

论证电子回旋脉塞动力学理论的两种方法*

王昌标 涂剑南 蒋华北 孙雁
(成都电讯工程学院)

摘 要

近几年来,由刘盛纲(1979,1981)发展的以回旋中心坐标系中场的局部展开为基础的电子回旋谐振受激辐射的动力学理论,已形成一个理论体系。本文简要地阐述了建立回旋中心坐标系的数学依据和物理解释。文中通过回旋中心坐标系法和波导轴坐标系法,分别对单动量轴对称电子注和圆波导中 TE_{mn} 模式场的相互作用进行了计算,严格地导出了相同的色散方程。文中还指出了万遂人(1985)文章中存在的若干问题。

一、引 言

众所周知,电子回旋脉塞动力学理论是用统计力学的方法研究波导系统中电子注与高频场互作用的理论。具体地说,就是在波导系统中求解线性化符拉索夫(Власов)方程。波动方程的源项,即扰动电流密度 \mathbf{J}_1 是通过统计力学的方法得到的。因此,无论是回旋中心坐标系法,还是波导轴坐标系法,推导色散方程都是采用直接推导方法,即选定平衡分布函数 f_0 ,沿特征线积分得到扰动分布函数 f_1 ,在动量空间积分得到扰动电流密度 \mathbf{J}_1 ,在波导截面积分得到色散方程。

在本文第二节中,简述了推导色散方程的数学模型。第三节讨论了平衡分布函数和回旋中心坐标系的建立。第四节给出了回旋中心坐标系法的色散方程的推导。第五节讨论了波导轴坐标系法推导色散方程的过程。第六节指出了文献[4]在推导色散方程过程中存在的若干问题,并分析了出现这些问题的原因。

二、数 学 模 型

按文献[1—3]所述,可以得零级近似下扰动场的色散方程

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \mathbf{E}_{1\perp} \cdot \mathbf{E}_{1\perp}^* R dR \\ & = -j\mu_0\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_0-r_{c0}}^{R_0+r_{c0}} \mathbf{J}_{1\perp} \cdot \mathbf{E}_{1\perp}^* R dR. \end{aligned} \quad (1)$$

按统计力学的方法求出上式中扰动电流密度

* 1985年12月3日收到,1986年6月30日修改定稿。

$$\mathbf{J}_{1\perp} = e \int f_1 \mathbf{v}_\perp d^3 \mathbf{p}, \quad (2)$$

f_1 是线性符拉索夫方程的解.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_0} \cdot \nabla f_1 + (e\mathbf{v} \times B_0 \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3)$$

f_0 是满足平衡态符拉索夫方程

$$\frac{\mathbf{p}}{\gamma m_0} \cdot \nabla f_0 + (e\mathbf{v} \times B_0 \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (4)$$

与 z 无关的轴对称解.

以上各式中出现的量: m_0 是电子静止质量, e 是电子电量, B_0 是外加恒定轴向磁场, \hat{z} 是 z 轴单位矢量, a 是波导半径, k_c 是截止波数, k_z 是纵向波数, $2r_{e0}$ 是单动量电子注厚度, R_0 是电子注平均半径, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是相对论因子, $\beta = \frac{v}{c}$, v 是电子速度, c 是真空中光速.

TE_{*m*m} 波导模式场由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= 0, & H_{1z} &= k_c^2 J_m(k_c R) e^{im\varphi}; \\ E_{1R} &= -\mu_0 \omega \frac{m}{R} J_m(k_c R) e^{im\varphi}, & H_{1R} &= ik_c k_z J'_m(k_c R) e^{im\varphi}; \\ E_{1\varphi} &= -j\mu_0 \omega k_c J'_m(k_c R) e^{im\varphi}, & H_{1\varphi} &= -k_z \frac{m}{R} J_m(k_c R) e^{im\varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中略去了因子 $e^{j(k_z z - \omega t)}$.

利用 (5) 式, 不难求得

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \mathbf{E}_{1\perp} \cdot \mathbf{E}_{1\perp}^* R dR = \pi(\omega\mu_0)^2 [(k_c a)^2 - m^2] J_m^2(k_c a). \quad (6)$$

三、平衡分布函数 f_0 和回旋中心坐标系

平衡态符拉索夫方程(4)的特征方程组的六个积分常数是

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= m_0 \omega_{c0} (r_c \sin \phi - R \cos \varphi), \\ c_2 &= (m_0 \omega_{c0})^2 (r_c^2 \cos^2 \phi + 2Rr_c \sin \phi \cos \varphi - R^2 \cos^2 \varphi), \\ c_3 &= R \sin \varphi + r_c \cos \phi, \\ c_4 &= p_z, \\ c_5 &= z - \frac{p_z}{m_0 \omega_{c0}} \phi, \\ c_6 &= f_0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中

$$\omega_{c0} = \frac{B_0 |e|}{m_0}, \quad r_c = \frac{p_\perp}{m_0 \omega_{c0}}. \quad (8)$$

由 (7) 式不难看出, 横向动量 p_\perp , 正则角动量 p_φ , 相对论因子 γ , 回旋中心半径 R_g , 回旋中心角向坐标 φ_g , 都由积分常数构成;

$$\left. \begin{aligned} p_{\perp} &= c_1^2 + c_2, \\ P_{\varphi} &= \frac{1}{2eB_0} [(eB_0)^2 c_3^2 - c_2], \\ \gamma &= \frac{1}{m_0 c^2} \sqrt{(c_1^2 + c_2 + c_3^2) c^2 + m_0^2 c^4}, \\ R_g \cos \varphi_g &= -\frac{c_1}{m_0 \omega_{c0}}, \\ R_g \sin \varphi_g &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

