分布参数神经网络与偏微分方程求解 [1]

冯大政　　保　铮　　焦李成

(西安电子科技大学电子工程研究所　西安　710071)

摘　要　本文提出一类用于求解偏微分方程的分布参数神经网络，并且在连续时空上研究了它的动态特性。最后还给出了两个模拟试验，用于检验这类神经网络的有效性。

关键词　分布参数神经网络，偏微分方程，稳定性，局域联接

中图号　TN-052

1　引　言

偏微分方程的有效计算在自然科学和工程中有着广泛应用。但是，这些诸多偏微分方程问题都是很难计算的，这样的计算任务对计算机的速度和存贮量都有很高的要求。特别是已有的一些串行数值计算方法很难适应大型工程问题 (如三维偏微分方程) 的计算。近年来，一种很有潜力的并行处理——人工神经网络得到了学术界的广泛注意，并为科学和工程实时计算带来了新的解决途径。Hopfield 和 Chua 等一大批研究者成功地解决了线性与非线性规划问题 [1−3]，组合优化问题 [4,5] 和线性方程组求解 [6−8] 等科学计算问题。本文为了进一步完善神经计算的基本理论，拓宽人工神经网络的应用领域，提出了用于求解偏微分方程的分布参数神经网络。

2　模型

考虑微分算子方程

$$Tu = f. \tag{1}$$

其中 T 是在线性集 D_T 中的正定算子，f 是右端项，求解 u 是我们的中心课题。关于 (1) 式有如下解存在性定理。

定理 1(解存在与唯一性)　如果 T 是 D_T 中的正定算子，且 $f \in H$(Hilbert 空间)，那么 (1) 式存在唯一解 $u \in D_T$ 。

神经网络是靠动态演化自动收敛到所期望的解上，因此我们提出如下动态系统：

$$\partial u/\partial t = -Tu + f. \tag{2}$$

作为求解算子方程的分布参数神经网络，其中 $\partial u/\partial t$ 表示 u 关于时间 t 的偏导。当系统 (2) 式达到稳态时，就归结为

$$-Tu + f = 0, \tag{3}$$

所以 (2) 式的稳态平衡点对应于 (1) 式的解。动态系统 (2) 式与算子方程 (1) 式的根本区别是系统 (2) 式容易与物理系统 (如神经网络硬件系统) 相对应，而 (1) 式更多的是数学意义，仅能作为实际系统的近似描述。

[1] 1994-12-05 收到，1995-05-29 定稿
国家自然科学基金资助课题

讨论　系统 (2) 式可认为是求解线性方程神经网络的推广，因此，这里给出的理论也适用于求解线性方程神经网络。另外，从更广泛意义上讲，系统 (2) 式不仅限于微分算子方程，对于其它算子方程，如积分算子、抽象算子方程都可以求解。由 (1) 式的存在与唯一性定理确保如果系统 (2) 式是稳定的，它将稳定到唯一的平衡点。

3 动态特性分析

定理 2(有界性)　如果 T 是 $D_T \in H$ 中的正定算子，且 $f, u(x,0) \in H$ 都是有界的，那么系统 (2) 式的状态 $u(x,t)$ 是有界的。

证明　给定一能量函数 $E(u(x,t))$ 如下：

$$E_1(u(x,t)) = (u,u)/2 = \|u\|^2/2. \tag{4}$$

沿着 (2) 式的解轨迹关于 t 全微分 E_1，可得

$$dE_1/dt = (\partial u/\partial t, u) = -(Tu,u) + (f,u). \tag{5}$$

由于存在正常数 c，使得

$$(Tu,u) \geq c\|u\|^2 \tag{6}$$

成立。代入 (5) 式可得

$$d\|u\|^2/dt \leq -2c\|u\|^2 + 2(f,u). \tag{7}$$

又由于 f 是有界的，所以存在正常数 c_1，使得

$$(f,u) \leq c_1\|u\| \tag{8}$$

成立。将 (8) 式代入 (7) 式，并令 $y = \|u\|$，可得

$$dy^2/dt \leq -2cy^2 + 2c_1 y, \tag{9}$$

从而得到

$$dy/dt \leq -cy + c_1, \tag{10}$$

所以有如下不等式成立

$$y \leq \|u(x,0)\|e^{-ct} + (1 - e^{-ct})c_1 \leq \|u(x,0)\| + c_1. \tag{11}$$

还由于 $\|u(x,0)\|$ 是有界的，因而 $u(x,t)$ 是有界的。　　**证毕**

定理 3(稳定性)　如果 T 是 $D_T \in H$ 中的正定算子，且 $f, u(x,0) \in H$ 都是有界的，那么系统 (2) 式将全局渐近收敛到它的唯一平衡点上。

