

封闭介质波导分析——多模网络方法*

徐善驾

(中国科学技术大学,合肥)

摘要 本文将多模网络理论的积木式分析方法和严格的场匹配技术相结合,对一大类封闭介质波导的色散特性进行了研究。用所述方法给出了若干波导结构的数值例子,为了比较,也用有限元法和 EDC 法对同一结构进行了计算。结果表明,本文方法具有与有限元方法同样的精度,又能保持 EDC 方法的简便特性,从而证实了所述方法的效能。

关键词 封闭介质波导;多模网络方法;有限元法;EDC 法

一、引言

封闭介质波导,例如非均匀介质填充矩形波导的研究已有多年的历史。鉴于这类导波结构的实际应用,如相移器、阻抗变换器、极化转化器、模式变换器、谐波分离器和各种各样的滤波器等,人们对他们的研究一直保持着浓厚的兴趣^[1]。有限元法是最有效、最精确又是最通用的波导分析法之一。作者曾用有限元法对一大类导波结构,包括各种鳍线和许多类型块状介质填充的矩形波导进行了分析^[2-4]。但有限元的分析程序较复杂,要求计算机有很大的内存,计算时间又冗长,所以这种方法很难在微机中使用。分析开介质波导结构的 EDC (effective dielectric constant) 法是分析波导结构的最简单的近似方法之一^[5]。它的主要优点是计算原理和程序都简单,所以可以在微机、甚至个人计算机中应用。但这种方法完全忽略了与各个阶梯两边相应的几何结构上的不连续性,而且认为每个构成区域中只存一个导波模,所以它的精确度通常不是很高。本文提出了多模网络法,将多模网络理论的积木式分析方法与严格的场匹配技术相结合,得到与有限元法同样高的精度,又几乎保持了 EDC 法的简单特性。这个方法的整个分析过程可以用微机在比较短的计算时间内完成。

二、分析方法

图1表示了封闭介质波导的横截面结构。它由记作 I, II 和 III 的三个多层均匀介质区域构成。在 $x = a_1$ 和 $x = a$ 处,有两个阶梯不连续性。这些区域的介质分布分别由 $\epsilon_1(y)$, $\epsilon_2(y)$ 和 $\epsilon_3(y)$ 来表征。多模网络法首先将整个波导横截面分割成几个构成

* 1986年8月21日收到,1987年12月25日修改定稿。

部分,或称为分成几个积木块;然后对各个较为简单的构成部分进行分析,而每个介质阶梯接头,即介质不连续性则用严格的模匹配法来处理,最后把所有的组成部分放在一起构成最终的实际结构,对整个波导的横向谐振分析以确定导波模的纵向传播波数 k_z 。

