

各向异性介质在三维 ADI-FDTD 中的应用

张岩 吕善伟

(北京航空航天大学电子信息工程学院 北京 100083)

摘要 该文研究一种减小三维交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)数值色散的新方法。通过在三维空间中合理添加各向异性介质,达到调整相速的目的,从而减小数值色散,使计算结果更加精确。首先对添加各向异性介质后的三维 ADI-FDTD 迭代公式进行变形,并得到新的数值色散关系,从而求解得到各向异性介质的相对介电常数。以空心波导和具有介质不连续性的波导作为数值算例,分析不同的各向异性介质和添加方法对计算精度的影响,并与传统 ADI-FDTD 得到的结果和计算资源占用情况进行比较。结果表明通过正确选择各向异性介质和添加方法,可以有效地减小三维 ADI-FDTD 数值色散。

关键词 时域有限差分法, 隐式交替方向法, 数值色散, 各向异性介质, 波导

中图分类号: O441.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)07-1327-04

Application of Artificial Anisotropy in 3-D ADI-FDTD Method

Zhang Yan Lü Shan-wei

(School of Electronics and Information Engineering, BeiHang University, Beijing 100083, China)

Abstract Attention is focused on a new method to reduce the numerical dispersion of the 3-D Alternating-Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain(ADI-FDTD) method through artificial anisotropy. As the wave propagation can be speeded up by introducing proper anisotropy parameters into the 3-D ADI-FDTD method, the numerical dispersion can be reduced and the accuracy can be improved significantly. First, the numerical formulations of the 3-D ADI-FDTD method are modified. Secondly, the new numerical dispersion relation is derived. And consequently the relative permittivity tensor of artificial anisotropy can be obtained. In order to demonstrate the accuracy and efficiency of this new method, a hollow waveguide and a waveguide with discontinuous structure are simulated as examples. In addition the reduction of numerical dispersion is investigated as a function of the relative permittivity tensor of artificial anisotropy. Furthermore, the numerical results and the computational requirements of the proposed method are compared with those of the conventional 3-D ADI-FDTD method. It is found that this new method is accurate and efficient.

Key words Finite-Difference Time-Domain(FDTD), Alternating-Direction Implicit(ADI), Numerical dispersion, Artificial anisotropy, Waveguide

1 引言

作为一种简单有效的电磁场时域求解方法,时域有限差分法(Finite-Difference Time-Domain, FDTD)通过一次计算就可以得到系统的宽频带信息。交替方向隐式时域有限差分法(Alternating-Direction Implicit Finite-Difference Time-Domain, ADI-FDTD)是基于交替方向隐式技术(ADI)的FDTD法^[1],把ADI技术应用到FDTD的迭代公式中,采用Yee氏网格,形成隐式FDTD的表达式,这种ADI-FDTD是非条件稳定的,时间步长不再受稳定条件的限制,而是由数值色散来确定。

有限差分方法作为一种偏微分方程的数值解法,必然会造成数值色散。为了减小数值色散,在不增加计算网格密度的前提下,一般有两种方法:一种是采用高阶空间差分,另一种是添加各向异性介质。前一种方法需要特别处理不连续边界,并且无法使用高效的追赶法进行矩阵求解,这就导致计算复杂性大幅度增加,限制了其在实际工程问题中的应

用;后一种方法不存在上述问题,只需要对传统 ADI-FDTD 迭代公式进行简单变形即可。

近期国外文献[2]研究了各向异性介质在二维和三维 FDTD 中的应用,文献[3, 4]作者将各向异性介质应用于二维 ADI-FDTD,并得到很好的效果。本文首先将传统三维 ADI-FDTD 迭代公式变形,得到添加各向异性介质后的三维 ADI-FDTD 迭代公式,并推导出新的数值色散关系式,求解该式得到各向异性介质的相对介电常数。最后对空心波导和具有介质不连续性的波导两个数值算例进行仿真,选用两种不同各向异性介质计算空心波导的相速值,采用 4 种不同的添加方法得到具有介质不连续性的波导的散射参量,并分别与传统 ADI-FDTD 进行比较,结果表明本文算法可以明显有效地减小数值色散。

2 原理分析

2.1 添加各向异性介质的三维 ADI-FDTD 迭代公式

在三维空间中添加一种简单的各向异性介质($\epsilon_r = \text{diag}(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$),迭代公式作如下变形(以电场分量 E_x

为例):

