

波在暖电离层中的传播和耦合*

王贞松

(中国科学院电子学研究所)

提 要

本文研究了波在暖电离层中的传播。文中导出了用折射率 n 表示的波的色散关系，并由此推导出分层暖电离层中 q 的方程。所有这些方程都被用于用射线方法研究波在暖电离层中的传播，模式联接和波的线性耦合。

本文还讨论了波方程的奇点、等离子体波与电磁波的耦合。在波耦合区中，波的场可以通过求解波方程在奇点附近的解而求得。文中比较了用射线方法和全波方程研究波耦合时电波传播的结果。

本文所得结果对研究用无线电波加热电离层实验中的吸收区域是有用的。

一、引 言

以前研究波在电离层中的传播时，常常把电离层看作是冷等离子体，但在地球四周电离层中的电子温度约为 10^3K ，不能看作是冷等离子体。因此，在无线电波加热电离层的实验中，需要了解无线电波是怎样在暖电离层中传播，又是怎样转化为等离子体波，然后被电离层吸收的。

关于研究波在暖等离子体中传播的最透彻的理论是动力论^[1,2]。但是这一理论很烦琐。所以我们用电磁流体力学理论来研究它。这一理论较前者简单，但是它对有些动力学效应，如无碰撞朗道阻尼等是不能反映的。虽然如此，它仍是研究波在暖等离子体中传播的好理论。

本文讨论了波在均匀暖等离子体中的传播，用描述 q 的方程研究了分层暖电离层中电磁波与等离子体波之间的耦合。最后我们运用波动方程的奇点，讨论了波的耦合过程。对不均匀暖等离子体中波的线性耦合的理论基础作了解释。

文中尽量运用国际无线电组织 (URSI) 推荐的符号。如无必要，不另作说明。

二、波在均匀暖等离子体中的传播

1. 色散关系 叶 (Yeh) 等人^[3]导出了多种正负离子的暖等离子体的介电张量的一般形式，但未作详尽的讨论。文献 [3] 对暖等离子体中的低频波作了研究。在文献 [4]

* 1984年6月11日收到，1985年7月29日修改定稿。

中已经用电磁流体力学方法导出了用波的折射率 n 表达的由电子和质子组成的暖等离子体中的色散方程。文献[5]也导出了暖等离子体中的色散关系,但表达与本文不相同。这里对色散关系的导出过程作一简述。在运动方程中,我们把温度效应考虑为一个压力项。

$$\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + \nu_e \mathbf{V}_e = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e} - \frac{e}{m} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 - \frac{\gamma_e k T_e}{N_e m_e} \nabla N_e, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \nu_i \mathbf{V}_i = \frac{e\mathbf{E}}{m_i} + \frac{e}{m_i} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_0 - \frac{\gamma_i k T_i}{N_i m_i} \nabla N_i. \quad (2)$$

这里我们把波动方程考虑为绝热过程。由连续性方程

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot (N_i \mathbf{V}_i) = 0. \quad (4)$$

由麦克斯韦方程,我们有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + e(N_i \mathbf{V}_i - N_e \mathbf{V}_e). \quad (6)$$

把上述方程线性化,便得到下列行列式表示的由电子和质子组成的暖等离子体中波的色散关系^[4]:

$$|D_{ij}| = an^8 + bn^6 + cn^4 + dn^2 + g = 0 \quad (7)$$

式中 n 是折射率; D_{ij} 、 a 、 b 和 g 的表达式见附录 1。如果暖等离子体中没有碰撞,附录 1 的各式中所有的 U 都须改为 1。在只有电子是热的等离子体中色散关系变为 n 的六次方程。

$$a'n^6 + b'n^4 + c'n^2 + d' = 0 \quad (8)$$

式中 a' 、 b' 、 c' 和 d' 的表达式见附录 2。显然,在电子和离子都是冷的等离子体中,方程(8)变为 A-H 方程。

2. 波的传播特性 当电子和离子的温度都不高时,可以考虑方程(7)的数值很大的近似解,即考虑下述二次方程

$$an^2 + b = 0 \quad (9)$$

的解。

$$n_e^2 = \frac{1}{Q_e} \left(\frac{1 - Y_e^2}{1 - Y_e^2 \cos^2 \theta} - X_e \right), \quad (10)$$

这是电子等离子体波的折射率, $Q_e = \frac{\gamma_e k T_e}{m_e c^2}$ 。

当色散方程有 $n = 0$ 的解时,标志着波的传播有截止现象,那时 $g = 0$ (或 $d' = 0$)。由 g 和 d' 的表示式显然可见截止频率与等离子体的温度无关,而与相同情况(密度、磁场相同)下的冷等离子体中的波的截止频率相等。

当色散方程有 $n = \infty$ 的解时,波矢与磁场方向之间有一个“共振角”。对于只有电子是热的等离子体,共振角为

$$\theta_{re} = \arccos\left(\frac{1}{Y_e}\right). \quad (11)$$

共振角的大小与电子密度无关. 在相同情况下, 冷等离子体中波传播的共振角为

$$\theta_{re}^c = \arccos\left(\frac{1}{Y_e} \sqrt{\frac{X_e + Y_e^2 - 1}{X_e}}\right). \quad (12)$$

在暖等离子体中波的共振角变大是由于波模之间的联接. 在冷等离子体中, 当波的传播方向渐渐接近共振角方向时, 波的速度渐渐下降, 波的极化方向也向纵向变化. 达到共振角方向时, 波停止传播, 波的极化方向变为纯纵向, 静电振荡的振幅趋于无穷大. 而在电子是热的等离子体中, 波在 θ_{re}^c 方向并不停止传播^[2,6,7]. 这个继续传播的静电波称为电子等离子体波. 当波的传播方向渐渐接近(11)式所示的共振角方向时, 波的速度下降, 振幅增大. 直到波的传播方向 θ 与共振角 θ_{re} 一致时, 等离子体波才停止传播. 在暖电子等离子体中, 等离子体模的波才产生共振现象. 图 1 给出了非常波与等离子体波的联接. 它是在暖电子等离子体中波传播的 β - θ 曲线. β 和 θ 分别是波传播时射线方向与磁场方向的夹角和波矢与磁场方向的夹角. 知道 n 后, 可以由下式^[8,9]求出 β ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta}, \quad \beta = \theta - \alpha.$$

这里, 以 α 向 z 轴方向度量时为正值.