根据上述原则,图 2 给出了封闭介质波导横向多模等效网络的完整表示,按照分析介质开波导的方法^[6],把每个阶梯不连续性用一个理想变压器来代表,这个变压器的两边

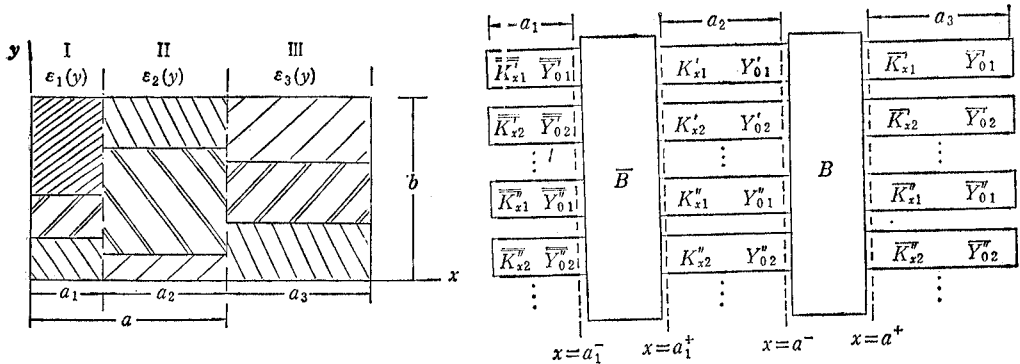


图 1 封闭介质波导

图 2 如图 1 所示封闭介质波导横向多模等效网络的完善表示

分别与两组传输线相连接。一组传输线传输 TE 模,另一组传输线传输 TM 模,而每一条传输线都表示均匀多层介质波导中的一个本征模。为了分析方便,上述的多模等效网络还可以进一步简化,即将变压器 B 及右边的那组终端短路的传输线段合并在一起用通用输入阻抗矩阵 $\vec{Z}(a^-)$ 来表示,同时变压器 \bar{B} 及左边的那组终端短路的传输线段用另一个通用输入阻抗矩阵 $\vec{Z}(a_1^+)$ 来表示。图 3 是用通用阻抗矩阵表示的多模等效网络,其中,包括了介质阶梯接头和短路传输线段共同影响的通用阻抗矩阵 $\vec{Z}(a^-)$ 和 $\vec{Z}(a_1^+)$ 分别定义如下:

$$\vec{Z}(a^-) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_{11} & -\mathbf{C}_t \\ \mathbf{C} & \mathbf{Y}''_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{Z}(a_1^+) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}'_{11} & \bar{\mathbf{C}}_t \\ -\bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{Y}}''_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中下标 t 表示转置;带一撇的量表示 TE 模,带两撇的量表示 TM 模。

子矩阵 \mathbf{Z}'_{11} 和 \mathbf{Y}''_{22} 分别是由 $x = a^-$ 面向右看去的 TE 模的输入阻抗和 TM 模的输入导纳;而 $\bar{\mathbf{Z}}'_{11}$ 和 $\bar{\mathbf{Y}}''_{22}$ 则是由 $x = a_1^+$ 面向左看去的 TE 模的输入阻抗和 TM 模输入导纳。它们各由下式确定:

$$\mathbf{Z}'_{11} = \mathbf{Q} \vec{\mathbf{Z}}' \mathbf{Q}' \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}''_{22} = \mathbf{Q}'' \vec{\mathbf{Y}}'' \mathbf{Q}'' \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}'_{11} = \bar{\mathbf{Q}} \vec{\mathbf{Z}}' \bar{\mathbf{Q}}' \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}''_{22} = \bar{\mathbf{Q}}'' \vec{\mathbf{Y}}'' \bar{\mathbf{Q}}'' \quad (6)$$

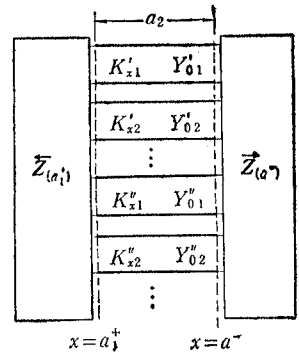


图 3 用来说明如图 1 所示封闭介质波导两侧方向横向谐振的多模等效网络

式中 \vec{Z}' , \vec{Z} , \vec{Y}' 和 \vec{Y} 是对角矩阵, 它们的典型元素可写为:

$$(\vec{Z}')_{mn} = j \delta_{mn} \bar{Z}'_{0n} \tan \bar{K}'_{xn} a_3 \quad (7)$$

$$(\vec{Y}'')_{mn} = -j \delta_{mn} \bar{Y}''_{0n} \cot \bar{K}''_{xn} a_3 \quad (8)$$

$$(\vec{Z})_{mn} = j \delta_{mn} \bar{Z}'_{0n} \tan \bar{K}'_{xn} a_1 \quad (9)$$

$$(\vec{Y}'')_{mn} = -j \delta_{mn} \bar{Y}''_{0n} \cot \bar{K}''_{xn} a_1 \quad (10)$$

式中 Z_{0n} 和 Y_{0n} 分别是传输线中第 n 个 TE 模的特性阻抗和第 n 个 TM 模的特性导纳。这些 TE 和 TM 模都是多层介质填充介质波导中的本征模。 k_{xn} 是第 n 模在 x 方向的传播波数。需要说明一下, 不带撇的量既适用于 TE 模, 也适用于 TM 模, 带一条杠的量表示区域 III 中的量; 带两条杠的表示区域 I 中的量; 不带杠的则是区域 II 中的量。式中 Z'_{0n} , Y''_{0n} 和 K_{xn} 由下式定义:

$$Z'_{0n} = K'_{xn} / \omega \epsilon_0 \epsilon'_{cn} \quad (11)$$

$$Y''_{0n} = K''_{xn} / \omega \mu \epsilon''_{cn} \quad (12)$$

$$K_{xn} = (K_{un}^2 - K_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\epsilon_{cn} = (K_{un} / K_0)^2 \quad (14)$$