令

$$\theta = \phi - \frac{\pi}{2}, \quad (10)$$

把(7)式中的 c_1 和 c_3 代入(9)式中的最后两式,并注意到(10)式,得

$$\left. \begin{aligned} R_g \cos \varphi_g &= R \cos \varphi - r_c \cos \theta, \\ R_g \sin \varphi_g &= R \sin \varphi - r_c \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

根据一阶偏微分方程理论,积分常数的组合,还是积分常数;以积分常数为独立变量的任意函数都可以用来构造平衡态符拉索夫方程的解.考虑到环形电子注的轴对称性以及纵向均匀性,我们选取如下的解,

$$f_0 = \frac{N_0}{4\pi^2 p_{\perp 0} R_0} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_z - p_{z0}) \delta(R_g - R_0) \quad (12)$$

作为单动量轴对称电子注的平衡分布函数.(12)式中 N_0 为轴向电子线密度; $p_{\perp 0}$ 、 p_{z0} 、 R_0 是平衡态参量.显然,(12)式与 z 无关,它的轴对称性可以通过对动量空间的积分看出,

$$\int f_0 d^3 \mathbf{p} = \frac{N_0}{\pi^2} \frac{H(R - |R_0 - r_{c0}|) H(R_0 + r_{c0} - R)}{\sqrt{4R_0^2 r_{c0}^2 - (R_0^2 + r_{c0}^2 - R^2)^2}},$$

式中 H 是阶跃函数.

扰动分布函数满足(3)式,它在特征线上构成全微分.利用初始条件沿特征线积分,得

$$f_1 = - \int_{-\infty}^t e(\mathbf{E}'_i + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'_i) \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_0 d t'. \quad (13)$$

如图1所示,(11)式在波导截面上有明确的物理意义: (R_g, φ_g) 是电子回旋中心在波导轴坐标系中的坐标, r_c 是回旋半径, θ 是电子的回旋角,这些量构成一个回旋中心坐标系.电子以角速度 $\omega_c = \omega_{c0}/\gamma$ 绕原点 O' 作圆周运动.不难证明,平衡态符拉索夫方程特征方程组的积分常数在扰动分布函数 f_1 的特征线上恒取初值.因此在回旋中心坐标系中,(13)式沿特征线积分相当于沿电子绕原点向前运动的等速螺旋轨道积分.在回旋中心坐标系中,这条等速螺旋线参数方程特别简单: $r'_c = r_c$, $\theta' = \theta + \omega_c(t' - t)$, $z' = z + v_z(t' - t)$.因此,只要把(13)式的被积函数用回旋中心坐标系的量表出,就很容易完成沿特征线积分.必须强调指出,回旋中心坐标系的坐标原点位于波导轴坐标系中的 (R_g, φ_g) 点,而不是象文献[4]所理解的那样,位于 $R = R_0$ 的柱面上.因此文献[4]认为文献[1—3]沿着一条特定的特征线积分是没有根据的.

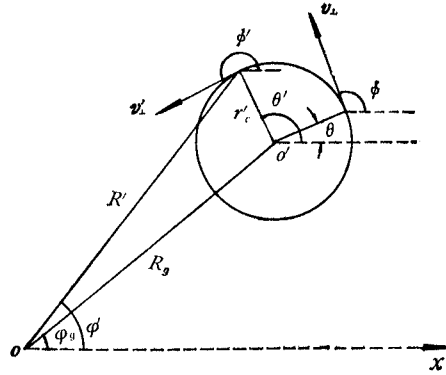


图 1

根据(5)式,利用贝塞耳(Bessel)函数加法公式,

$$J_m(k_c R) e^{jm\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{m-l}(k_c R_g) e^{j(m-l)\varphi_g} J_l(k_c r_c) e^{jl\theta}, \quad (14)$$

可以得到场分量在回旋中心坐标系中的表达式:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\omega \mu_0 \sum_l \frac{l}{r_c} J_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g), \\ E_\theta &= -j\omega \mu_0 k_c \sum_l J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g), \\ E_z &= 0, \\ H_r &= jk_z k_c \sum_l J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g), \\ H_\theta &= -k_z \sum_l \frac{l}{r_c} J_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g), \\ H_z &= k_c^2 \sum_l J_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_g). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15)式中各式都略去了因子 $e^{j(k_z z - \omega t) + j(m-l)\varphi_g + jl\theta}$.

把(15)式代入(13)式,完成沿电子的等速螺旋轨道积分,就得到扰动分布函数,

$$\begin{aligned} f_1 &= -k_c \mu_0 e \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{j(k_z z - \omega t) + j(m-l)\varphi_g + jl\theta} \\ &\times \left\{ J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \left[\frac{(\omega - k_z v_z)}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_z v_\perp}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \right. \\ &\left. - \frac{1}{m_0 \omega_{c0}} \left[J'_{m-l}(k_c R_g) J_l(k_c r_c) + \frac{r_c (m-l) \omega_c}{R_g \Omega_l} J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \right] \frac{\partial f_0}{\partial R_g} \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

式中 $\Omega_l = \omega - k_z v_z - l\omega_c$.

