

# 点单元电流模型的数值计算方法\*

戴世雄\*\* 鲁述

(武汉大学空间物理系, 武昌)

**摘要** 本文提出了一种新的积分计算方法, 消除了面块模型方法积分计算中的伪奇点, 有效地解决了高频情况下积分的数值计算, 为将面块模型方法应用于高频问题提供了理论依据。

**关键词** 近场问题; 面块模型方法; 阻抗矩阵; 数值积分

## 1. 引言

面块模型方法是计算导体表面感应电流分布最有效的方法之一。它将导体表面用许多小面元来近似, 将导体表面感应电流用模拟面上电流基函数的线性叠加来近似, 利用EFIE/MM来计算电流分布的数值解。建立面电流模型是面块模型计算方法中最关键的一环, 它决定着表面电流计算的精度。当面块模型方法运用于近似计算高频问题时, 矩量法广义阻抗矩阵元素的积分计算则具有十分重要的意义。本文所提出的一种计算积分的新方法, 它不仅消除了奇异的积分核, 而且还便于高频情况下积分值的计算, 为将面块模型方法应用于近似计算高频问题奠定了基础。

## 2. 矩量法广义阻抗矩阵元素的积分计算

研究文献[1,2]不难发现, 它们相应的广义阻抗矩阵元素都包含着以下三个积分:

$$I = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_{\Delta}} (e^{-ikR}/R) dS' \quad (1)$$

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_{\Delta}} \xi(e^{-ikR}/R) dS' \quad (2)$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_{\Delta}} \eta(e^{-ikR}/R) dS' \quad (3)$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_{\Delta}} \zeta(e^{-ikR}/R) dS' = I - I_1 - I_2 \quad (4)$$

其中  $k$  为波矢量,  $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ ;  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{r}$  为观察点位置矢量,  $\mathbf{r}'$  为源

1990年3月10收到, 1990年9月8日修改定稿。

\* 国家自然科学基金资助课题。

\*\* 现在武汉船舶研究所工作。

点位置矢量;  $(\xi, \eta, \zeta)$  为  $r'$  点在源三角形面块  $S_\Delta$  内相应于三角形三顶点的归一化面积坐标;  $\Delta$  为  $S_\Delta$  的面积.

将(1)–(4)式一般性地写为

$$I_f = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_\Delta} f(\mathbf{r}') (e^{-ikR}/R) dS' \quad (5)$$

(5)式的积分核存在一伪奇点  $R = 0$ . 为了消除该伪奇点对积分计算的影响, Rao 等<sup>[2]</sup>将该积分作了如下变形:

$$I_f = \frac{1}{\Delta} \iint_{S_\Delta} f(\mathbf{r}') [(e^{-ikR} - 1)/R] dS' + \frac{1}{\Delta} \iint_{S_\Delta} [f(\mathbf{r}')/R] dS'$$

对前一项积分采用高斯积分法计算, 后一项则采用解析法计算. 这种处理方法对于电小天线的计算是十分有效的, 因而被广泛采用. 设  $R_0$  为  $S_\Delta$  的中心到  $r$  的距离,  $\Delta l$  为  $S_\Delta$  的线度. 在用面块模型方法近似计算高频问题时, 将有  $\Delta l/\lambda \gg 1$ , 因而当  $R_0 \ll 1$  时前一项积分的计算误差将显著增大, 这时面块模型方法将完全失效. 为了解决这一问题, 我们提出了一种新的积分计算方法.