式中 K_{un} 是多层介质填充平板波导中第 n 个模的本征值, ϵ_{cn} 是该模的有效介电常数。

方程(1)和(2)中的矩阵 \mathbf{C} 和 $\bar{\mathbf{C}}$ 代表了阶梯接头处同一极化方向和相反极化方向导波模之间的耦合。方程(2)中 $\bar{\mathbf{C}}$ 的前面取了负号是由于考虑到传输线电流的方向在正 x 方向, 而通用阻抗 $\vec{Z}(a_1^+)$ 却是按相反的方向定义的。耦合矩阵 \mathbf{C} 和 $\bar{\mathbf{C}}$ 可以按下式确定^[6]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}' \bar{\mathbf{R}}' \mathbf{Q}' - \mathbf{R}' \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{Q}}' \bar{\mathbf{R}}' \bar{\mathbf{Q}}' - \bar{\mathbf{R}}' \quad (16)$$

式中矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 表征了阶梯接头处各本征模之间的耦合, 它们的典型元素由不连续性接头两边的本征模函数的标积, 即交迭积分确定:

$$(\mathbf{Q}')_{mn} = \langle \phi'_m | \bar{\phi}'_n \rangle \quad (17)$$

$$(\mathbf{Q}'')_{mn} = \langle \phi''_m | \frac{1}{\epsilon_2(y)} | \phi''_n \rangle \quad (18)$$

$$(\mathbf{R}')_{mn} = \langle \phi''_m | \frac{1}{\epsilon_2(y)} | \phi'_n \rangle \quad (19)$$

$$(\bar{\mathbf{R}})_{mn} = \langle \bar{\phi}''_m | \frac{1}{\epsilon_2(y)} | \phi'_n \rangle \quad (20)$$

$$(\bar{\mathbf{Q}}')_{mn} = \langle \phi'_m | \bar{\phi}'_n \rangle \quad (21)$$

$$(\bar{\mathbf{Q}}'')_{mn} = \langle \phi''_m | \frac{1}{\epsilon_2(y)} | \bar{\phi}''_n \rangle \quad (22)$$

$$(\bar{\mathbf{R}})_{mn} = \langle \bar{\phi}''_m | \frac{1}{\epsilon_1(y)} | \bar{\phi}'_n \rangle \quad (23)$$

$$\phi'_n = \frac{K_z}{K_0^2 \epsilon'_{cn}} \frac{d\phi'_n}{dy} \quad (24)$$

式中 $\bar{\phi}'_n$ 和 $\bar{\phi}''_n$ 由(24)式中相关的量分别加上一条杠和两条杠后求得。

标量函数 ϕ_n 是多层介质填充平板波导中的本征模函数,它们服从 Sturm-Liouville 本征方程

$$\left[\frac{d}{dy} p(y) \frac{d}{dy} + q(y) \right] \phi_n(y) = K_{un}^2 w(y) \phi_n(y) \quad (25)$$

和边界条件

$$\phi_n(0) = \phi_n(b) = 0, \text{ 对于 TE 模} \quad (26)$$

$$\dot{\phi}_n(0) = \dot{\phi}_n(b) = 0, \text{ 对于 TM 模} \quad (27)$$

式中 $\dot{\phi}_n$ 是 ϕ_n 关于 y 的导数, $p(y)$, $q(y)$ 和 $w(y)$ 是已知函数,它们分别定义为

$$p(y) = w(y) = \begin{cases} 1, & \text{对于 TE 模} \\ 1/\varepsilon(y), & \text{对于 TM 模} \end{cases} \quad (28)$$

$$q(y) = \begin{cases} k_{0n}^2 \varepsilon(y), & \text{对于 TE 模} \\ k_0^2, & \text{对于 TM 模} \end{cases} \quad (29)$$