回旋中心坐标系的独特优点还表现在对电子与波相互作用机理的解释上.

在回旋中心坐标系中,波导模式场是由无限多个“回旋谐波”所组成.第 l 次回旋谐波的电场的角向分量是

$$E_\theta^{(l)} = -j\omega \mu_0 k_c [J_{m-l}(k_c R_g) e^{j(m-l)\varphi_g}] J'_l(k_c r_c) e^{jl\theta + j(k_z z - \omega t)}. \quad (17)$$

对于回旋电子,这个场的相因子是

$$e^{i(l\omega_c + k_z v_z - \omega)t}$$

因此当 $l\omega_c + k_z v_z - \omega \lesssim 0$ 时, 电子与第 l 次回旋谐波同步, 产生群聚. 第 l 次回旋谐波的电场角向分量的振幅正比于 $|J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c)|$, 因此对于高次回旋谐波, 场强很弱(通常 $k_c r_c$ 很小), 与电子注有效换能很少. 一般说来只选取电子与低次回旋谐波同步. 在整个波导系统中, 所有的回旋谐波是一个整体, 不可能存在单次回旋谐波的情况. 当电子与某一次回旋谐波作用时, 电子注把能量交给场, 必然使整个波导场得到放大. 那么与电子注不同步的那些回旋谐波是如何获得能量的呢? 这是因为在回旋谐振系统中, 各次回旋谐波的幅值存在一定的关系. 与电子注同步的那次回旋谐波从电子注中取得能量, 然后通过耦合, 把能量转交给其它的回旋谐波, 从而使整个波导模式场得到放大. 从另一方面看, 只有各次回旋谐波按同一比例放大, 才能使整个波导模式场满足原来的边界条件. 这类似于慢波系统中的空间谐波.

从上面的讨论可知, 在回旋中心坐标系中, 沿特征线积分就成了沿电子运动的螺旋轨道积分; 电子回旋脉塞的不稳定性, 可解释成电子与回旋谐波的同步作用; 这给出了一幅清晰的物理图象.

以上的分析都建立在利用贝塞耳函数加法公式得到的场展开式上, r_c 和 θ 都被看成描述电子回旋运动的坐标变量. 但在动量空间积分时, r_c 、 θ 看作什么量呢? R_g 、 φ_g 又是什么量呢? 由 (8)、(10) 和 (11) 式不难看出, r_c 和 θ 都是动量变量, R_g 和 φ_g 既是动量变量 p_\perp 、 ϕ 的函数, 又是坐标变量 R 、 φ 的函数. 为什么在场展开式中 r_c 、 θ 可以看成坐标变量, 而在动量空间积分时, 又把它们作为动量变量处理呢? 事实上, 这是根本不同的两个概念. 在场展开式 (15) 中, 是借助于关系式 (11) 和贝塞耳函数加法公式 (14)、把场随 R 、 φ 的变化规律, 通过 R_g 、 φ_g 表示成随 r_c 、 θ 的变化规律. 根据 (11) 式, 把 R_g 、 φ_g 看成不变时, R 、 φ 与 r_c 、 θ 之间构成一一对应关系. 因此可以用 r_c 和 θ 来描述波导截面上点的位置. 也就是说, 在场展开式 (15) 中可以用 r_c 、 θ 来描述场的分布. 而在沿特征线积分时, R_g 和 φ_g 恰恰又是积分常数, 不参与对 t' 的积分, 因此 r_c 、 θ 又可以用来描述回旋电子的运动状态. 但当对动量空间积分时, 是对物理量在动量空间求平均值, 这又是另一个概念. 根据 (8)、(10) 和 (11) 式的定义, r_c 和 θ 本来就是动量变量, R_g 和 φ_g 本来就是动量的函数, 为什么不参与动量空间积分呢? 显然不参与积分是没有理由的. 事实上, 若不考虑物理解释, 推导色散方程就是一种纯数学运算. 回旋中心坐标系法为自身独特的、正确的数学运算过程赋予了确切的物理解释, 给出了一幅电子与波相互作用的清晰图象. 文献[4]没有理解回旋中心坐标系法的物理含义, 反认为文献[1—3]混淆了动量空间和坐标空间的变量; 最后按照自己的错误理解, 推导了一个零色散方程来证明回旋中心坐标系法是不正确的; 这是没有道理的.

四、回旋中心坐标系法色散方程的推导

本节给出回旋中心坐标系法推导色散方程的过程.

把 (2)、(6) 式代入 (1) 式, 得

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 = \frac{-je}{2\pi\omega\mu_0 N_{mn}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_0-r_{c0}}^{R_0+r_{c0}} R dR \mathbf{E}_{1L}^* \cdot \int f_1 \mathbf{v}_\perp d^3\mathbf{p}, \quad (18)$$

式中

$$N_{mn} = \frac{1}{2} (k_c^2 a^2 - m^2) J_m^2(k_c a), \quad (19)$$

f_1 由 (16) 式给出. f_1 中含有分布函数 f_0 . f_0 是一广义函数, 本身已描述了电子注外无电子这一物理事实. 因此, 无须把 (18) 式积分限制在电子注截面内, 完全可以把它延伸到电子注截面所在的无穷大平面上. 这种积分区域的延伸, 并不会改变积分值, 却使得以下积分换元后的正交性得以利用. 因此 (18) 式可以改写为