(1) 从第 n 步到第 $(n+1/2)$ 步:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\mu\Delta z^2}E_x|_{i+1/2,j,k-1}^{n+1/2} + \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\mu\Delta z^2}\right)E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\
 & -\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\mu\Delta z^2}E_x|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} = E_x|_{i+1/2,j,k}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\Delta y}\left(H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^n\right) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\Delta z}\left(H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^n\right) \\
 & + \frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\mu\Delta x\Delta z}\left(E_z|_{i+1,j,k-1/2}^n - E_z|_{i,j,k-1/2}^n\right. \\
 & \left. - E_z|_{i+1,j,k+1/2}^n + E_z|_{i,j,k+1/2}^n\right) \tag{1}
 \end{aligned}$$

(2) 从第 $(n+1/2)$ 步到第 $(n+1)$ 步:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\mu\Delta y^2}E_x|_{i+1/2,j-1,k}^{n+1} + \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\mu\Delta y^2}\right)E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1} \\
 & -\frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\mu\Delta y^2}E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1} = E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \\
 & + \frac{\Delta t}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\Delta y}\left(H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}\right) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\epsilon\epsilon_x\epsilon_y\Delta z}\left(H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}\right) \\
 & + \frac{\Delta t^2}{4\epsilon\epsilon_x\epsilon_z\mu\Delta x\Delta y}\left(E_y|_{i+1,j-1/2,k}^{n+1/2} - E_y|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}\right. \\
 & \left. - E_y|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2} + E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}\right) \tag{2}
 \end{aligned}$$

另两个电场分量 E_y 和 E_z 的求解方程与式(1), (2)类似; 磁场分量的求解方程中因为不含介电常数项, 所以无需变形。

2.2 新的数值色散关系式

根据文献[5]所述的传统三维 ADI-FDTD 数值色散关系式的推导方法, 利用 MATLAB6.5 求解符号方程, 得到本文算法对应的数值色散关系简化表达式:

$$\tan^2(\omega\Delta t/2) = \left(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 + r_x^2r_y^2 + r_y^2r_z^2 + r_z^2r_x^2\right) / \left(1 + r_x^2r_y^2r_z^2\right) \tag{3}$$

其中 $r_x = c\Delta t \sin(k_x\Delta x/2) / (\epsilon_y\epsilon_z\Delta x)$, $r_y = c\Delta t \sin(k_y\Delta y/2) / (\epsilon_z\epsilon_x\Delta y)$,

$r_z = c\Delta t \sin(k_z\Delta z/2) / (\epsilon_x\epsilon_y\Delta z)$, $k_x = k \sin \theta \cos \phi$, $k_y = k \sin \theta \sin \phi$,

$k_z = k \cos \theta$ 。

3 数值算例

选用 WR-3 矩形波导作为数值算例。WR-3 波导内部截面尺寸为 $a \times b = 0.864 \times 0.432 \text{mm}^2$ 。采用均匀网格划分, 网格尺寸为 $\Delta y = 0.036 \text{mm}$, $\Delta x = \Delta z = 0.03583 \text{mm}$ 。时间步长比率 (CFLN = $\Delta t / \Delta t_{\text{CFL}}$) 分别取 1, 2 和 4, 相应地分别迭代 2000 步, 1000 步和 500 步。研究波导主模传输(217GHz~333GHz), 即源面上场值呈主模分布, 并采用软激励, 激励波形选用调制高斯脉冲 $E(x,t) = \exp[-(t-t_0)^2/2T^2] \sin(\omega_m t) \sin(\pi x/a)$, 其中 $T = \sqrt{6}/\pi(f_{\text{max}} - f_{\text{min}})$, $t_0 = 4T$, $\omega_m = \pi(f_{\text{max}} + f_{\text{min}})$ 。波导两端设置 PML 吸收边界(层数为 10 层, 理论反射系数为 10^{-6} , 幂指数为 3)。