求解 I, II 和 III 区域中的上述本征值问题,即可确定各 TE 和 TM 模的 ϕ_n 和 k_{un} 。把这些本征函数和本征值代入有关的方程,就可以把通用阻抗矩阵 $\vec{Z}(a^-)$ 和 $\overleftarrow{Z}(a_1^+)$ 完全确定下来。

事实上,矩阵 $\vec{Z}(a^-)$ 正是由参考面 $x = a^-$ 向右看去的网络的等效输入阻抗矩阵。通过阻抗变换,可以把它转换成由 $x = a_1^+$ 平面向同一方向看去的等效输入阻抗 $\vec{Z}(a_1^+)$

$$\vec{Z}(a_1^+) = \mathbf{Z}_0 [\mathbf{I} + \mathbf{H} \vec{\Gamma}(a^-) \mathbf{H}] [\mathbf{I} - \mathbf{H} \vec{\Gamma}(a^-) \mathbf{H}]^{-1} \quad (30)$$

式中 \mathbf{I} 是单位矩阵, \mathbf{H} 是相移矩阵, $\vec{\Gamma}(a^-)$ 是反射系数矩阵, \mathbf{Z}_0 是等效特性阻抗矩阵,它们可确定如下:

$$\vec{\Gamma}(a^-) = [\vec{Z}(a^-) + \mathbf{Z}_0] [\vec{Z}(a^-) - \mathbf{Z}_0]^{-1} \quad (31)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H}' \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}''_0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

这里所有的子矩阵都是对角阵,它们的典型元素给定为:

$$(\mathbf{H})_{mn} = \delta_{mn} e^{-jk_{xn}a_1} \quad (34)$$

$$(\mathbf{H}')_{mn} = \delta_{mn} e^{-jk'_{xn}a_2} \quad (35)$$

$$(\mathbf{Z}'_0)_{mn} = \delta_{mn} k'_{xn} / \omega \varepsilon_0 \varepsilon'_{cn} \quad (36)$$

$$(\mathbf{Y}''_0)_{mn} = \delta_{mn} k'_{xn} / \omega \mu \varepsilon''_{cn} \quad (37)$$

显然,对于如图 3 所示的多模等效网络,其横向谐振条件应写成

$$\det[\vec{Z}(a_1^+) + \overleftarrow{Z}(a_1^+)] = 0 \quad (38)$$

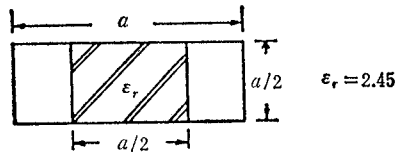
因为(38)式中的通用阻抗矩阵 $\vec{Z}(a_1^+)$ 和 $\overleftarrow{Z}(a_1^+)$ 都是纵向传播波数 k_x 的函数,因此,所要的 k_x 值可以直接通过(38)式用通用的标准程序求得。

三、数值举例

对几种封闭介质波导分别用多模网络法、有限元法和 EDC 法进行了分析,表 1 和表 2 给出了数值结果。表 1 列出了封闭 H 波导中孪生波主模和第一高次模色散特性理论值和用不同方法的计算值。表 2 是部分介质填充通道波导中孪生波主模色散特性理论值和用不同方法的计算值。由表可见,用不同方法算得的结果差别是很小的,所有方法的精度都好于 10^{-5} 。由于表 1 和表 2 所表示的波导结构不存在几何不均匀性,EDC 法在这些情况下是严格准确的,所以对于上述结构用 EDC 法进行计算是最合适的。

图 4 和图 5 分别给出了结构尺寸如插图所示的封闭镜象波导和封闭矩形介质波导

表 1 封闭 H 波导中孪生波主模和第一高次模色散特性理论值和不同方法的计算值
(电场平行于空气介质交界面)