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 = \frac{-je}{2\pi\omega\mu_0 N_{mn}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} R dR \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} p_\perp dp_\perp (f_1 v_\perp E_\theta^*). \quad (20)$$

如果忽略电子注的边缘效应, 则上式波导截面积分和动量空间积分次序是可以交换的. 把 (15)、(16) 式代入 (20) 式, 并按 (11) 式作积分换元,

$$R dR d\varphi = R_g dR_g d\varphi_g, \quad (21)$$

然后利用对 φ_g 积分的正交性, 就得到

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 = & -\frac{2\pi\mu_0 k_c^2 e^2}{N_{mn}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{+\infty} v_\perp p_\perp dp_\perp \int_0^{+\infty} R_g dR_g \\ & \times \left\{ J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \left[\frac{(\omega - k_z v_z)}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_z v_\perp}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \right. \\ & - \frac{1}{m_0 \omega_{c0}} \left[J'_{m-l}(k_c R_g) J_l(k_c r_c) + \frac{r_c(m-l)\omega_c}{R_g \Omega_l} J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \right] \\ & \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial R_g} \right\} J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c). \end{aligned} \quad (22)$$

把平衡分布函数 f_0 代入, 并设

$$v = \frac{N_0 e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}, \quad (23)$$

便得到

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 = & \frac{2k_c^2 v}{N_{mn} \gamma_0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2) \beta_{\perp 0}^2}{\Omega_l^2} W_{ml} \right. \\ & \left. + \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} Q_{ml} + U_{ml} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} W_{ml} &= J_{m-l}^2(k_c R_0) J_l'^2(k_c r_{c0}), \\ Q_{ml} &= 2W_{ml} + 2k_c r_{c0} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \left[J_{m-l}(k_c R_0) J_l''(k_c r_{c0}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(m-l)r_{c0}}{l R_0} J'_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \right], \\ U_{ml} &= k_c r_{c0} J_l'(k_c r_{c0}) \left\{ \left[\left(1 - \frac{(m-l)^2}{(k_c R_0)^2} \right) J_{m-l}^2(k_c R_0) - J'_{m-l}(k_c R_0) \right] J_l(k_c r_{c0}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(m-l)r_{c0}}{l R_0} J_{m-l}(k_c R_0) J'_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

结果与文献 [6] 一致, 但运算要简单得多.

五、波导轴坐标系法色散方程的推导

为了完成波导轴坐标系法的动量空间积分, 需要把平衡分布函数 f_0 和扰动分布函数 f_1 稍加变形. 根据大家熟知的 δ 函数换算法则, (12) 式变为

$$f_0 = \frac{N_0}{4\pi^2 p_{\perp 0}} \frac{H_1 H_2}{R_0 r_c \sin \chi_0} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_z - p_{z0}) [\delta(\tilde{\phi} - \tilde{\phi}_0) + \delta(\tilde{\phi} - \pi + \tilde{\phi}_0)], \quad (26)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H(R - |R_0 - r_c|), \\ H_2 &= H(R_0 + r_c - R), \\ \tilde{\phi} &= \phi - \varphi, \\ \tilde{\phi}_0 &= \text{Arc sin} \frac{R^2 + r_c^2 - R_0^2}{2Rr_c}, \\ \chi_0 &= \text{Arc cos} \frac{R_0^2 + r_c^2 - R^2}{2R_0r_c}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

角关系如图 2 所示.

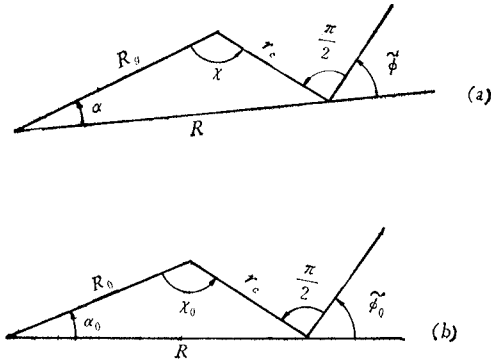


图 2

在动量空间中, $\tilde{\phi}$ 是 ϕ 的函数, 但 $\tilde{\phi}_0$ 不是 ϕ 的函数, 而是 p_{\perp} 的函数; χ 是 p_{\perp} 和 ϕ 的函数, 但 χ_0 只是 p_{\perp} 的函数.

因为

$$\frac{\partial f_0}{\partial R_g} = - \frac{1}{r_c \sin \chi} \frac{\partial f_0}{\partial \phi},$$

把它代入 (16) 式, 就得到波导轴坐标系扰动分布函数,

$$f_1 = -c k_c \mu_0 e^{i(m\varphi + k_z z - \omega t)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l e^{il\chi + im\alpha}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \left[\frac{(\omega - k_z v_z)}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{k_z v_\perp}{\Omega_l} \frac{\partial f_0}{\partial p_z} \right] \right. \\
& + \left[J'_{m-l}(k_c R_g) J_l(k_c r_c) + \frac{r_c(m-l)\omega_c}{R_g \Omega_l} J_{m-l}(k_c R_g) J'_l(k_c r_c) \right] \\
& \left. \times \frac{1}{\sin \chi} \frac{1}{p_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial \phi} \right\}, \quad (28)
\end{aligned}$$