3.1 介电常数的求解与理论分析

由于 ADI-FDTD 的慢波效应, 通常情况下 $A < 1$ ($A = c^*/c_0$, 其中 c^* 为数值相速)。为使电磁波沿坐标轴(x , y 和 z 轴)方向的数值相速与理想相速相等(在 3 个轴向满足 $A=1$), 在空间中添加各向异性介质 1, 由新的数值色散关系式(3)可以列出与 3 个轴向对应的 3 个方程, 并利用 MATLAB 求解得到介质 1 的相对介电常数(ϵ_{x1} , ϵ_{y1} , ϵ_{z1})。设添加介质 1 后的最大数值相速值为 c_{max}^* , 则最大相速误差为 $|A_{\text{max}} - 1|$, 其中 $A_{\text{max}} = c_{\text{max}}^*/c_0$ 。为使最大相速误差下降一半, 沿坐标轴方向取 $A' = 1 - |A_{\text{max}} - 1|/2$, 采用与介质 1 相同的求解方法, 得到介质 2 的相对介电常数(ϵ_{x2} , ϵ_{y2} , ϵ_{z2})。取不同时间步长时, 得到的两种介质的相对介电常数列于表 1。

当 CFLN=4 时, 由表 1 中的相对介电常数值, 代入新的数值色散关系式, 可以计算得到添加两种介质的各个方向的理论相对相速值, 结果如图 1 所示。

由图 1(b), 1(c)可看出, 当 CFLN = 4 时, 理论相对相速最大值沿($\theta = 55^\circ$, $\phi = 45^\circ$)方向, 最小值沿($\theta = 0^\circ$, $\phi = 0^\circ$)方向。介质 1 对应的理论相对相速最大值为 1.006722, 最小值为 1, 理论最大相对相速误差为 0.6722%; 介质 2 对应的理论相对相速最大值为 1.003343, 最小值为 0.996639, 理论最大相对相速误差为 0.3361%, 由上述分析可看出, 添加介质 2 得到的理论最大相对相速误差比介质 1 小。

表 1 不同时间步长的两种介质的相对介电常数(频率取 217GHz)

Tab.1 ϵ_r of two kinds of dielectric media as functions of the time-step size ($f=217\text{GHz}$)

相对介电常数	时间步长		
	Δt_{CFL}	$2\Delta t_{\text{CFL}}$	$4\Delta t_{\text{CFL}}$
介质 1 (ϵ_{x1} , ϵ_{y1} , ϵ_{z1})	0.99907167363531	0.99796053674422	0.99349360956615
	0.99908219261158	0.99797104402161	0.99350406981238
	0.99907167363531	0.99796053674422	0.99349360956615
介质 2 (ϵ_{x2} , ϵ_{y2} , ϵ_{z2})	0.99934883192501	0.99851519113767	0.99516354911281
	0.99935936553150	0.99852572770971	0.99517409775831
	0.99934883192501	0.99851519113767	0.99516354911281

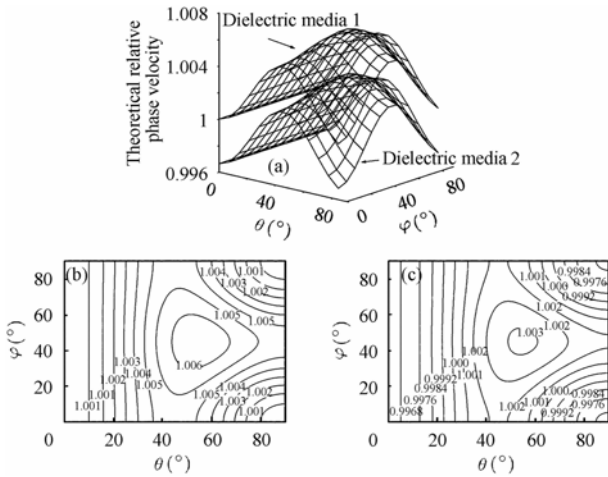


图 1 由两种介质得到的理论相对相速值(CFLN 取 4)
(a) 两种介质 (b) 介质 1 (c) 介质 2

Fig.1 Theoretical relative phase velocity of two kinds of dielectric media (CFLN=4) (a)Two kinds of dielectric media (b) Dielectric media 1 (c) Dielectric media 2

3.2 空心波导的相速值

网格数取为 $24 \times 120 \times 12$, 采用传统 GRT 法^[6]用来减小吸收边界的反射, 即分别仿真两个子波导, 其中一个子波导长 $120\Delta y$, 源面置于 $10\Delta y$, 参考面 1 和 2 分别置于 $100\Delta y$ 和 $110\Delta y$; 另一个子波导长 $110\Delta y$, 源面置于 $10\Delta y$, 参考面 3 置于 $100\Delta y$ 。