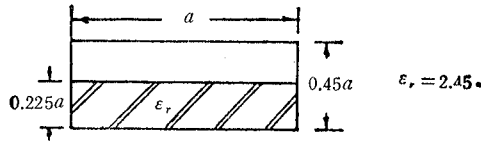
主 模

a/λ	$\sqrt{\epsilon_0}$			
	理论值	本文方法	有限元法	EDC 法
0.337180	0.000000	0.000001	0.000000	0.000036
0.350080	0.400000	0.400000	0.400000	0.399991
0.368480	0.600000	0.600000	0.600000	0.600000
0.399845	0.800000	0.800000	0.800000	0.799995
0.451205	0.990000	0.989998	0.990000	0.989987
0.566439	1.200000	1.199998	1.200000	1.200001
0.679556	1.300000	1.299997	1.300000	1.299999

第 一 高 次 模

a/λ	$\sqrt{\epsilon_0}$			
	理论值	本文方法	有限元法	EDC 法
0.745921	0.000000	0.000002	0.000000	0.000006
0.779955	0.400000	0.400000	0.400000	0.400005
0.829364	0.600000	0.600001	0.600000	0.599999
0.915774	0.800000	0.800007	0.800000	0.800001
1.062042	0.990000	0.989997	0.990000	0.989999
1.396955	1.200000	1.199999	1.200000	1.200000
1.711372	1.300000	1.299998	1.300000	1.300000

表 2 部分介质填充通道波导中孪生波主模色散特性理论值和用不同方法的计算值
(电场垂直于空气介质交界面)



主 模

a/λ	$\sqrt{\epsilon_e}$			
	理论值	本文方法	有限元法	EDC 法
0.411940	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002
0.435212	0.400000	0.400002	0.400000	0.399998
0.470195	0.600000	0.600001	0.600000	0.599998
0.534855	0.800000	0.800000	0.800000	0.800000
0.620902	0.950000	0.949998	0.950000	0.949999
0.924315	1.200000	1.199982	1.200000	1.199999
1.146864	1.300000	1.299997	1.300000	1.299999

用不同方法算得的色散曲线。由图可见,本文方法和有限元法的结果在曲线上很难区别,说明这两种方法有几乎同样高的计算精度。而 EDC 法的精度就比较差,它和本文方法的最大相对偏差大到 30%。

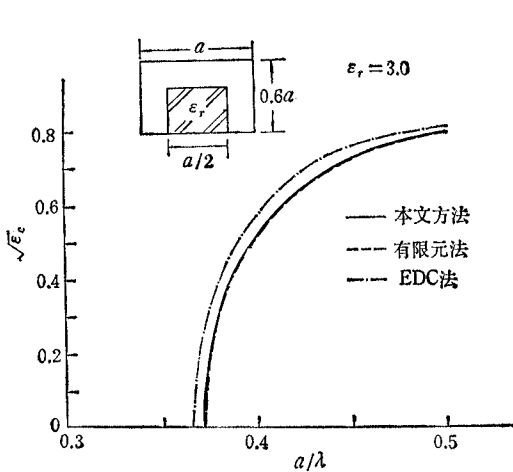


图 4 用不同方法求得的封闭镜象线主模的色散曲线

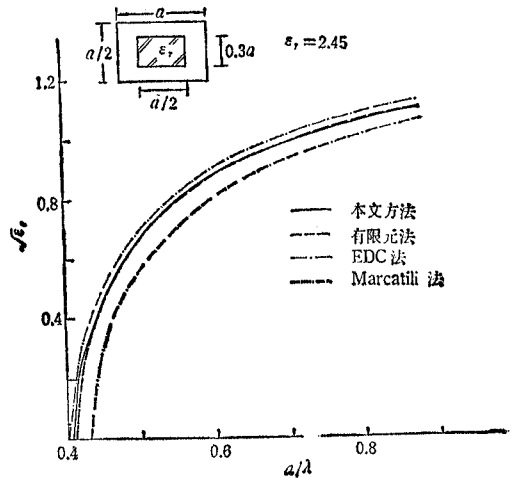


图 5 用不同方法求得的封闭矩形介质波导主模的色散曲线

图 5 还给出了用 Marcattili 法算得的封闭矩形介质波导的色散曲线。它给出了波导中导波模的较小的 $\sqrt{\epsilon_e}$ 值,它的精度较差,尤其在截止频率区附近误差更大。