式中 f_0 对 p_\perp 、 p_z 、 ϕ 的三个偏微分的含义是

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} &= \frac{\partial}{\partial p_\perp} f_0(p_\perp, p_z, R_g) | p_z, R_g = \text{常数}, \\
\frac{\partial f_0}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} f_0(p_\perp, p_z, R_g(p_\perp, \phi)) | p_\perp, p_z = \text{常数}, \\
\frac{\partial f_0}{\partial p_z} &= \frac{\partial}{\partial p_z} f_0(p_\perp, p_z, R_g(p_\perp, \phi)) | p_\perp, \phi = \text{常数}.
\end{aligned} \right\} \quad (29)$$

有必要指出, f_1 中的 $\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}$ 参与动量空间积分时,不能直接进行分部积分,即

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} (\cdot) \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} dp_\perp & \neq \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ (\cdot) f_0 \Big|_0^{+\infty} \right. \\
& \left. - \int_0^{+\infty} f_0 \frac{\partial}{\partial p_\perp} (\cdot) dp_\perp \right\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

式中 (\cdot) 代表被积函数的其它部分. 因为基本积分变量是 p_\perp 、 ϕ 和 p_z ,

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right) = \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} + \frac{\partial R_g}{\partial p_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial R_g}.$$

f_1 中出现的是 $\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp}$, 而不是 $\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp} \right)$.

电流密度

$$\left. \begin{aligned}
J_{1R} \\
J_{1\varphi}
\end{aligned} \right\} = e \int d^3 p f_1 v_\perp \left\{ \begin{aligned} \cos \tilde{\phi} \\ \sin \tilde{\phi} \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

由 (26)、(27) 式和图 2 所示关系,有

$$\left. \begin{aligned}
& \text{当 } \tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 \text{ 时, } R_g = R_0, \chi = \chi_0, \alpha = \alpha_0; \\
& \text{当 } \tilde{\phi} = \pi - \tilde{\phi}_0 \text{ 时, } R_g = R_0, \chi = -\chi_0, \alpha = -\alpha_0; \\
& \text{当 } p_\perp = p_{\perp 0} \text{ 时, } \tilde{\phi}_0 = \hat{\phi}_0, \chi_0 = \check{\chi}_0, \alpha_0 = \hat{\alpha}_0.
\end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$\hat{\phi}_0$ 、 $\check{\chi}_0$ 和 $\hat{\alpha}_0$ 都是 R 的函数,如图 3 所示.

把 (28) 式代入 (31) 式,并注意到 (30) 式,以及

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \chi}{\partial \phi} &= -r_c \sin \chi \frac{\partial \chi}{\partial R_g}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} &= -r_c \sin \chi \frac{\partial \alpha}{\partial R_g}, \\
\frac{\partial R_g}{\partial \phi} &= -r_c \sin \chi,
\end{aligned} \right\} \quad (33)$$

完成动量空间积分后,得到电流密度表达式,

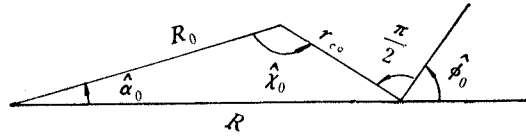


图 3

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} J_{1R} \\ J_{1\varphi} \end{aligned} \right\} &= \frac{k_c \mu_0 N_0 e^2}{2\pi^2 r_0 m_0} e^{i(m\varphi + k_z z - \omega t)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l \\
 &\times \left\{ \frac{1}{v_{\perp 0}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp 0}} \left[\frac{\hat{H}_1 \hat{H}_2 A_{ml}}{R_0 r_{c0} \sin \hat{\lambda}_0} \begin{cases} j \cos \hat{\phi}_0 \sin (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \\ \sin \hat{\phi}_0 \cos (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \end{cases} \right] \right\} \\
 &+ \frac{\hat{H}_1 \hat{H}_2 B_{ml}}{R_0 r_{c0} \sin \hat{\lambda}_0} \begin{cases} j \cos \hat{\phi}_0 \sin (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \\ \sin \hat{\phi}_0 \cos (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \end{cases} \\
 &- \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} \left[\frac{\hat{H}_1 \hat{H}_2 C_{ml}}{R_0 r_{c0} \sin \hat{\lambda}_0} \begin{cases} j \cos \hat{\phi}_0 \sin (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \\ \sin \hat{\phi}_0 \cos (l \hat{\lambda}_0 + m \hat{\alpha}_0) \end{cases} \right] \Bigg\}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_{ml} &= \frac{p_{\perp 0} v_{\perp 0} (\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}), \\ B_{ml} &= J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \left\{ -\frac{k_z v_{\perp 0} \beta_{\perp 0}}{\Omega_l^2} [l \omega_c \beta_{z0} \right. \\ &\quad \left. - k_z c (1 - \beta_{z0}^2)] - \frac{2k_z v_{\perp 0} \beta_{z0} \beta_{\perp 0}}{\Omega_l} \right\}, \\ C_{ml} &= R_0 r_{c0} \left\{ J'_{m-l}(k_c R_0) J_l(k_c r_{c0}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{c0} (m-l) \omega_c}{R_0 \Omega_l} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \right\}; \\ \hat{H}_1 &= H(R - |R_0 - r_{c0}|), \\ \hat{H}_2 &= H(R_0 + r_{c0} - R). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

把波导轴坐标系中的场分量表达式 (5) 代入 (1) 式, 得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 &= \frac{k_c}{2N_{mn}} \int_0^a R dR [J_{m-1}(k_c R)(J_{1\varphi} + iJ_{1R}) \\
 &\quad - J_{m+1}(k_c R)(J_{1\varphi} - iJ_{1R})] e^{-i(m\varphi + k_z z - \omega t)}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

(37) 式中对 R 的积分区域已延伸到波导边界上, 因为电流密度表达式中含有阶跃函数.

