形状合理调配空间网格密度分布, 来解决介质结构的电磁散射问题。本文将二维情形为例首先介绍如何利用两步 Thompson 变换方法分别把介质本身和其计算域变换成规则区域; 然后在变换后的两个规则区域实现 FDTD 计算和边界条件匹配, 将此计算结果根据变换的一一对应关系即可直接得出物理域内的场解。本文将模拟两种典型不规则介质的电磁散射问题, 并将其结果与矩量法所得结果相比较, 以证明 Thompson-FDTD 方法处理介质结构的有效性。

### 2 介质体的 Thompson 变换

此处, 为叙述简单明了起见, 设我们所考察的散射问题为: 电参数为  $\epsilon_2 \mu_2 \sigma_2$  的轴心与  $z$  轴重合的无限长圆介质柱置于电参数为  $\epsilon_1 \mu_1 \sigma_1$  的无限空间内, 单位强度的 TM 正弦平面波从负  $x$  轴方向入射, 其具体几何关系如图 1 所示。图中  $S_1$  为介质柱边界,  $S_2$  为圆形辐射边界。

另外, 本文将采用符号  $f_x, f_\xi, f_{\xi\eta}, \dots$ , 分别表示  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}, \dots$ , 而  $E_z, H_x, H_y$  仅表示场分量, 不代表任何求导的含义。

<sup>1</sup> 1996-09-25 收到, 1997-09-23 定稿  
国家自然科学基金资助课题 (69572034)

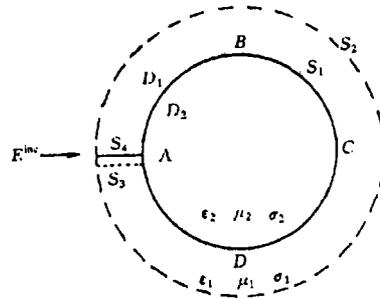


图 1 圆介质柱的散射问题

第一步, 从流体力学领域的成果可以得知, 利用两个泊松方程 (1) 式及其相应的狄里赫莱边界条件作微分变换, 即可将  $X$ - $Y$  物理平面上不规则区域 (图 2(a),  $D_1$  域) 变成计算平面上的矩形区域 (图 2(b),  $D_1^*$  域), 注意其网格坐标间隔已被归一化 ( $\Delta\xi = \Delta\eta$ ). 该变换还确保两个平面的一一对应关系 [5].

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \xi &= \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta), \\ \nabla^2 \eta &= \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

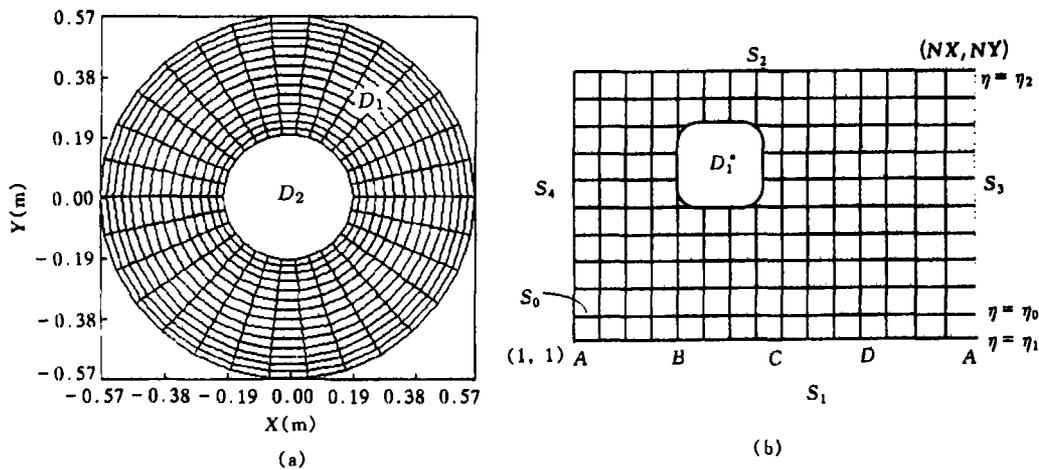


图 2 外区  $D_1$  的变换  
(a) 物理平面 (b) 变换平面

上式中的  $P, Q$  称为控制函数, 它们被用来控制物理平面上节点的网格密度分布. 恰当控制物理平面上节点的网格密度对优化算法, 提高计算精度和计算效率——比如描述局部细微结构和减少内存需求——具有很重要的作用, 这就要求合理的选择控制函数. 在 Thompson 规范下控制函数为