在均匀冷等离子体中, 共振时, 相应的点在 β - θ 图中, 必定落在通过点 $\theta = 0^\circ$, $\beta = \pm 90^\circ$ 的倾斜 45° 的两条直线中的一条上. 阿尔珀特 (A'lpert)^[6] 已经证明 $\operatorname{tg} \theta_\infty = 1/|\operatorname{tg} \beta_\infty|$, 即 $\alpha_\infty - \beta_\infty = 90^\circ$. 在暖电子等离子体中, 有类似的现象. 在 β - θ 图中, 当 $Y_e > 1$ 发生共振时的点落在通过点 $\theta = 0^\circ$, $\beta = \pm 90^\circ$ 的倾斜 45° 的两条直线中的一条上. 当 $Y_e < 1$ 发生共振时, 波模的联接发生在另一条直线上. 这可以作如下解释: 当电磁波在暖电子等离子体中以相同情况下冷等离子体中的共振角传播时, 波的极化正好就是等离子体波的极化. 因此电磁波与等离子体波之间的模式联接就自然地发生在相应冷等离子体中的共振角方向上.

在电子和质子都是热的等离子体中, 共振角为

$$\theta_{re} = \arccos\left(\frac{1}{Y_e}\right) \quad (13)$$

和

$$\theta_{ri} = \arccos\left(\frac{1}{Y_i}\right). \quad (14)$$

相应情况下的冷等离子体中的共振角为

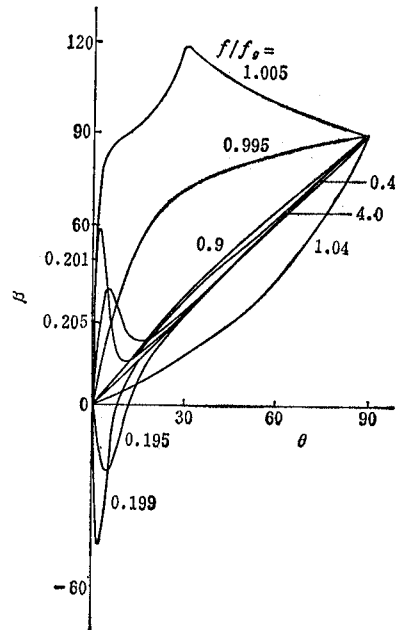


图 1 不同频率的非常波在 $f_p = 5.0 \times 10^6 \text{ Hz}$, $f_e = 2.5 \times 10^6 \text{ Hz}$, 温度 $T_e = 3 \times 10^3 \text{ K}$ 的均匀等离子体中的 β - θ 曲线

$$\theta_r^e = \arctg \left(-\frac{2\varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right). \tag{15}$$

这里

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{X_e}{1 + Y_e} - \frac{X_i}{1 - Y_i}, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{X_e}{1 - Y_e} - \frac{X_i}{1 + Y_i}, \quad \varepsilon_3 = 1 - X_e - X_i.$$

在两种粒子的冷等离子体中,只有一个共振角,但是在两种粒子的暖等离子体中,则有两个共振角。在冷等离子体中的共振角与等离子体密度有关,而暖等离子体中的共振角与密度无关。这是由于,在冷等离子体中所有的电子和离子都有它们的平衡位置,波是通过与邻近粒子的相互作用传播的,所以共振角与密度有关。而在暖等离子体中,所有的电子和离子都在运动着,如不发生碰撞,“邻近的”电子和离子是不明确的。此时粒子的运动受磁场控制,磁场的强度决定共振角的大小。非常波和电子等离子体波联接时的折射率曲面与磁场方向和波矢方向所在平面的交线如图 2 所示。它显示了在冷等离子体中波的折射率曲面所没有的特征。图 3 显示了寻常波与电子等离子体波间的联接。我们知道在具有两种粒子的等离子体中,寻常波的折射率曲面如图 4 所示。它是一个旋转封闭曲面。但当发生波的模式联接,而且又有 $Y_e > 1$ 时,它变成一个开放旋转曲面。