比较两种各向异性介质对相速的影响, 分别在波导内部添加介质 1 和 2(记为 ADI-FDTD+GRT(*i*), *i* 为第 *i* 种介质), 仿真得到相速值, 并利用理想相速值得到相对相速值, 与传统 ADI-FDTD+GRT 仿真结果对比绘于图 2。

由图 2 可看出, 当 CFLN = 2, 4 时, 添加两种介质之后, 的仿真结果比介质 2 精确。因为本文算例为波导问题, 主模数值色散都有不同程度地减小。值得注意的是, 添加介质 1

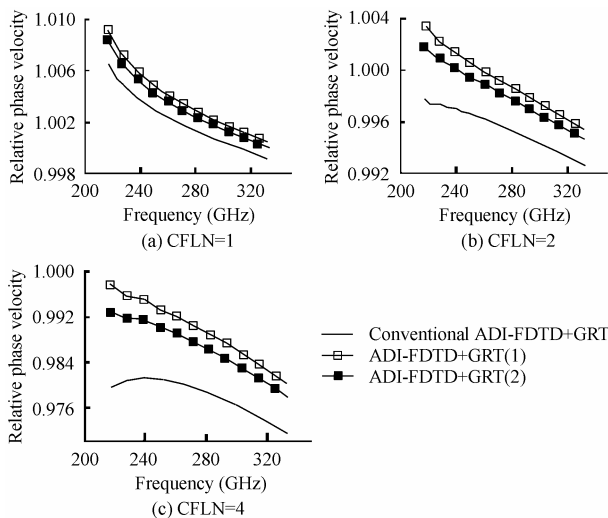


图 2 两种介质在不同 CFLN 时的相对相速值

Fig.2 Relative phase velocity of the two kinds of dielectric media as functions of the CFLN

传输方向为 *y* 轴, 虽然介质 2 的最大相对相速误差比介质 1 小, 但在沿 *y* 轴方向上, 由介质 1 得到的相对相速值分别为 1.00000006(CFLN = 2)和 0.99999999(CFLN = 4), 而由介质 2 得到的相对相速值分别为 0.99888685(CFLN = 2)和 0.99663917(CFLN = 4), 可见选用介质 1 更加合适。

3.3 具有介质不连续性的波导的散射参量

选用 Arndt 在文献[7]中所用算例, 在 WR-3 波段中中部均匀填充相对介电常数 ϵ_r 为 3.7 的介质材料, 介质块尺寸为 $a \times b \times c = 0.864 \times 0.432 \times 0.504 \text{mm}^3$, 波导长度取为 1.368mm, 网格数为 $24 \times 38 \times 12$ 。采用改进 GRT 法, 即源面置于 $3\Delta y$, 参考面 1, 2 和 3 分别置于 $1\Delta y, 37\Delta y$ 和 $1\Delta y$ 。

比较 4 种添加各向异性介质的方法对计算精度的影响。4 种方法分别为: (1)在波导内部完全添加介质 1; (2)在波导内部完全添加介质 2; (3)在波导内部空气部分添加介质 1, 在不连续介质材料部分添加介质 3(采用类似 3.1 节中所述方法得到); (4)在波导内部空气部分添加介质 2, 在不连续介质材料部分添加介质 4(采用类似 3.1 节中所述方法对介质 3 进行处理得到)。4 种方法(记为 ADI-FDTD+GRT(*i*), *i* 为第 *i* 种方法)与传统 ADI-FDTD+GRT 得到的散射参量对比绘于图 3。

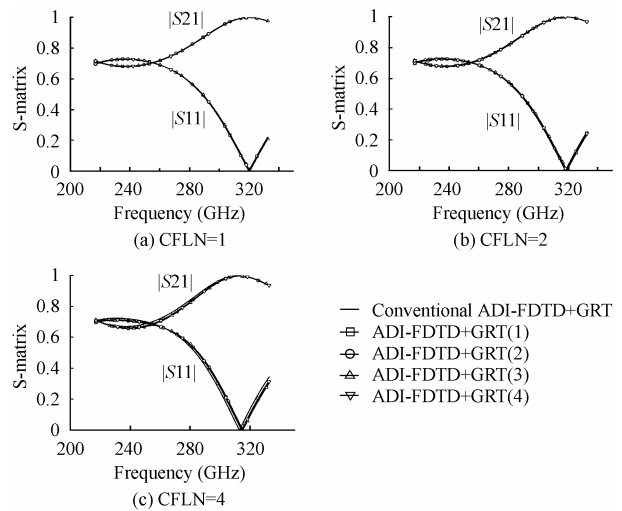


图 3 4 种添加方法在不同 CFLN 时的散射参量比较

Fig.3 S-matrix of 4 kinds of method as functions of the CFLN

由图 3(c)可看出, 当 CFLN = 4 时, 由于色散误差随时间步长增大而迅速增加, 即使通过添加各向异性介质也无法完全消除数值色散(但比传统 ADI-FDTD+GRT 得到的结果精确)。4 种不同添加方法和传统 ADI-FDTD+GRT 的计算精度比较列于表 2, 精度分为 A-D4 级, A 级最好。