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{N_i} a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp(-d_i |\xi - \xi_i|), \\ Q &= \sum_{j=1}^{N_j} b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) \exp(-d_j |\eta - \eta_j|). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $\operatorname{sgn}$  为符号函数,  $a$ 、 $b$  是幅值,  $d$  为衰减指数,  $d$  恒为正,  $a_i(b_j)$  的正负控制了  $\xi_i(\eta_j)$  附近网格的疏密。

本文通过合理地选择控制函数  $P$ 、 $Q$ , 即在场强变化相对剧烈的散射体边界和对计算极为敏感的辐射边界附近采用较密的网格, 而在其它区域采用较粗的网格, 称之为梭形变换, 如图 2(a) 所示。这样既不增加计算机容量, 又提高了计算精度。

第二步, 利用与区域  $D_1^*$  同样的变换方法, 可以实现从区域  $D_2$  到  $D_2^*$  域的变换, 如图 3 所示。把变换分成两步是为了在  $D_1^*$  区域, 吸收边界和散射体边界都蜕化成直线段 ( $S_1$  和  $S_2$ ), 便于边界条件的准确处理, 并且在该区域可以只进行散射场计算 (除紧邻  $S_1$  边界的格点外); 在  $D_2^*$  区域, 散射体被变换成规则形状, 也是为了准确处理边界条件。

介质柱体边界上的点 (如图 1 的  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ) 在两个区域  $D_1^*$  和  $D_2^*$  的对应关系有如图 2(b) 和图 3(b) 所示的点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的对应关系, 它们转动方向的不同是为了要保证内外区的坐标  $\xi, \eta, z$  之间构成右手关系所致。

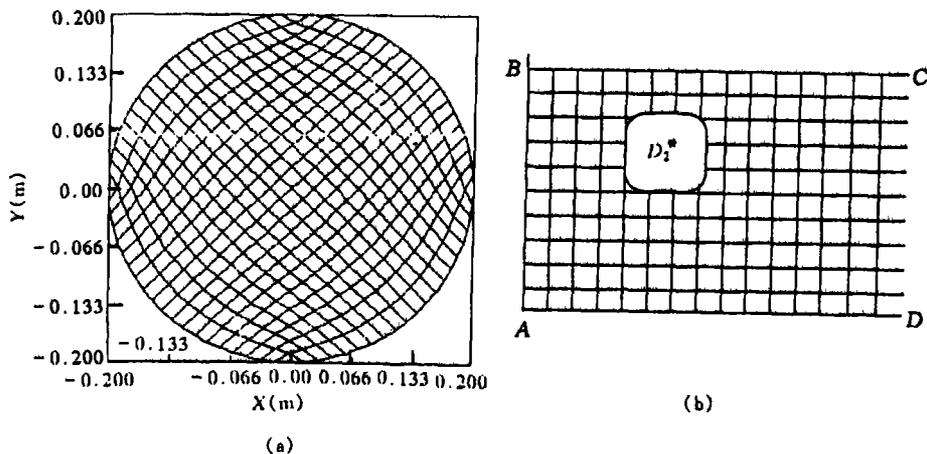


图 3 内区  $D_2$  的 Thompson 变换

(a) 物理平面 (b) 变换平面

### 3 两步 Thompson-FDTD 算法实现

为保证  $\xi\eta$  在计算平面上提出的定解问题与  $X$ - $Y$  物理平面的原问题完全等价, 此处对麦克斯韦方程和辐射边界条件也进行相应的变换。由变换方程 (1) 所隐含的坐标关系可以将  $X$ - $Y$  物理平面上的麦克斯韦方程组 (例如 TM 波、 $\sigma = 0$  情况) 和截断边界条件 (例如