图 4 和图 5 中的两个波导结构在几何上是对称的,因此由图 3 所示的横向等效网络也以中心平面为对称。对于具有这种特性的网络,可以把它分成两个较为简单的网络来

分析。一个是中心平面为开路面,它对应于原波导结构中电场是对称的情况;另一个是中心平面为短路面,它对应于原波导结构中电场为反对称的情况。由于无论是镜像线还是矩形介质波导其主模的电场分布在中心面上均为最大。所以,对于这两种情况,横向等效网络的中心平面显然应当取为开路。利用对称性可以大大简化计算过程,节省大量的计算机 CPU 工作时间。

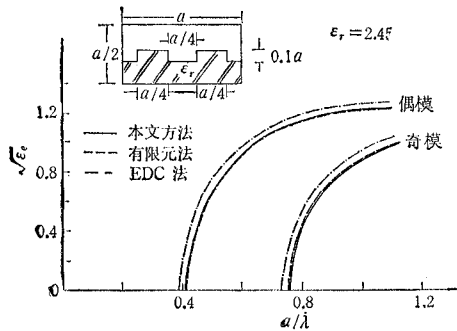


图 6 用不同方法求得的封闭耦合脊波导中最低偶模和奇模的色散曲线

计算机 CPU 工作时间。

图 6 给出了封闭耦合脊波导中最低次偶模和奇模的色散特性。这种结构有四个阶梯不连续性,考虑到结构的对称性,只要考虑其中的两个就行了。当结构中心平面内插入磁壁时,即可算得偶模的色散特性,如果中心平面插入了电壁就对应于奇模的情况。

图中的曲线再一次证实,用本文的方法可以得到与有限元法同样精确的结果。而 EDC 法的结果与精确值之间的偏差较大,最大偏差大于 20%。

四、结 论

用几种不同的方法对一大类封闭介质波导的色散特性进行了研究。表 3 给出了不同方法计算特性的比较。在作为比较的计算例子中,本文的方法共用了 15 个 TE 模和 15 个 TM 模;有限元法中用了大约 100 个节点,以确保计算精度。所有的计算都是在 VAX-780 计算机上完成的。表 3 所列的 CPU 工作时间是指每个计算点的平均值。表 3 清楚地表明,本文的方法可以得到与有限元法同样高的计算精度,又几乎保持了 EDC 方法的简便特性,是一种分析波导结构的实用而有效的方法。

表 3 不同方法计算特性的比较

方法	CPU 时间 (s)	所需内存	精度	程序结构	通用性
本文方法	30	中等	高	中等	好
有限元法	50	大	高	复杂	极好
EDC 法	10	小	低	简单	好

作者曾与纽约工学院彭松村教授进行过多次有益的讨论,深表谢意。

参 考 文 献

- [1] C. T. Lin, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981), 805—810.
- [2] 徐善驾,应用科学学报, **1**(1983)2, 135—141.
- [3] 徐善驾,通信学报, **4**(1983)3, 8—14.
- [4] Xu. Shanjia, *Journal of Electronics (China)*, **2**(1985), 30—39.
- [5] W. V. Mclevice, T. Itoh, R. Mittra, *IEEE Trans on MTT*, **MTT-23**(1975), 788—794.

- [6] S. T. Peng, A. A. Oliner, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981), 843—855.
[7] E. A. J. Marcatili, *Bell Sys. Tech. J.*, **48**(1969) 9, 2071—2102.

ANALYSIS OF CLOSED DIELECTRIC WAVEGUIDE ——MULTIMODE NETWORK APPROACH

Xu Shangjia

(*China University of Science and Technology, Hebei*)

ABSTRACT The dispersion characteristics of a class of closed dielectric waveguide are investigated by the method which combines the building-block approach of multimode network theory with rigorous mode matching procedure. Several numerical examples for different guiding structures have been given by the approach. The same structures are also analyzed with the finite element method and the EDC method for comparison. The calculations show that the present approach yields as highly accurate results as the finite element method while almost retaining the simplicity of the EDC method, and justify the utility of the present method.

KEY WORDS Closed dielectric waveguide; Multimode network method; Finite element method; EDC method