由表 2 可比较看出, 第 3 种添加方法的计算精度最高。

3.4 计算资源占用情况

测试平台为 P4 处理器(主频 2GHz), DDR266 内存(1GB), 操作系统为 Windows2000, 计算程序由 Fortran 语言编写, 编译器为 Fortran PowerStation 4.0。添加各向异性介质的

表2 4种添加方法与传统算法的计算精度比较
Tab.2 Accuracy comparison between 4 kinds of method and the conventional method

算法		计算精度		
		CFLN=1	CFLN=2	CFLN=4
本文算法	ADI-FDTD+GRT(1)	C	C	B
	ADI-FDTD+GRT(2)	D	D	D
	ADI-FDTD+GRT(3)	A	A	A
	ADI-FDTD+GRT(4)	B	B	C
传统 ADI-FDTD+GRT		E	E	E

ADI-FDTD+GRT 与传统 ADI-FDTD+GRT 对计算资源占用情况列于表3。对于计算散射参量程序, 选用精度最高的 ADI-FDTD+GRT(3)与传统 ADI-FDTD+GRT 进行比较。

从表3数据可知, 添加各向异性介质的 ADI-FDTD 占用的内存量与传统 ADI-FDTD 大致相当; 由于引入了额外的浮点运算, 运行时间约为传统算法的1.2~1.3倍。

表3 本文算法与传统算法的资源占用情况比较

Tab.3 Computational requirements comparison between the proposed method and the conventional method

算法	CFLN	计算相速值程序		计算散射参量 [S]程序	
		内存 (MB)	CPU 时间(s)	内存 (MB)	CPU 时间 (s)
各项异性介质 ADI-FDTD	1	13.76	1152	7.156	381
	2	同上	576	同上	190
	4	同上	283	同上	93
传统 ADI-FDTD	1	13.776	944	7.156	298
	2	同上	472	7.152	148
	4	同上	233	同上	74

4 结束语

本文通过在三维空间中合理添加各向异性介质, 使三维

ADI-FDTD 数值色散明显减小。但当时间步长较大时, 无法完全消除由时间步长引入的数值色散。不同的各向异性介质及添加方法, 会不同程度地影响计算结果, 可根据具体算例, 通过合理选用各向异性介质和添加方法, 得到比较满意的结果。本文算法不会造成计算内存资源的增加, 但由于引入了相对介电常数的浮点运算, 计算时间有所增长。

参考文献

- [1] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method[J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 1999, 47(10): 2003-2007.
- [2] Juntunen J S, Tsiboukis T D. Reduction of numerical dispersion in FDTD method through artificial anisotropy[J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 2000, 48(4): 582-588.
- [3] 刘波, 任武, 高本庆, 等. 一种有效减少 ADI-FDTD 数值色散的方法[J]. *微波学报*, 2003, 19(2): 19-23.
- [4] Zhao Anping. Improvement on the numerical dispersion of 2-D ADI-FDTD with artificial anisotropy[J]. *IEEE Microwave and Wireless Components Lett.*, 2004, 14(6): 292-294.
- [5] Zheng Fenghua, Chen Zhizhang. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD Method[J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 2001, 49(5): 1006-1009.
- [6] Lin X P, Naishadham K. A simple technique for minimization of ABC-induced error in the FDTD analysis of microstrip discontinuities[J]. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 1994, 4(12): 402-404.
- [7] Krupzevic D V, Brankovic V J, Arndt F. The wave-equation FD-TD method for the efficient eigenvalue analysis and S-matrix computation of waveguide structures[J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory Tech.*, 1993, 41(12): 2109-2115.

张岩: 男, 1980年生, 博士生, 从事天线设计和数值计算工作。
吕善伟: 男, 1937年生, 教授, 博士生导师, 长期从事微波航空及宇航天线、微波通信系统方面教学和科研工作。