把 (34) 式代入 (37) 式, 当忽略电子注的边缘效应时, 则偏微分号 $\frac{\partial}{\partial p_{\perp 0}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial R_0}$ 与

积分号 $\int_0^a R dR$ 可以交换, 得到 (37) 式右边的积分

$$\begin{aligned}
 &\int_0^a R dR [J_{m-1}(k_c R)(J_{1\varphi} + iJ_{1R}) - J_{m+1}(k_c R)(J_{1\varphi} - iJ_{1R})] e^{-i(m\varphi + k_z z - \omega t)} \\
 &= \frac{\mu_0 k_c N_0 e^2}{\pi r_0 m_0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{v_{\perp 0}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp 0}} [A_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0})] \right. \\
 &\quad \left. + B_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) \right\}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} [C_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0})] \}. \quad (38)$$

设 $k_c R_0 = x_0$, $k_c r_{c0} = x_c$. 利用 (35) 式, 分别得到 (38) 式中大括号内的三项表达式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{\perp 0}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp 0}} [A_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0})] &= J_{m-l}^2(x_0) J'_l(x_c) \left\{ -\frac{\beta_{\perp 0}^2 l \omega \omega_c}{\Omega_l^2} J'_l(x_c) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} [(2 - \beta_{\perp 0}^2) J'_l(x_c) + 2x_c J''_l(x_c)] \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} B_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0}) &= J_{m-l}^2(x_0) J_l''(x_c) \left\{ -\frac{k_z c \beta_{\perp 0}^2}{\Omega_l^2} [l \omega_c \beta_{z0} \right. \\ &\quad \left. - k_z c (1 - \beta_{z0}^2)] - \frac{2k_z v_{z0} \beta_{\perp 0}^2}{\Omega_l} \right\}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial R_0} [C_{ml} J_{m-l}(k_c R_0) J'_l(k_c r_{c0})] &= \frac{2(m-l)}{l} \frac{x_c^2}{x_0} \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} J_{m-l}(x_0) J'_{m-l}(x_0) J_l''(x_c) \\ &\quad - x_c \left\{ J_l(x_c) J'_l(x_c) \left[\left(1 - \frac{(m-l)^2}{x_0^2}\right) J_{m-l}^2(x_0) - J'_{m-l}(x_0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(m-l)}{l} \frac{x_c}{x_0} J_{m-l}(x_0) J'_{m-l}(x_0) J_l''(x_c) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

把 (39)、(40) 和 (41) 式代入 (38) 式, 然后再代入 (37) 式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 &= \frac{2k_c^2 v}{N_{mn} \gamma_0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2) \beta_{\perp 0}^2}{\Omega_l^2} H_{ml} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - K_z v_{z0})}{\Omega_l} Q_{ml} + U_{ml} \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

式中

$$\begin{aligned} H_{ml} &= J_{m-l}^2(x_0) J_l''(x_c), \\ Q_{ml} &= 2H_{ml} + 2x_c J_{m-l}(x_0) J'_l(x_c) \left[J_{m-l}(x_0) J_l''(x_c) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(m-l)}{l} \frac{x_c}{x_0} J'_{m-l}(x_0) J'_l(x_c) \right], \\ U_{ml} &= x_c J_l'(x_c) \left\{ \left[\left(1 - \frac{(m-l)^2}{x_0^2}\right) J_{m-l}^2(x_0) - J'_{m-l}(x_0) \right] J_l(x_c) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(m-l)}{l} \frac{x_c}{x_0} J_{m-l}(x_0) J'_{m-l}(x_0) J'_l(x_c) \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

这与用回旋中心坐标系法求得的色散方程完全一致.

从 (38)、(39) 和 (40) 式不难看出, 当忽略与 $\frac{\partial}{\partial R_g}$ 有关的项时, 有

$$\begin{aligned} H_{ml} &= J_{m-l}^2(x_0) J_l''(x_c), \\ Q_{ml} &= 2H_{ml} + 2x_c J_{m-l}^2(x_0) J'_l(x_c) J_l''(x_c), \\ U_{ml} &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

即文献 [3] 的结果。

六、关于文献[4]的色散方程推导

这一节, 让我们来探讨一下文献 [4] 是如何得到三 δ 函数模型电子注的色散方程的, 为了方便起见, 沿用该文的 CGS 单位制。

文献 [4] 采用的是文献 [5] 的三 δ 分布函数,

$$f_0^* = \frac{N_0}{2\pi^2 p_\perp} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_z - p_{z0}) \delta(R_g^2 - R_0^2),$$