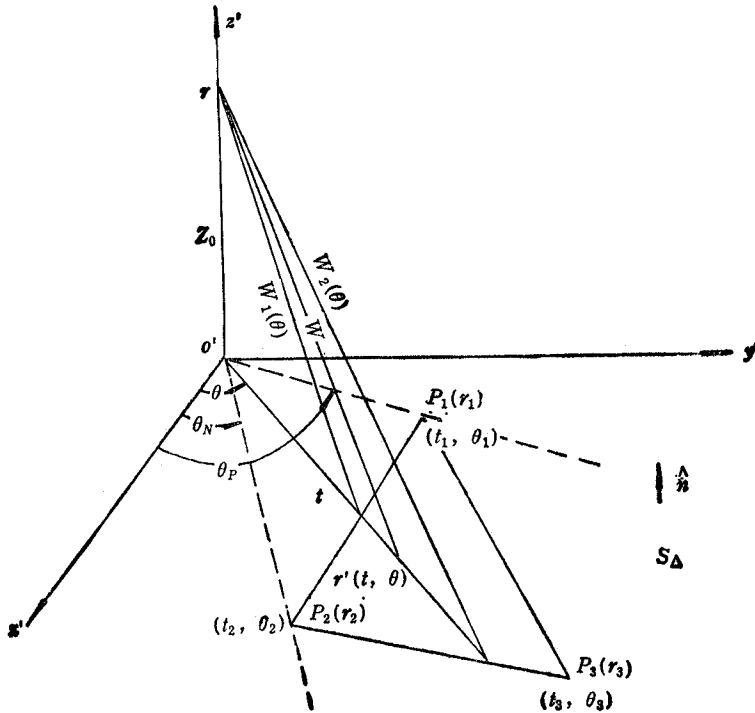


图 1

设源三角形面块三顶点  $P_1, P_2, P_3$  的位置矢量为  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ , 观察点位置矢量为  $\mathbf{r}$ , 源三角形面块所在平面  $S_\Delta$  的正法向为  $\hat{n}$ . 过  $\mathbf{r}$  作  $S_\Delta$  的垂线, 交  $S_\Delta$  于  $o'$  点,  $\mathbf{r}$  到  $S_\Delta$  的距离为  $Z_0$ , 过  $o'$  作轴  $o'\mathbf{x}' \parallel P_1P_2$ , 过  $o'$  以  $\hat{n}$  为方向矢量作轴  $o'\mathbf{z}'$ , 建立坐标系  $o'-\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ .

在  $x'o'y'$  平面上以  $o'x'$  为极轴, 建立平面极坐标系  $(t, \theta)$  (图 1). 在该平面极坐标系下  $\triangle P_1P_2P_3$  内各点所处的极角范围为  $[\theta_N, \theta_P]$ .

将(5)式积分的面积元写为  $dS' = t dt d\theta$ , 因  $R = |r - r'| = \sqrt{t^2 + Z_0^2}$ , 故

$$e^{-ikR}/R = (e^{-ik\sqrt{t^2+Z_0^2}}/\sqrt{t^2+Z_0^2})t dt d\theta \quad (6)$$

令  $w = \sqrt{t^2 + Z_0^2}$ , 故  $w dw = t dt$  代入(6)式得

$$(e^{-ikR}/R)dS' = (e^{-ikw}/w)w dw d\theta = e^{-ikw} dw d\theta \quad (7)$$

于是(5)式可写为

$$I_f = \frac{1}{\Delta} \int_{\theta_N}^{\theta_P} \int_{w_1(\theta)}^{w_2(\theta)} f(w, \theta) e^{-ikw} dw d\theta \quad (8)$$

其中  $f(w, \theta)$  为  $\xi, \eta, \zeta$  以  $w, \theta$  为自变量时的表达式.

由归一化面积坐标系的定义,  $\triangle P_1P_2P_3$  所对应的归一化面坐标  $(\xi, \eta, \zeta)$  相应的  $(t, \theta)$  表达式分别为

$$\xi(t, \theta) = (1/2\Delta)\{t[t_2 \sin(\theta_2 - \theta) + t_3 \sin(\theta - \theta_3)] + t_2 t_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)\} \quad (9)$$

$$\eta(t, \theta) = (1/2\Delta)\{t[t_3 \sin(\theta_3 - \theta) + t_1 \sin(\theta - \theta_1)] + t_3 t_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)\} \quad (10)$$

$$\zeta(t, \theta) = (1/2\Delta)\{t[t_1 \sin(\theta_1 - \theta) + t_2 \sin(\theta - \theta_2)] + t_1 t_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\} \quad (11)$$

因而归一化面积坐标的表达式可一般性地写为

$$f(w, \theta) = (1/2\Delta)[\sqrt{w^2 - Z_0^2} g(\theta) + h] \quad (12)$$

将(12)式代入(8)式得

$$I_f = \frac{1}{\Delta} \int_{\theta_N}^{\theta_P} \left[ \frac{g(\theta)}{2\Delta} \int_{w_1(\theta)}^{w_2(\theta)} \sqrt{w^2 - Z_0^2} e^{-ikw} dw + \frac{jh}{2k\Delta} (e^{-ikw_2(\theta)} - e^{-ikw_1(\theta)}) \right] d\theta \quad (13)$$

将积分  $I_f$  的两个积分核分别写为

$$k_1(k, w) = \sqrt{w^2 - Z_0^2} e^{-ikw} \quad (14)$$

$$k_2(k, w) = \frac{g(\theta)}{2\Delta} \int_{w_1(\theta)}^{w_2(\theta)} \sqrt{w^2 - Z_0^2} e^{-ikw} dw + \frac{jh}{2k\Delta} (e^{-ikw_2(\theta)} - e^{-ikw_1(\theta)}) \quad (15)$$

下面我们来分析一下当  $k$  变化时, 积分核  $k_1(k, w)$ ,  $k_2(k, w)$  随自变量的变化情况.