在证明该定理之前，我们将给出 (1) 式的等效变分问题。对于 (1) 式，等效变分问题如下：

$$J(u) = -(Tu,u) + 2(f,u). \tag{12}$$

上式 $J(u)$ 表示一个二次泛函。关于泛函 $J(u)$，有如下最大值定理。

定理 4(最大值) 如果 T 是 D_T 中的一个正定算子，$f \in H$ 。假设 (1) 式有一个解 $u_0 \in D_T$ ，即

$$Tu_0 = f, \quad \text{在}H\text{中}, \ u_0 \in D_T, \tag{13}$$

那么二次泛函 $J(u)$ 有最大值 $J(u_0)$ ，即对于任意的 $u \in D_T$ ， $J(u) \leq J(u_0)$ 成立。

从此定理可见，二次泛函 $J(u)$ 上有界。

现在证明定理 3 。定义 (2) 式能量泛函为

$$E(u(x,t)) = -(Tu,u) + 2(f,u). \tag{14}$$

沿着 (2) 式的解轨迹微分 (14) 式可得

$$dE(u(x,t))/dt = -(T\partial u/\partial t, u) - (Tu, \partial u/\partial t) + 2(f, \partial u/\partial t). \tag{15}$$

由于 T 是对称算子，所以应有

$$(T\partial u/\partial t, u) = (Tu, \partial u/\partial t). \tag{16}$$

将 (16) 式代入 (15) 式，可得

$$\begin{aligned} dE(u(x,t))/dt &= -2(Tu, \partial u/\partial t) + 2(f, \partial u/\partial t) = 2(-Tu + f, \partial u/\partial t) \\ &= 2(\partial u/\partial t, \partial u/\partial t) = 2\|\partial u/\partial t)\|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

当 $\partial u/\partial t = 0$ 时，可推出 $dE(u(x,t))/dt = 0$ ；当 $\partial u/\partial t \neq 0$ 时，可推出 $dE(u(x,t))/dt > 0$ 。从 $E(u)$ 上有界可知 $E(u(x,t))$ 也是上有界，因而系统 (2) 式渐近收敛到稳定的平衡点。而当系统 (2) 式达到稳定平衡点时， (2) 式归结为

$$-Tu + f = 0, \tag{18}$$

因而 (2) 式的平衡点对应于 (1) 式的解。从 (1) 式的解存在和唯一性定理可知，系统 (2) 式将渐近收敛到它的唯一平衡点上。 证毕

4 模拟试验

以下分别给出一个一维和一个二维泊松方程的 Dirichlet 问题的模拟试验，用来检验神经网络的有效性。空间变量用有限差分法离散化，可以得到连接规则的局域联接神经网络。

例 1 设一维泊松方程的 Dirichlet 问题为

$$\left.\begin{aligned} &d^2u(x)/dx^2 + \sin \pi x = 0, \quad x \in (0,1); \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