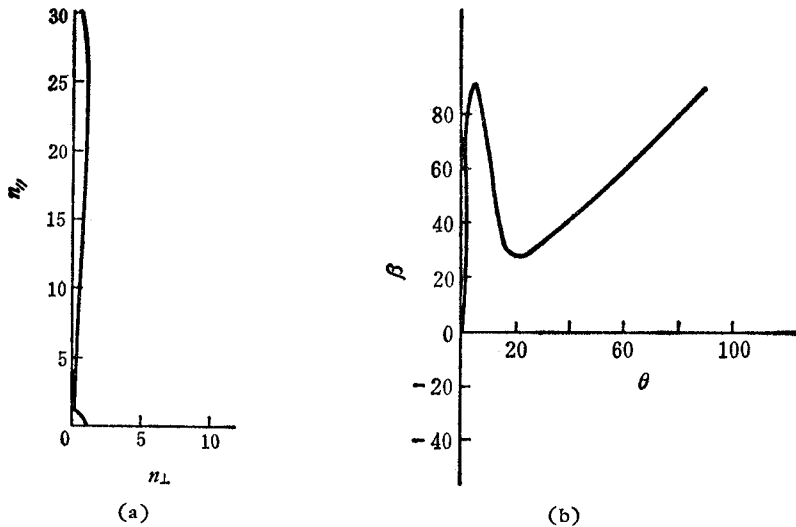


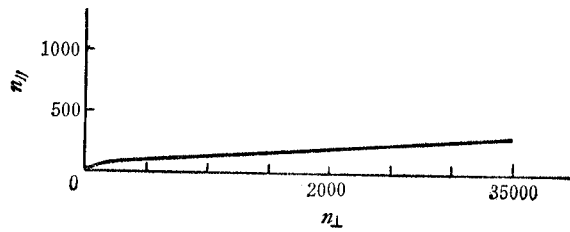
图 2

(a) 暖电子、质子均匀等离子体中非常波与等离子体波联接时,折射率曲面与波矢和磁场方向所在平面的交线

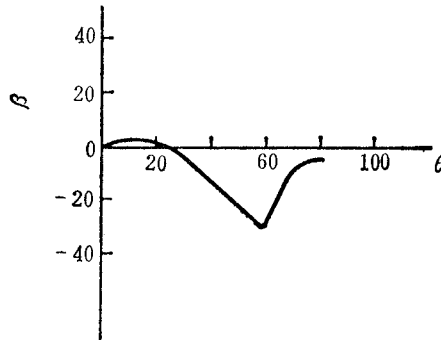
等离子体有: $f_{pe} = 5.0 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_{ge} = 2.5 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_{pi} = 1.166 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_{gi} = 1.36 \times 10^3 \text{Hz}$, $T_e = T_i = 3 \times 10^{-3} \text{K}$
 $f = 5.005 \times 10^6 \text{Hz}$

(b) 与 (a) 对应的 β - θ 曲线

图 5 是 $f = 2.25 \times 10^6 \text{Hz}$ 的寻常波在 $f_p = 5.0 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_g = 2.5 \times 10^6 \text{Hz}$, 而温度不同的电子等离子体中的 β - θ 曲线图。用“+”号标示的曲线是 $T_e = 0$ 时的曲线。 $\theta > 22^\circ$ 时,波在冷等离子体中停止传播。电子有温度时,曲线下端的小拐弯是由寻常波与电子等离子体波的联接引起的。图 6 是 $f = 2.51 \times 10^7 \text{Hz}$ 的非常波在 $f_p = 5.0 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_g = 2.5 \times 10^7 \text{Hz}$, 而温度不同的等离子体中传播的 β - θ 图。当 $Y_e < 1$ 时,可



(a)



(b)

图 3

(a) 暖电子、质子均匀等离子体中寻常波与等离子体波联接时,折射率曲面与波矢和磁场方向所在平面的交线
 等离子体有: $f_{pe} = 5.0 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_{ge} = 2.5 \times 10^7 \text{Hz}$, $f_{pi} = 1.166 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_{gi} = 1.36 \times 10^6 \text{Hz}$, $T_e = T_i = 3 \times 10^3 \text{K}$,
 $f = 2.475 \times 10^6 \text{Hz}$
 (b) 与 (a) 对应的 $\beta-\theta$ 曲线

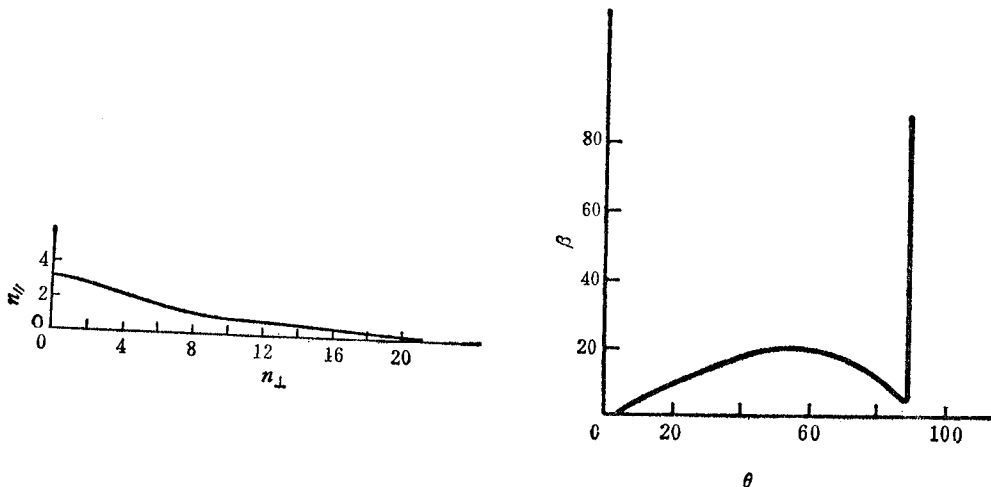


图 4 在两种粒子的冷等离子体中,哨声波的折射率曲面与磁场方向和波矢所在平面的交线

以看到非常波与等离子体波相联接。用“+”号标示的曲线是 $T_e = 0^\circ$ 时的曲线。在冷等离子体中 $\theta < 27^\circ$ 时,非常波停止传播。图 7 是 $f = 4.875 \times 10^6 \text{Hz}$ 的寻常波在 $f_p = 5.0 \times 10^6 \text{Hz}$, $f_g = 2.5 \times 10^7 \text{Hz}$, 而温度不同的电子等离子体中传播的 $\beta-\theta$ 图。几