因

$$dk_1(k, w)/dw = (w/\sqrt{w^2 - Z_0^2})e^{-ikw} + (-ik)\sqrt{w^2 - Z_0^2}e^{-ikw}$$

故

$$|dk_1(k, w)/dw| \leq M_1(\theta) + kM_2(\theta) \quad (16)$$

其中  $M_1(\theta)$ ,  $M_2(\theta)$  为当  $w$  在  $[w_1(\theta), w_2(\theta)]$  内变化时,  $|w|/\sqrt{w^2 - Z_0^2}$  和  $\sqrt{w^2 - Z_0^2}$  的最大值.

由(16)式可知, 当  $k$  增大时  $k_1(k, w)$  将会成为  $w$  的快变函数, 因此, 对  $k_1(k, w)$  采用 Filon 积分进行计算为最优. 因

$$\frac{dk_2(k, \theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{g(\theta)}{2\Delta} \int_{w_1(\theta)}^{w_2(\theta)} \sqrt{w^2 - Z_0^2} e^{-ikw} dw \right\} + h e^{-ikw_2(\theta)} w'_2(\theta) - h e^{-ikw_1(\theta)} w'_1(\theta)$$

易得  $|dk_2(k, \theta)/d\theta| \leq M(\theta)$

其中  $M(\theta)$  为与  $k$  无关的正数。因此, 当  $k$  增大时,  $k_2(k, \theta)$  不会变成  $\theta$  的快变函数, 易于计算。

### 3. 结语

本文提出了一种新的积分计算方法, 有效地解决了高频情况下积分的数值计算, 为将面块模型方法应用于近似计算高频问题提供了理论基础。最后, 我们采用了该积分方法计算了平面正方块在平面波垂直入射时导体表面的电流分布, 其计算结果与 Rao 等的结果<sup>[2]</sup>吻合较好(图 2)。

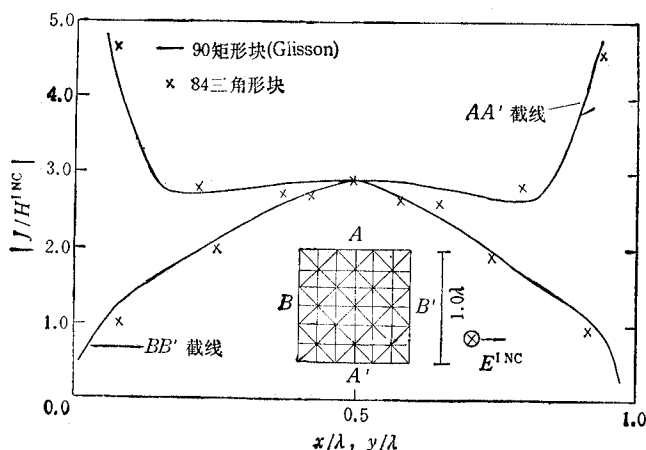


图 2

### 参 考 文 献

- [1] 戴世雄, 鲁述, 电子科学学刊, 12(1990)4, 369—377.  
 [2] S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, *IEEE Trans. on AP*, AP-30 (1982) 3, 409—418.

## NUMERICAL COMPUTING TECHNIQUE OF NODE UNIT CURRENT MODEL

Dai Shixiong                      Lu Shu  
 (Wuhan University, Wuchang)

**Abstract**                      The characteristics of numerical computation of node unit current model is investigated, and new method for computing integrals of surface patch modeling is presented. Using this method, the pseudosingular point in integral calculation is eliminated, and an efficient technique for computing integral in high frequency condition is provided. The numerical computing technique developed provides theoretical basis for applying the node unit current model to high frequency problems.

**Key words**                      Near-field problem; Surface patch method; General impedance matrix; Numerical integration