完全与前面的 (12) 式等价, 因为 R_g 不取负值。这一点也不难从数学上得到证明。该文给出的扰动分布函数是

$$\begin{aligned} f_l^* = & - \frac{(-1)^m e}{c k_c} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il\chi + jma} \\ & \times \left\{ J_{l-m}(k_c R_g) J_l'(k_c r_c) \left[\frac{(\omega - k_z v_z)}{\Omega_l} \frac{\partial f_0^*}{\partial p_\perp} + \frac{k_z v_\perp}{\Omega_l} \frac{\partial f_0^*}{\partial p_z} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m_0 \omega c_0} \frac{(I_{l-1} - I_{l+1})}{\Omega_l} \frac{\partial f_0^*}{\partial R_g} \right\} e^{j(m\varphi + k_z x - \omega t)}, \end{aligned} \quad (45)$$

式中

$$I_l = \left[(\omega - k_z v_z) \frac{l}{k_c r_c} - k_c v_\perp \right] J_{l-m}(k_c R_g) J_l(k_c r_c).$$

尽管运算复杂一点, 但也不难看出, (45) 式中 $\frac{\partial f_0^*}{\partial R_g}$ 的系数是错的, 正确的结果应该是前面的 (16) 式。不仅如此, 从给出的扰动分布函数 f_l^* 到电流密度 J_{Rg}^* 、 J_{φ}^* 的运算也是错的。该文给出的电流密度表达式是

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} J_{Rg}^* \\ J_{\varphi}^* \end{matrix} \right\} = & \frac{e^2 N_0}{2\pi^2 m_0 \gamma_0 c k_c} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{R_0 r_{c0} \sin \hat{\lambda}_0} \left\{ \begin{matrix} j \cos \hat{\phi}_0 \\ \sin \hat{\phi}_0 \end{matrix} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} \frac{x_c}{2} J_l'(x_c) \left\{ J_{m-l-1}(x_0) \left[\begin{matrix} \sin [m\hat{\alpha}_0 + (l+1)\hat{\lambda}_0] \\ \cos [m\hat{\alpha}_0 + (l+1)\hat{\lambda}_0] \end{matrix} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - J_{m-l+1}(x_0) \left[\begin{matrix} \sin [m\hat{\alpha}_0 + (l-1)\hat{\lambda}_0] \\ \cos [m\hat{\alpha}_0 + (l-1)\hat{\lambda}_0] \end{matrix} \right] \right\} + \left\{ \frac{(\omega - k_z v_{z0}) [2J_l'(x_c) + x_c J_l''(x_c)]}{\Omega_l} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2) \beta_{\perp 0}^2 J_l'(x_c)}{\Omega_l^2} \right\} J_{m-l}(x_0) + \frac{x_c}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{I_{l-1} - I_{l+1}}{\Omega_l} \right) \right\} \\ & \times \left[\begin{matrix} \sin (m\hat{\alpha}_0 + l\hat{\lambda}_0) \\ \cos (m\hat{\alpha}_0 + l\hat{\lambda}_0) \end{matrix} \right] \}, \end{aligned} \quad (46)$$

式中

$$\hat{I}_l = \left[(\omega - k_z v_{z0}) \frac{l}{x_c} - x_c \omega c \right] J_l(x_c) J_{m-l}(x_0).$$

(46) 式与上节求得的电流密度的正确表达式 (34) 相差很远。产生错误的原因之一

是把 f_0^* 中的 $\frac{\partial f_0^*}{\partial p_\perp}$ 直接参与分部积分,正如 (30) 式所指出. 可以验证,采用这种错误的分部积分法运算后,由 f_0^* 中 $\frac{\partial f_0^*}{\partial p_\perp}$ 、 $\frac{\partial f_0^*}{\partial p_z}$ 产生的项正好是 (46) 式中除去与 $\frac{\partial}{\partial x_0}$ 有关的项. 另一个错误是把因子 $\left[\frac{\sin(m\hat{\alpha}_0 + l\hat{\lambda}_0)}{\cos(m\hat{\alpha}_0 + l\hat{\lambda}_0)} \right]$ 从偏微分号 $\frac{\partial}{\partial x_0}$ 内提出来. 事实上, $\hat{\alpha}_0$ 、 $\hat{\lambda}_0$ 角都是 R_0 或 x_0 的函数,如图 3 所示.

从电流密度到色散方程,仅需对 R 积分,变量关系十分简单. 按文献 [4] 给出的电流密度 J_{iR}^* 和 $J_{i\Phi}^*$, 得到的色散方程应该是

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_c^2 - k_z^2 = \frac{2k_c^2 v}{N_{mn} \gamma_0} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{(\omega^2 - k_z^2 c^2) \beta_{10}^2}{\Omega_l^2} H_{ml}^* + \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} Q_{ml}^* + U_{ml}^* \right\}, \quad (47)$$