Bayliss-Turkel 一阶辐射边界条件<sup>[9]</sup> 转换  $\xi\eta$  到计算平面上, 具体过程可参考<sup>[6]</sup>, 变换结果如 (3) 式和 (4) 式所示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu J} \left( x_\eta \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial E_z}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu J} \left( y_\eta \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial E_z}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon J} \left[ \left( y_\eta \frac{\partial H_y}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right) - \left( x_\eta \frac{\partial H_x}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_z}{c \partial t} + \frac{1}{J} \left[ \cos \theta \left( y_\eta \frac{\partial E_z}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial E_z}{\partial \eta} \right) + \sin \theta \left( x_\xi \frac{\partial E_z}{\partial \eta} - x_\xi \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{E_z}{R(\xi, \eta)} = 0, \quad (4)$$

其中

$$R(\xi, \eta) = \sqrt{x^2(\xi, \eta) + y^2(\xi, \eta)}. \quad (5)$$

为把微分方程组 (3) 式离散成差分格式, 对时间变量, 采用中心差分, 把时间步进分成两步, 在  $n + 1/2$  时刻计算磁场分量, 在  $n + 1$  时刻由  $n + 1/2$  时的磁场值来计算电场分量. 对空间变量, 为适合边界条件的给法, 把磁场格点向  $\eta$  正向移动半个格点, 其格点分布如图 4 所示. 然后利用中心差分和平均法进行离散, 以保证差分格式具有二阶精度, 于是可得到变换域的差分方程组<sup>[8]</sup>.

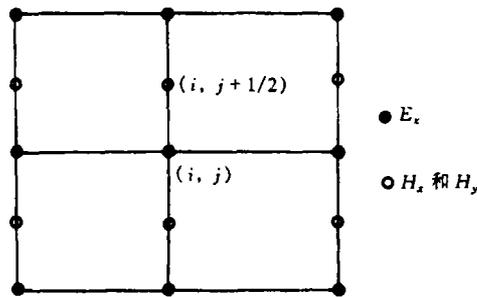


图 4 网格中的场点分布

由于在介质边界上只能给出总场的边界条件, 而在辐射边界是给出散射场的边界条件, 这时的 FDTD 计算就不能像计算导体目标<sup>[6,7]</sup> 那样, 简单地以散射场作全域变量, 而必须划分总场区和散射场区. 其分界线为图 2 中的  $S_0$ , 原则上它可以取在  $S_1$  与  $S_2$  之间的任意位置和任意形状. 为方便计算, 它几乎总是先在  $(\xi, \eta)$  平面被给定, 取为等  $\eta$  线 ( $\eta = \eta_0$ ), 并紧邻散射体边界  $S_1$  线, 再利用变换关系给出其  $(X-Y)$  平面的周线  $S_0$  的坐标, 于是,  $S_0$  线上的入射场就是给定的, 即

$$E_{z\text{total}}^n(\eta_0) = E_{z\text{sca}}^n(\eta_0) E_{z\text{inc}}^n(\eta_0). \quad (6)$$

而在散射体边界 (即图 2(b) 中的  $\eta_1$  线和图 3(b) 中的边界线  $ABCD$ ) 上, 电场的切向分量是连续的, 即

$$E_{z1}^n(\eta_1) = E_{z2}^n(\eta_{ABCD A}). \quad (7)$$

这样, 边界条件分别用 (6) 式在  $S_0$  线上匹配入射波的注入和散射波的转换, 形成内外区的连接条件; 以 (4) 式在  $S_2$  线上匹配辐射边界条件; 以 (7) 式在  $S_1$  线上匹配散射体边界条件, 在具体计算中代入区域  $D_1$  和区域  $D_2$  在  $S_1$  线上的点的对应关系.

对介质体散射问题的 FDTD 计算将在每个时间层上在内外区域 ( $D_1^*$  和  $D_2^*$ ) 都按照差分方程组进行迭代, 然后利用  $n$  时刻的电场求出  $n+1/2$  时刻的磁场, 再用  $n+1/2$  时刻的磁场求出下一时刻 ( $n+1$  时刻) 的电场, 最后得出变换域全空间各时刻的场分布. 利用变换的一一对应关系, 不用逆变换就可直接得出物理域的场分布. 远区散射场可由等效源或电流积分法求出.