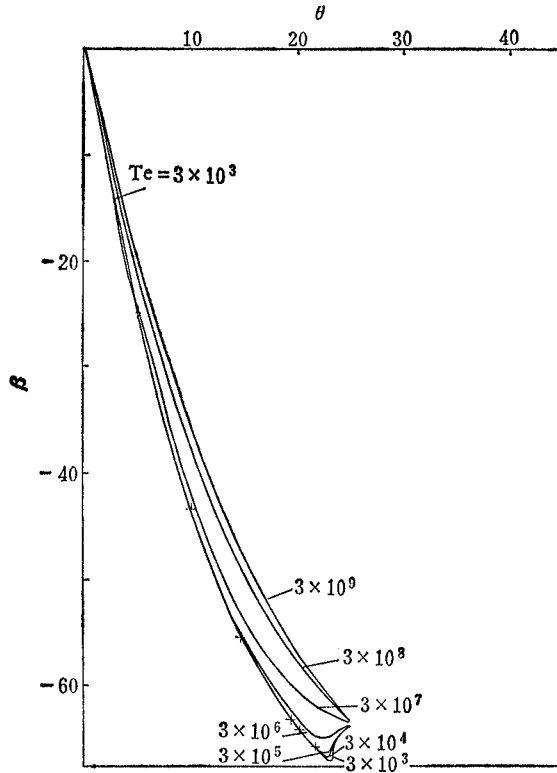


图5 $f = 2.25 \times 10^6 \text{ Hz}$ 的寻常波在 $f_{pe} = 5.0 \times 10^6 \text{ Hz}$, $f_{ge} = 2.5 \times 10^6 \text{ Hz}$, 但温度不同的暖电子等离子体中传播的 β - θ 曲线

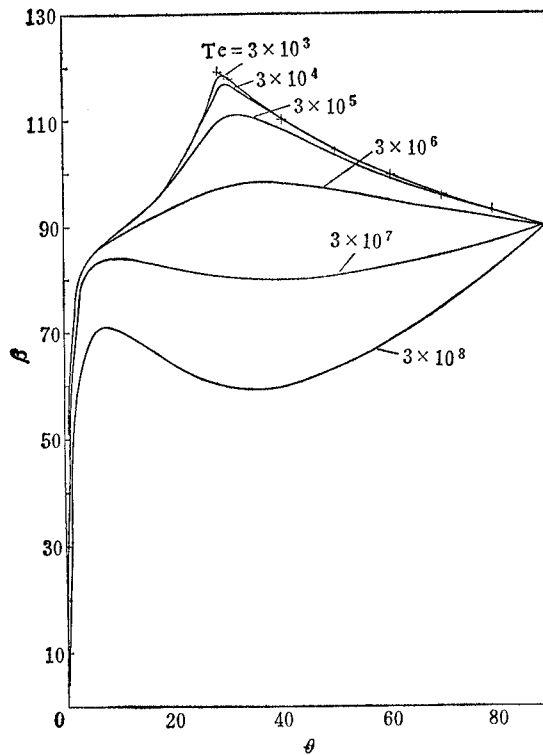


图6 $f = 2.51 \times 10^7 \text{ Hz}$ 的非常波的在 $f_{pe} = 5.0 \times 10^6 \text{ Hz}$, $f_{ge} = 2.5 \times 10^7 \text{ Hz}$, 但温度不同的暖电子等离子体中传播的 β - θ 曲线

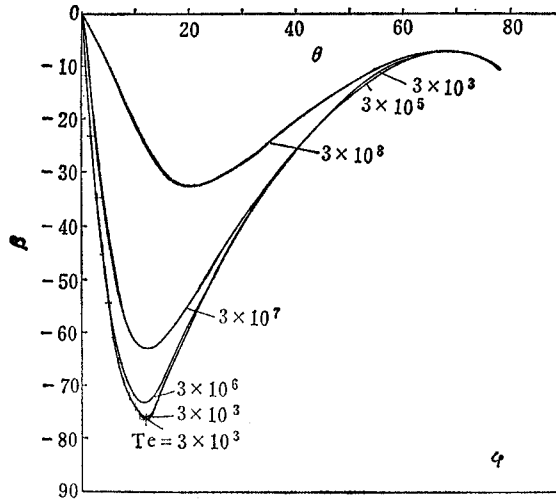


图7 $f = 4.875 \times 10^6 \text{ Hz}$ 的寻常波在 $f_{pe} = 5.0 \times 10^6 \text{ Hz}$, $f_{ge} = 2.5 \times 10^7 \text{ Hz}$ 而温度不同的等离子体中传播的 $\beta-\theta$ 曲线

乎所有曲线都有同样的共振角。这与前面的分析相符。用“+”号标示的曲线是波在冷等离子体中传播时的 $\beta-\theta$ 曲线。 $\theta > 12^\circ$ 时,波停止传播。

三、在不均匀热电子等离子体中波的线性转换

在冷等离子体中波的线性转换早就有人研究,并与电离层的研究相联系^[7,8-16]。下面我们将用波的射线理论来研究暖等离子体中波的线性转换。从暖等离子体中的色散关系可以导出由波凯尔(Booker)定义的分层暖等离子体中的 $q^{[17]}$ 的代数方程。选用笛卡尔坐标,折射率矢量 \mathbf{n} 指向与 \mathbf{k} 同相; z 方向垂直于分层方向。在由电子和质子组成的分层暖等离子体中, q 呈八次方程:

$$a_1 q^8 + a_2 q^7 + a_3 q^6 + a_4 q^5 + a_5 q^4 + a_6 q^3 + a_7 q^2 + a_8 q + a_9 = 0, \quad (16)$$