容易得到这个问题的理论解如下：

$$u(x) = (1/\pi^2) \sin \pi x. \tag{20}$$

利用神经网络可以得到如图 1 所示的计算结果。可见，计算结果接近理论结果。

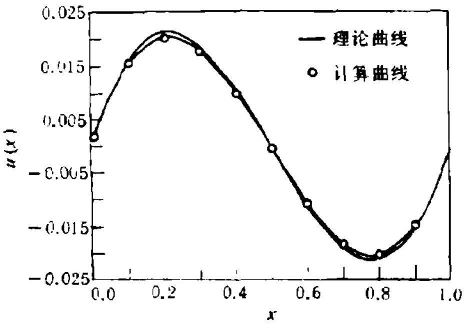
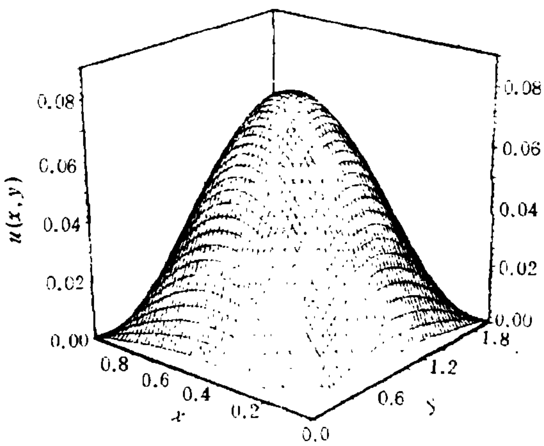
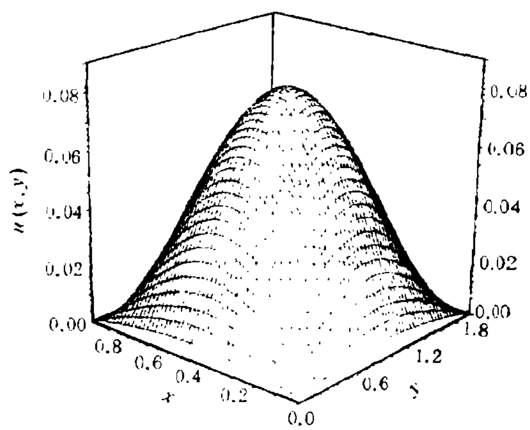


图 1



(a) 计算曲线



(b) 理论曲线

图 2

例 2 给定一个二维泊松方程的 Dirichlet 问题是

$$\left.\begin{aligned}&\partial^2u(x,y)/\partial x^2+\partial^2u(x,y)/\partial y^2+\sin(\pi x)\sin(\pi y/2)=0,x\in(0,1),y\in(0,2);\\&u(0,y)=u(1,y)=0;\\&u(x,0)=u(x,2)=0.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

同样地，容易得到 (21) 式的理论解是

$$u(x,y)=[4/(5\pi^2)]\sin(\pi x)\sin(\pi y/2).\tag{22}$$

利用神经网络得到的结果示于图 2(a) 中，而理论结果示于图 2(b) 中。可见计算结果接近理论结果。

5 结论

本文提出了一个新的用于求解偏微分方程问题的分布参数神经网络，给出并证明它们的有界性和稳定性定理。利用有限差分法对分布参数神经网络进行离散化可得到一类具有高度局域化连接的神经网络。两个模拟试验验证了该类神经网络的有效性。

参 考 文 献

[1] Hopfield J J, Tank D W. Biol. Cybern. 1985, 52(1): 141–152.

[2] Kennedy M P, Chua L O. IEEE Trans. on CAS, 1988, CAS-35(3): 554–562.

[3] Zhang S, Constantinids A G. IEEE Trans. on CAS, 1992, CAS-39(2): 441–452.

[4] Wilson G, Powley G. Biol. Cybern. 1985, 58(1): 63–70.

[5] Xu X, Tsai W T. Neural Networks, 1991, 4(1): 193–205.

[6] Cichock A, Unbehauen R. IEEE Trans. on CAS, 1992, CAS-39(1): 124–128; CAS-39(5): 619–633.

[7] Wang J. Electron. Lett. 1992, 28(10): 1751–1753.

[8] Wang L W, Mendel J M. IEEE Trans. on Computer, 1991, C-40(6): 1337–1346.

DISTRIBUTED PARAMETER NEURAL NETWORKS FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Feng Dazheng Bao Zheng Jiao Licheng

(*Electronic Engineering Institute, Xidian University, Xi'an* 710071)

Abstract Novel distributed parameter neural networks are proposed for solving partial differential equations, and their dynamic performances are studied in Hilbert space. The locally connected neural networks are obtained by separating distributed parameter neural networks. Two simulations are also given. Both theoretical and practical results illustrate that the distributed parameter neural networks are effective and efficient for solving partial differential equation problems.

Key words Distributed parameter neural network, Partial differential equation, Stability, Local connection

冯大政： 男， 1959 年生，讲师，博士生，主要研究方向为神经网络理论及其应用，非线性系统理论，自适应信号处理和神经信息处理原理的工程应用.

保 铮： 男， 1927 年生，教授，中国科学院院士，博士生导师，主要研究方向为阵列和多维信号处理，雷达系统与雷达成像，模式识别和神经网络.

焦李成： 男， 1959 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为非线性系统理论，人工神经网络，智能信息处理.