式中

$$H_{ml}^* = J_{m-l}^2(x_0) J_l'^2(x_c), \quad (48)$$

$$Q_{ml}^* = 2H_{ml}^* + x_c \left\{ \left[1 + \frac{(m-l)^2}{x_0^2} \right] J_{m-l}^2(x_0) + J_{m-l}'(x_0) \right\} \times J_l'(x_c) J_l''(x_c) + \frac{2l(m-l)}{x_0 x_c} J_{m-l}(x_0) J_{m-l}'(x_0) [J_l(x_c) - x_c J_l'(x_c)] J_l'(x_c), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} U_{ml}^* &= \frac{x_c J_{m-l}(x_0) J_l'(x_c)}{2 \Omega_l} \frac{\partial}{\partial x_0} (\hat{l}_{l-1} - \hat{l}_{l+1}) \\ &= \frac{(\omega - k_z v_{z0})}{\Omega_l} \left\{ \left(x_c - \frac{l^2}{x_c^2} \right) J_{m-l}'(x_0) J_l(x_c) \right. \\ &\quad + \frac{l^2 - x_c^2}{x_0} \frac{(m-l)}{l} J_{m-l}'(x_0) J_l'(x_c) \\ &\quad + \frac{x_c^2 - l^2}{x_0^2} \frac{(m-l)}{l} J_{m-l}(x_0) J_l'(x_c) \\ &\quad - \frac{l(m-l)}{x_c x_0} J_{m-l}(x_0) J_l(x_c) + \frac{l(m-l)}{x_c x_0^2} J_{m-l}(x_0) J_l(x_c) \\ &\quad \left. + J_{m-l}''(x_0) J_l'(x_c) \right\} J_{m-l}(x_0) J_l'(x_c) \\ &\quad + x_c \left\{ -J_{m-l}''(x_0) J_l(x_c) + \frac{x_c}{x_0} \frac{(m-l)}{l} J_{m-l}'(x_0) J_l'(x_c) \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_c}{x_0^2} \frac{(m-l)}{l} J_{m-l}(x_0) J_l'(x_c) \right\} J_{m-l}(x_0) J_l'(x_c). \quad (50) \end{aligned}$$

当忽略与 $\frac{\partial f_0^*}{\partial R_g}$ 有关的项时

$$\left. \begin{aligned}
 H_{ml}^* &= J_{m-l}^2(x_0) J_l'^2(x_c), \\
 Q_{ml}^* &= 2H_{ml}^* \\
 &+ x_c \left\{ \left[1 + \frac{(m-l)^2}{x_0^2} \right] J_{m-l}^2(x_0) + J_{m-l}'(x_0) \right\} J_l'(x_c) J_l''(x_c) \\
 &+ \frac{2l(m-l)}{x_0 x_c} J_{m-l}(x_0) J_{m-l}'(x_0) [J_l(x_c) - x_c J_l'(x_c)] J_l'(x_c), \\
 U_{ml}^* &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

但文献[4]根据电流密度 J_{R}^* 、 J_{φ}^* 给出的色散方程却是该文中的(30)和(31)式,即本文的(42)和(43)式。根据(42)、(43)式的计算,我们知道,当忽略与 $\frac{\partial}{\partial R_g}$ 有关的项时,得到的色散方程的系数应该是(44)式,但文献[4]给出的却是(51)式*。因此,所谓求得的结果与文献[6]“完全一致”的说法是难以置信的。

七、结 语

本文分别用回旋中心坐标系法和波导轴坐标系法严格地导出了单动量轴对称电子注的色散方程。所得结果的一致性,完全如所预期的。回旋中心坐标系法在沿特征线积分时具有运算简单的优点,特别是在解释电子与波相互作用机理时,给出了一幅清晰的物理图象。最后指出了文献[4]中存在的若干问题。归纳起来

(1) 回旋中心坐标系法的数学运算是严格的,文献[4]认为该方法是沿一条特定的特征线积分是没有根据的。

(2) 在求扰动分布函数时,需借助于场展开式完成沿特征线积分;而求电流密度时,需对动量空间积分。它们分别对应于不同的数学运算步骤。当我们对不同的数学运算步骤赋予不同的物理解释时,变量的数学性质并未发生变化。换句话说,物理解释是根据数学公式给的,因而它们是遵从数学运算法则的。然而文献[4]把这些步骤和概念混淆在一起,因而不可能正确理解回旋中心坐标系法。

(3) 文献[4]对三 δ 函数模型电子注的色散方程的推导是错误的。从 $f_0^* \rightarrow f_1^* \rightarrow J_{R}^*$ 、 $J_{\varphi}^* \rightarrow$ 色散方程,整个中间运算过程都是不正确的,所以不可能得到与文献[6,7]相同的三 δ 函数的色散方程。

梁正、莫元龙、杨中海等同志对本文提出了很多宝贵意见,作者在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 刘盛纲,中国科学,1979年,第5期,第595页。
- [2] 刘盛纲,中国科学,1981年,第11期,第1402页。
- [3] 刘盛纲,电子学报,1981年,第1期,第20页。
- [4] 万遂人,电子科学学刊,7(1985),329。
- [5] K. R. Chu, *Phys. Fluids*, 21(1978), 2354。
- [6] J. Y. Choe and S. Ahn, *IEEE Trans. On ED*, ED-28 (1981), 94。

* 即文献[4]中的(32)式。原文该式中的 Q_{ms} 漏写一因子 $J_s'(a_{L0})$ 。

[7] 刘盛纲,大自然探索,1984年,第4期,第36页.

ON THE TWO METHODS OF KINETIC THEORY OF ECRM

Wang Changbiao, Tu Jiannan, Jiang Huabei, Sun Yan

(Chengdu Institute of Radio Engineering)

The kinetic theory based on the expansion of local field in the guiding center coordinate system, presented by Liu Shenggang (1979, 1981), has successfully developed into a theoretical system. A brief discussion about the mathematical background and physical explanation of setting up the guiding center coordinate system is given. By using the methods of the guiding center and waveguide coordinate systems respectively, the same dispersion equations for interaction between an electron beam and TE_{mn} field in the circular waveguide are rigorously derived.