式中 a_1, a_2, \dots, a_9 的表达式很冗长,这里不列出,可参看文献[18],对它们的数值计算方法见附录3。类似地在仅仅电子是热的分层等离子体中, q 的方程是六次方程:

$$b_1 q^6 + b_2 q^5 + b_3 q^4 + b_4 q^3 + b_5 q^2 + b_6 q + b_7 = 0 \quad (17)$$

式中 b_1, b_2, \dots, b_7 的数值计算方法类似附录3给出的方法。下面我们研究波在分层暖等离子体中的情况。波矢量在磁子午面内。

在冷等离子体中,当 $X_e = 1$ 时,折射率曲面与波矢和磁场方向所在平面上的交线如图8所示。寻常波的折射率曲面简并为一条直线(OW),它成为对称轴 OF 的一部分;非常波的折射率曲面简并为对称轴的剩余部分(WF),再加上一个半径为一的球面。在暖电子等离子体中,当 $X_e = 1$ 时,方程(8)的一个解等于零。折射率曲面中的一个曲面简并成一个落在原点的点,方程(8)的另两个解表明折射率曲面并不简并到 $n_{||}$ 轴,其剖面图如图9所示。

在笛卡尔坐标 $0-n_{||}, n_{\perp}$ 中,方程(8)变为

$$b'_1 n_{\perp}^6 + b'_2 n_{\perp}^4 + b'_3 n_{\perp}^2 + b'_4 = 0, \tag{18}$$

式中 b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 的表达式见附录 4.

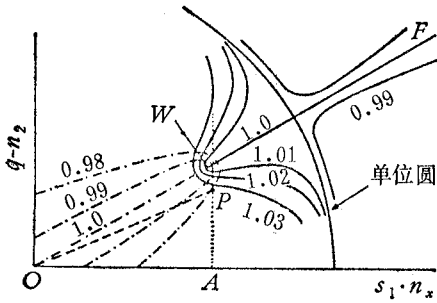


图 8 $Y < 1$ 时, 典型的折射率曲面与磁子午平面的交线

实线是非常波— π 波; 点划线为寻常波; 曲线傍标示的数是 X 的值. 对称轴 OF 平行于磁场.

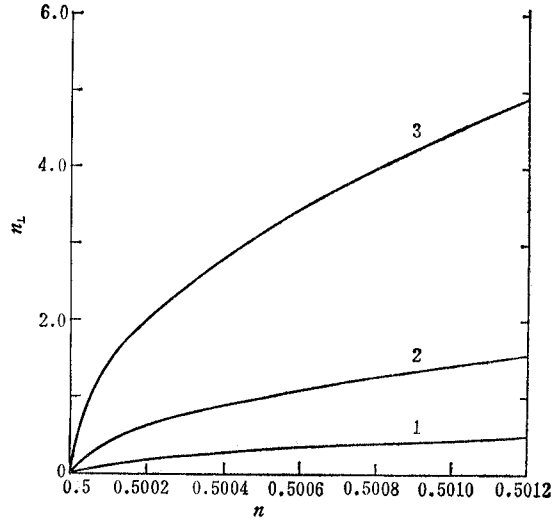


图 9 不同温度的电子等离子体中折射率曲面与磁子午面的交线

n_{\parallel} 平行于磁场, $X = 1, Y = 1/3$; 曲线 1, $T_e = 2 \times 10^3 \text{K}$; 曲线 2, $T_e = 2 \times 10^6 \text{K}$; 曲线 3, $T_e = 2 \times 10^7 \text{K}$.

我们应用方程(18)来研究暖电子等离子体中波传播的“窗口”. 显然, 当 $b'_4 = 0$ 时, 折射率曲面与 n_{\parallel} 轴相交. 由 $b'_4 = 0$ 我们得到 n_{\parallel} 的三个解:

$$n_{\parallel 1}^2 = -\frac{X_c - 1}{Q_c} = -\frac{\delta}{Q_c}, \tag{19}$$

$$n_{\parallel 2}^2 = \frac{Y_c - (X_c - 1)}{Y_c + 1} = \frac{Y_c - \delta}{Y_c + 1}, \tag{20}$$

$$n_{\parallel 3}^2 = \frac{Y_c + (X_c - 1)}{Y_c - 1} = \frac{Y_c + \delta}{Y_c - 1}. \tag{21}$$

在全透明的窗口, 一种模式的波可转换成另一种模式的波, 其条件如下:

$$\text{当 } Y_c > 1, X_c < 1 \text{ 时, } -\frac{\delta}{Q_c} = \frac{Y_c + \delta}{Y_c - 1} \text{ 或 } -\frac{\delta}{Q_c} = \frac{Y_c - \delta}{Y_c + 1}; \tag{22}$$

$$\text{当 } Y_c < 1, X_c > 1 \text{ 时, } -\frac{\delta}{Q_c} = \frac{Y_c - \delta}{Y_c + 1}. \tag{23}$$

在 $Y_c > 1$ 时, 分层暖电子等离子体可以有两个全透明的窗口.

我们运用方程(18)作了一些数值分析. 图 10 中, 实线是分层暖等离子体中的 $\text{Re}(q)$ - X 曲线; 虚线是分层冷等离子体的曲线. 两条曲线都是正在临界窗口入射角下的人射波的曲线. 众所周知, 在冷等离子体中, 波的完全线性转换是在寻常波与非正常波之间发生的, 此时 $X_c = 1$. 但在暖等离子体中, 波的线性转换不是发生在 $X_c = 1$ 处, 而是发生在 $X_c = 1 + \delta$ 处, 这里 δ 满足方程(22). 图 10 显示, 在冷等离子体中的 $\text{Re}(q)$ - X 曲线之