#### 4 数值结果

图 5 给出了频率为 0.48GHz 的 TM 正弦平面波入射、半径  $a=0.1\text{m}$ , 电参数为:  $\epsilon_2 = 4\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ ,  $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$  的圆介质柱的 RCS 相对值与矩量法 (MM) 计算结果的比较, 从图中发现它们吻合得很好.

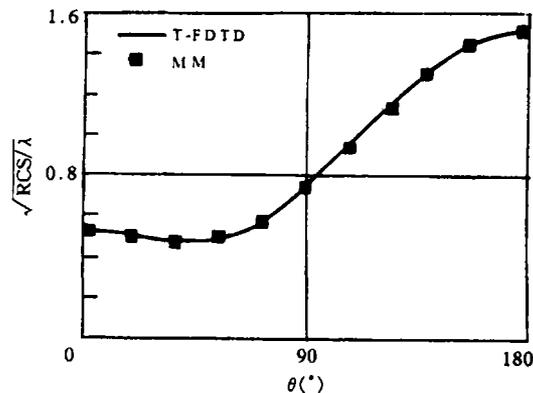


图 5 介质柱的相对 RCS

作为另一个例子, 下面讨论如图 6(a) 所示的半个环柱的散射情况. 取外半径为 0.2m, 内半径 1/6m, 设环上 (介质区) 的介电常数  $\epsilon = 4\epsilon_0$ , 磁导率  $\mu = \mu_0$ , 外空间为自由空间, TM 正弦平面波从凹面正入射, 频率为 0.45GHz; 其外区 Thompson 变换图样对应物理平面上如图 6(b) 所示; 内区的 Thompson 变换图样对应物理平面上如图 7 所示; 外区网格数周向  $NX=81$ , 径向  $NY=40$ ; 内区分别取 33 和 9, 周向最小格点间距约为  $\lambda/80$ . 图 8 给出了其相对 RCS 结果与 MM 的对比, 这两种数值方法所得结果是基本一致的.