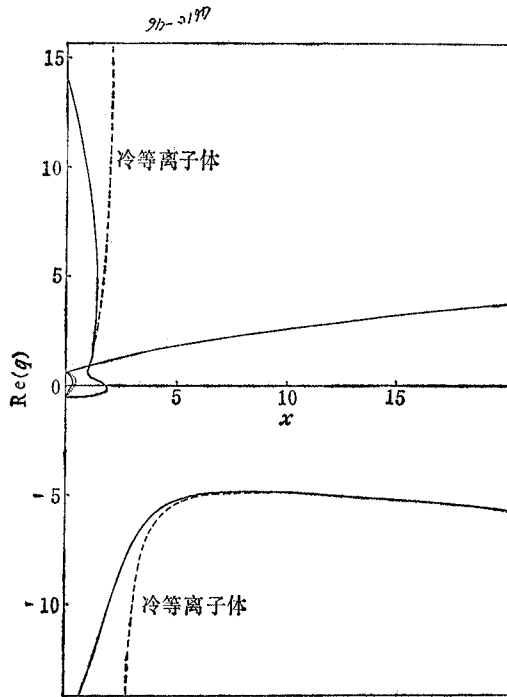


图 10 分层冷(虚线)、暖(实线)电子等离子体的 $Re(q)-X$ 曲线
 磁场方向为 $(\cos 45^\circ, 0, \cos 45^\circ)$, $Q_e = 0.01$, $f_e = 1.07433 \times 10^7 \text{Hz}$,
 $f = 3.5811 \times 10^6 \text{Hz}$, $Y = 3$, 入射波矢与 x 轴夹角 $\theta_x = 30.00^\circ$,
 k 在 $x-z$ 平面内

一与 $X_e = 0$ 轴不相交。在暖等离子体中, 这条曲线则与 $X_e = 0$ 轴相交。这表明在暖等离子体中的色散关系中有一个实数 q 的解, 它对应于等离子体波。图 11 是波在 $Y_e = 3$, $Q_e = 0.5$ 的暖等离子体中的 $Re(q)-X$ 曲线。由图可见, 等离子体的温度愈高, 等离子体波也传播愈快 (q 愈小)。波的线性转换发生在两个折射率曲面互相相交的地方。

折射率曲面相交的地方, 可以由下式决定,

$$\delta_1 = -\frac{Q_e Y_e}{Y_e - 1 + Q_e} \quad \text{和} \quad \delta_2 = -\frac{Q_e Y_e}{Y_e + 1 - Q_e}$$

$n_{||}$ 可以由已知的 δ 求出。在自由空间中临界入射角可以直接由下式求出

$$n_{||} \cdot m = \cos \theta_{xc}$$

这里 m 是磁场在 z 轴方向的方向余弦。

表 1

Y_e	Q_e	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5
3	θ_{xc1}	30.00°	30.00°	30.02°	30.25°	32.31°	39.23°
	θ_{xc2}	52.24°	52.24°	52.23°	52.18°	51.67°	49.11°
1/3	θ_{xc}	69.30°	69.29°	69.11°	69.01°	68.43°	63.43°

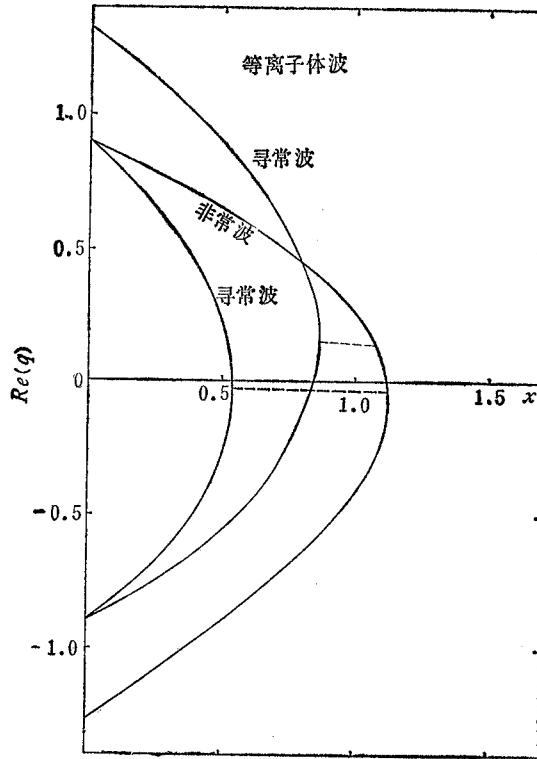


图 11 与图 10 一样是 $f = 3.5811 \times 10^6 \text{Hz}$ 的波的 $\text{Re}(q)$ - x 图
 磁场方向相同,但 $Q_0 = 0.5$, $f_g = 1.1937 \times 10^6 \text{Hz}$, 入射波矢与
 x 轴夹角 $\theta_x = 64.436^\circ$, 与 y 轴夹角 $\theta_y = 90^\circ$

当磁场方向余弦为 $(\cos 45^\circ, 0, \cos 45^\circ)$ 时, 不同温度下的分层暖电子等离子体的临界入射角如表 1 所示。

波的人射角的临界角度的变化, 说明在温度不同的分层等离子体中波的线性转换发生在不同层内。

四、在研究暖等离子体中波的线性转换的全波方程 与射线方法的比较

在非均匀暖等离子体中波的线性转换早就有人研究。文献 [19] 从波动方程出发, 并按唯象观点引入暖等离子体的空间色散, 求得了波在耦合点附近的场。非均匀等离子体是在 z 方向上不均匀。假定波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0 \quad (24)$$

的解 \mathbf{E} 是由电磁波分量 \mathbf{E}_c 和等离子体波分量 \mathbf{E}_p 两项合成的 (\mathbf{E}_c 是对应于冷等离子体中方程(24)的解), 则有

$$\mathbf{E} = A\mathbf{E}_c + B\mathbf{E}_p, \quad (25)$$

式中 A, B 是常数, $\mathbf{E}_c, \mathbf{E}_p$ 分别满足下列方程:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_c - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}_c = 0, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_p = -\nabla \varphi. \quad (27)$$

这里 $D_{ci} = \varepsilon_{ik}(\mathbf{z}) E_{ck}$. 进一步来求方程(26)在奇点附近的解. 奇点由下式决定:

$$\varepsilon_{xx}(z_0) = 0. \quad (28)$$

引入唯象的空间色散,并写作:

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k + \frac{c^2}{\omega^2} \delta_{iklm} \frac{\partial^2 E_k}{\partial X_c \partial X_m} = 0. \quad (29)$$

这里 $\delta_{iklm} \ll 1$. 波动方程在 $z = z_0$ 附近变成

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 E_i - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ik} E_k - \delta_{iklm} \frac{\partial^2 E_k}{\partial X_c \partial X_m} = 0. \quad (30)$$

这里 z_0 是方程(28)的解. 在这一区域有

$$\varepsilon_{xx} = (z - z_0)/a, \quad (31)$$

式中 a 是一个常数. 如波有形式为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z) e^{i(k_x x + k_y y)}$ 的解, 则引入新变量 $\xi = (z - z_0)/a\gamma$, ($\gamma = \left(\frac{c^2 \beta}{\omega^2 a^2}\right)^{1/2}$, $\beta = \delta_{xxxx}(z_0)$) 可得:

$$E^{(4)} - \xi E_z'' - (2 - i\sigma) E_z' = 0, \quad (32)$$

$$E_x' = i\gamma k_x a E_x, \quad (33)$$

$$E_y' = i\gamma k_y a E_y. \quad (34)$$

这里 $\sigma = a\{k_y[\varepsilon_{xy}(z_0) + \varepsilon_{yz}(z_0)] + k_x[\varepsilon_{xx}(z_0) + \varepsilon_{zz}(z_0)]\}$, “ $'$ ”表示对 ξ 的微商. 方程(32)有一个解是常数. 另外三个解可用拉普拉斯变换来求, 可写为

$$W_k(\xi) = B_k \int_{C_k} t^{-i\sigma} \exp\left(\xi t - \frac{t^2}{3}\right) dt, \quad (35)$$

这里 C_k 是积分回路, 从 $\text{Re}(t^3) > 0$ 这一条件出发, 我们可以发现回路是在如下部分里:

$$\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6} > \text{arg} t > \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}.$$

文献[19]定义无碰撞等离子体中的参数 β 为:

$$\beta = \sum \frac{V_{th} \omega^2}{c} \left(\frac{3\omega^2 \sin^4 \theta}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)} + \frac{6\omega^4 - 3\omega^2 \Omega^2 + \Omega^4}{(\omega^2 - \Omega^2)^3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{3\cos^2 \theta}{\omega^2} \right).$$

这里 V_{th} 是等离子体中带电粒子的热运动速度. 可以认为暖等离子体产生空间色散的原因是由于电子和离子的热运动. 热运动的结果使得色散不仅决定于空间某一点等离子体的特性, 而且使得在这点的色散还决定于它附近的等离子体的特性.

但是, 当射线通过奇点, 也就是耦合点时, 射线方法是否仍能适用? 这可作如下考虑. 用射线方法研究波的传播时, 如果发生耦合现象, 则 WKB 近似在耦合点附近就不能应用, 但是在耦合区的两边还是可以应用的. 因此如果要知道波通过耦合区的转换系数, 就需要用复射线法来求, 如文献[10]; 而对于波在耦合区两边的传播问题, 如传播方向、相速、群速等等, 仍可用射线方法来解决.

解波动方程的方法能得到波在线性转换区的场的解,但是它并不能给出波在自由空间入射“全透明窗口”的入射角,而射线法则可求出临界入射角,所以这两种方法是互相补充的。

本项工作是作者在卡文迪什(Cavendish)实验室开始、回国后完成的。在此对巴登(Budden)博士和吕保维先生的指导和鼓励,冯孔豫先生的有益的讨论表示感谢。

附录 1 方程(7)中 D_{ij} 、 a 、 b 和 g 的表达式:

$$\begin{aligned} D_{11} &= X_e U_i + X_i U_e + (n^2 - 1)(U_e U_i - Y_e Y_i \cos^2 \theta), \\ D_{21} &= \cos \theta (X_i Y_e - X_e Y_i + (n^2 - 1)(U_i Y_e - U_e Y_i)), \\ D_{31} &= Y_e Y_i \sin \theta \cos \theta (n^2 - 1), \\ D_{12} &= \cos \theta (Y_e X_i - X_e Y_i + (n^2 - 1)(U_i Y_e - U_e Y_i)) \\ D_{22} &= U_i X_e + U_e X_i + n^2 (U_e U_i - Y_e Y_i \cos^2 \theta) - U_e U_i + Y_e Y_i \\ D_{32} &= -\sin \theta [Y_e X_i - X_e Y_i + Y_e U_i (n^2 - 1) + Y_i (U_e - n^2 Q_e)] \\ D_{13} &= Y_e Y_i \sin \theta \cos \theta (n^2 - 1) \\ D_{23} &= -\sin \theta [X_i Y_e - X_e Y_i - U_e Y_i (n^2 - 1) - Y_e (U_i - n^2 Q_i)], \\ D_{33} &= X_i (U_e - n^2 Q_e) + X_e (U_i - n^2 Q_i) - Y_e Y_i \sin^2 \theta (n^2 - 1) \\ &\quad - (U_e - n^2 Q_e)(U_i - n^2 Q_i) \\ a &= -Q_e Q_i (U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta)(U_i^2 - Y_i^2 \cos^2 \theta); \\ b &= [Q_e (U_i - X_i) + Q_i (U_e - X_e)](U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta)(U_i^2 - Y_i^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - 2Q_e Q_i [U_e X_e (U_i^2 - Y_i^2 \cos^2 \theta) + U_i X_i (U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad - (U_i^2 - Y_i^2 \cos^2 \theta)(U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta)] - \sin^2 \theta [U_i Q_e Y_i^2 (U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad + U_e Q_i Y_e^2 (U_i^2 - Y_i^2 \cos^2 \theta)]; \\ g &= (U_e X_i + U_i X_e - U_e U_i)^3 + 2Y_e Y_i (U_e X_i + U_i X_e - U_e U_i)^2 \\ &\quad + Y_e^2 Y_i^2 (U_e X_i + U_i X_e - U_e U_i) - (U_e X_i + U_i X_e - U_e U_i) \\ &\quad \cdot (Y_e X_i - Y_i X_e - U_i Y_e + U_e Y_i). \end{aligned}$$