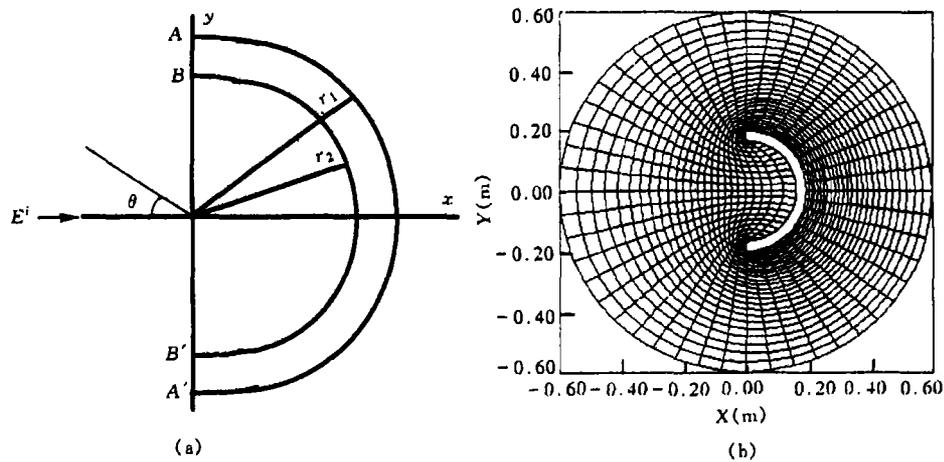


图 6 半环柱的几何关系和外区的 Thompson 变换图  
(a) 半环柱的几何关系 (b) 半环柱外区的 Thompson 变换图

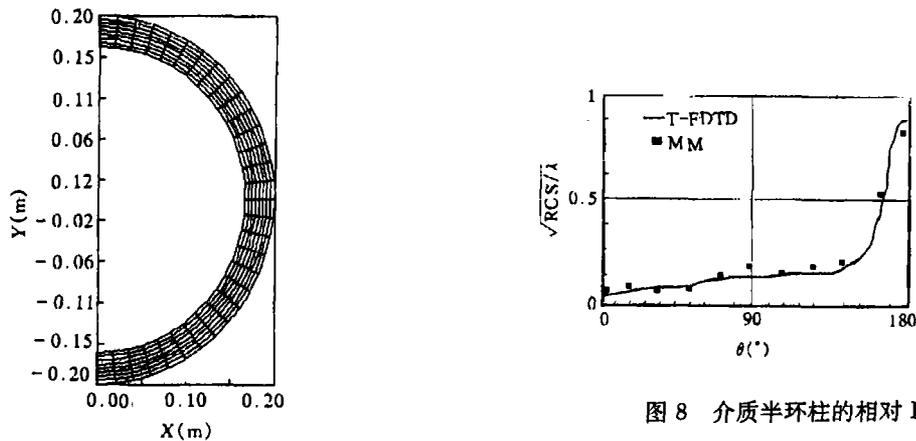


图 7 半环柱内区的 Thompson 变换

利用 Thompson-FDTD 方法对以上两种柱体的数值模拟结果与经典数值方法矩量法的计算结果是相吻合的, 这说明 Thompson-FDTD 方法可以模拟任意形状物体的电磁散射问题.

## 5 结 语

本文以二维情形为例, 详尽研究了 Thompson-FDTD 方法在处理介质结构电磁散射问题中的应用. 该方法可以较精确地模拟不规则散射体的几何边界, 合理调配全空间网格密度分布, 从而进一步提高了数值计算的精度. 关于三维问题的实施则正在研究中, 在机理上它与二维问题是一致的.

致谢: 感谢林为干院士的热情支持和有益讨论.

## 参 考 文 献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans.on AP*, 1966, AP-14(3): 302-307.
- [2] Fusco M. FDTD algorithm in curvilinear coordinates. *IEEE Trans.on AP*, 1990, AP-38(1): 76-89.
- [3] Chen J S, Yee K S, *et al.* Conformal FD-TD with overlap grids, *IEEE Trans. on AP*, 1992, AP-40(9): 1068-1075.
- [4] Zivanovic S S, Yee K S, Mei K K. A subgridding method for the finite difference-time domain method to solve Maxwell's equations. *IEEE Trans.on MTT*, 1991, MTT-39(3): 471-479.
- [5] Thames F C, Thompson J F, *et al.* Numerical solution for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinates system. *J. Comp.Phys.*, 1977, 24: 245-273.
- [6] Liao C, Zhao Y, Lin W. New method for numerical solution of Maxwell's equations. *Electron. Lett.* 1995, 31(4): 261-262.
- [7] 廖成, 任朗. Thompson 变换 -FDTD 方法模拟不规则形体的电磁散射问题. *西南交通大学学报*, 1996, 31(3): 318-322.
- [8] Liao C, Jen L. Numerical solution for EM scattering about arbitrary two-dimensional bodies with the use of the Thompson-FDTD method. *Microwave and Opt. Tech. Lett.*, 1996, 13(4): 233-236.
- [9] Bayliss A, Turkel E. Radiation boundary condition for wave-like equations. *Commun. Pure & Appl. Math.*, 1980, 33: 707-725.

## TWO-STEP'S THOMPSON-FDTD METHOD

Liao Cheng    Ren Lang

*(Electromagnetic Institute, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)*

**Abstract** This paper combines the differential-Thompson transformation involved in hydrodynamics with the finite difference time domain (FDTD) technique to form Thompson-FDTD method. This method is applied for the first time to calculate the electromagnetic scattering properties of arbitrarily shaped dielectric objects. This method has at least two obvious advantages: it can transform arbitrary shaped bodies into regular structures and thus the boundary conditions are matched accurately; it can wilfully dispose the grid distribution and thus better numerical accuracy is achieved. The numerical simulation further confirms its validity.

**Key words** Thompson transformation, FDTD, Arbitrarily shaped dielectric object, Electromagnetic scattering

廖 成: 男, 1964 年生, 博士后, 研究方向为计算电磁学、天线和微波技术, 在国内外学术期刊上发表科研论文十余篇。

任 朗: 男, 1913 年生, 教授, 美国电磁科学院院士、南京科技大学名誉教授等荣誉, 其研究方向为天线理论和应用、电波传播和微波技术, 迄今已在国内外学术刊物上发表科研论文百余篇。