附录 2 方程(8)中各系数的表达式:

$$\begin{aligned} a' &= Q_e (U_e^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta), \\ b' &= -U_e^2 (U_e - X_e) + Y_e^2 (U_e - X_e \cos^2 \theta) - 2Q_e (U_e^2 - U_e X_e - Y_e^2 \cos^2 \theta), \\ c' &= 2U_e (U_e - X_e)^2 - 2Y_e^2 (U_e - X_e) - X_e Y_e^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + Q_e [(U_e - X_e)^2 - Y_e^2 \cos^2 \theta], \\ d' &= -(U_e - X_e)^3 + Y_e^2 (U_e - X_e), \end{aligned}$$

附录 3 方程(16)中的系数 a_1, a_2, \dots, a_9 的表达式非常冗长,这里不给出(参看文献[18]),但我们可把下列关系式

$$\begin{aligned} Y_e &= Y_e(l, m, p), \quad \mathbf{n} = n \left(\frac{s}{(s^2 + q^2)^{1/2}}, 0, \frac{q}{(s^2 + q^2)^{1/2}} \right), \\ n^2 &= q^2 + s^2, \quad \cos^2 \theta = \frac{(ls + qp)^2}{q^2 + s^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{q^2 + s^2 - (ls + pq)^2}{q^2 + s^2} \end{aligned}$$

代入(7)式,然后对 a_1, a_2, \dots, a_9 作数值计算。用同样的方法我们可得到方程(16)

的系数的数值.

附录 4 方程(18)中的各系数的表达式为:

$$\begin{aligned}
 b'_1 &= Q_c, \\
 b'_2 &= Q_c n_H^2 (3 - Y_c^2) + [Y_c^2 - (1 - X_c)(1 + 2Q_c)], \\
 b'_3 &= Q_c n_H^4 (3 - 2Y_c^2) + n_H^2 [2(Y_c^2 - (1 - X_c)(1 + 2Q_c)) \\
 &\quad - Y_c^2(X_c - 2Q_c)] + [(1 - X_c)(2(1 - X_c - Y_c^2) \\
 &\quad + Q_c(1 - X_c)) - X_c Y_c^2], \\
 b'_4 &= Q_c n_H^6 (1 - Y_c^2) + [Y_c^2 - (1 - X_c)(1 + 2Q_c) - Y_c^2(X_c - 2Q_c)] n_H^4 \\
 &\quad + [(1 - X_c)(2(1 - X_c - Y_c^2) + Q_c(1 - X_c)) - Q_c Y_c^2] n_H^2 \\
 &\quad - (1 - X_c)[(1 - X_c)^2 - Y_c^2].
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] K. C. Yeh and C. H. Liu, *Theory of Ionospheric Waves*, (1972), Academic Press, New York.
- [2] V. L. Ginzburg, *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas* (1970), Pergamon Press, Oxford.
- [3] J. F. Denisse and L. J. Delcroix, *Theorie des Ondes dans les Plasmas* (1961), Dunod, Paris.
- [4] Zhen-song Wang, *Jurnal Fizik Malaysia*, 5(1984).
- [5] 张守融, 在暖等离子体中的色散关系, 中国科学院电子学研究所硕士论文, 1981.
- [6] Ya. L. A'lpert, *J. Atmos. Terr. Phys.* 42 (1980), 206.
- [7] V. M. Agranovich and V. L. Ginzburg, *Spatial Dispersion in Crystal Optics and Theory of Excitation*, Academic Press, New York, (1961).
- [8] K. G. Budden, *Lectures on Magnetoionic Theory*, (1964), Blackie, London.
- [9] K. G. Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, (1961), Cambridge University Press, England.
- [10] K. G. Budden and P. D. Terry, *Proc. R. Soc Lond.*, T321(1971), 275.
- [11] K. G. Budden and M. S. Smith, *ibid.*, A341 (1974), 1.
- [12] K. G. Budden and C. F. Stott, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 42(1980), 791.
- [13] K. G. Budden, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A280 (1975), 111.
- [14] K. G. Budden, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 42(1980), 289.
- [15] G. R. A. Ellis, *ibid.*, 8(1956), 43.
- [16] G. R. A. Ellis, *Nature*, Lond., 193, (1960), 860.
- [17] H. G. Booker, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A237 (1939), 411.
- [18] 王贞松, 等离子体中波的射线研究与地球极区千米波辐射机制, 中国科学院电子学研究所博士论文, 1985.
- [19] A. D. Piliya and V. I. Feerov, *Soviet Phys. JETP*, 30(1979), 653.

THE WAVE PROPAGATION AND THE MODE COUPLING IN THE WARM IONOSPHERE

Wang Zhensong

(Institute of Electronics, Academia Sinica)

The wave propagation in the warm ionosphere is studied in this paper. The dispersion relation of refractive index (n) of the waves is derived and the equation of q in the warm stratified ionosphere is inferred. All these equations have been used in studying of wave propagation, wave mode linking and linear mode coupling of the waves in the warm ionosphere by ray tracing method.

The singular point of the wave equation and the coupling between the plasma waves and the electromagnetic waves are discussed. The wave field in coupling region can be got by solving the wave equation in the region near the singular point. The method of ray tracing and the method of wave equation were compared.

The results of this paper could be useful in studying the absorption region of the ionosphere in the ionospheric heating experiment.