

# 关于模式匹配法相对收敛性问题的研究

黄旻 洪伟 何立权

(东南大学无线电工程系, 南京 210018)

**摘要** 本文论证了模式匹配法相对收敛性问题是由于没有取本征模完备正交集中连续的前  $N$  项所致. 为了解决这一问题, 本文提出首先对本征模完备集进行排序, 然后进行模式匹配. 数值例子计算结果表明, 这种先排序的模式匹配法不但很好地解决了相对收敛性问题, 而且加快了收敛速度, 在本征模个数相同的情况下, 能有效地提高解的精度. 将这种方法应用于波导接头不连续性的分析, 结果表明, 这种方法具有稳定、精度高和收敛快等优点.

**关键词** 电磁场; 排序; 模式匹配; 相对收敛性

## 1. 引言

近半个世纪以来, 模式匹配法广泛地应用于电磁场工程问题, 特别是波导不连续性问题<sup>[1]</sup>的分析和计算<sup>[2]</sup>, 它是电磁场边值问题最重要的分析方法之一.

1963年 R. Mittra<sup>[4]</sup>分析矩形波导分叉结构时, 发现二重级数作截项近似(项数分别为  $M$  和  $N$ )后,  $N$  取不同值而  $M$  趋于无穷时, 解收敛于不同的值; 反之,  $M$  取不同值  $N$  趋于无穷时, 也一样, 这种现象称为相对收敛性. 由于相对收敛性的存在, 盲目地增加模式个数并不能有效地提高解的精度. R. Mittra 认为对上述问题存在某一比值  $N/M$ , 使得模匹配解可有效地收敛于准确解, 并且在分析波导膜片加载不连续性问题时<sup>[5]</sup>, 检验了相对收敛性现象并给出了最佳  $N$  与  $M$  的比例关系. 虽然寻求最佳比值  $N/M$  可改善相对收敛性, 但一方面对于不同问题最佳  $N/M$  值不同, 因而寻求最佳  $N/M$  值比较困难; 另一方面相对收敛性产生的根本原因不在于  $N$  与  $M$  的比例关系. 为此本文首先论证了产生相对收敛性的根本原因是没有截取本征模完备集中连续前  $N$  项, 进而提出采用排序的方法消除相对收敛性的影响. 对波导接头不连续性的分析表明, 排序后的模式匹配法不但没有相对收敛性问题, 而且具有收敛快、精度高和稳定等优点.

## 2. 相对收敛性问题

应用模式匹配法分析波导不连续性问题时, 首先将场分量用模式函数展开.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \phi_{mn} \quad (1)$$

其中  $\phi_{mn}$  为完备正交集  $\{\phi_{mn}\}$  中的元素,  $a_{mn}$  为展开系数. 实际计算时由于计算时间

1992.04.23 收到, 1992.07.17 定稿.

黄旻 男, 1968年生, 硕士, 现从事电磁场和微波技术方面研究工作.

洪伟 男, 1963年生, 博士, 副教授, 现从事电磁场和微波技术方面研究工作.

何立权 男, 1939年生, 博士, 教授, 现从事无线电技术方面研究工作.

和计算机内存的限制,只能截取前  $M \times N$  项参与计算. 实际求出的场分量  $u_r$  为

$$u_r = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \phi_{mn} \tag{2}$$

下面分 3 种情况讨论(2)式的收敛性.

(1) 当  $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$  时 由  $\{\phi_{mn}\}$  的完备性知  $u_r$  收敛于  $u$ , 即

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} u_r(M, N) = u$$

这时实际上取了如图 1(a) 所示  $MON$  面上所有项  $a_{mn} \phi_{mn}$  之和.

(2) 当  $N$  一定,  $M \rightarrow \infty$  时 从图 1(b) 可以看出, 所取的项只是  $L_n$  以上阴影区域, 令其和为  $u_m$ ,  $L_n$  以下区域和为  $u'_m$ , 则

$$\lim_{M \rightarrow \infty} u_r(M) = u_m$$

这里  $u_m + u'_m = u$ ,  $M$  趋于无穷时, 解收敛于  $u_m$  而非  $u$ , 而且  $N$  取不同值时,  $u_m$  不同, 这就是相对收敛性问题.

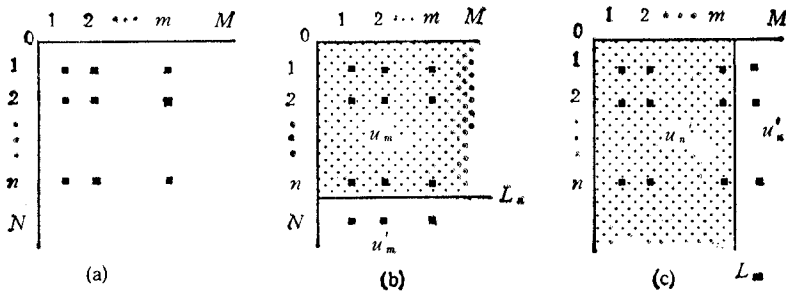


图 1 二重级数截项和截项后的收敛特性

(3) 当  $M$  一定,  $N \rightarrow \infty$  时 所取区域为图 1(c) 中  $L_m$  左边阴影区域, 令其和为  $u_n$ ,  $L_m$  右边和为  $u'_n$ .  $M$  取不同值时, 解收敛于不同的值  $u_n$ , 与情况(2)相似, 也会产生相对收敛性问题.

无论  $M$  固定,  $N$  趋于无穷, 还是  $N$  固定,  $M$  趋于无穷, 由于前  $M \times N$  项取的不是完备集中连续的前  $Q$  项, 许多低次模没有考虑, 所以无论  $M$  或  $N$  趋于无穷时, 都将产生相对收敛性问题. 实际计算时必须考虑改善、消除相对收敛性的影响. 为解决相对收敛性问题, 本文提出如下的排序方法: 首先对模式本征值进行排序, 连续取前  $Q$  个模参与计算, 这样就保证了模式由低到高连续计入, 从而有效地消除相对收敛性问题.

下面通过一个简单的例子验证上述结论. 考虑函数

$$f(x, y) = xy(a-x)(b-y), \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

用完备正交集  $\{\sin(m\pi x/a) \cdot \sin(n\pi y/b); m, n = 1, 2, \dots, \infty\}$  展开得

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

其中

$$a_{mn} = \begin{cases} 16[a/(m\pi)]^3[b/(n\pi)]^3, & m, n \text{ 同为奇数} \\ 0, & m \text{ 或 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

截模  $M \times N$  后的函数为  $f_r(x, y)$ , 表示为

$$f_r(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

定义相对误差  $e_r$  为

$$e_r = [1 - f_r(x, y)/f(x, y)] \times 100\%$$

取  $N = 5, 10, 15, 20, M \rightarrow \infty$  时,  $e_r$  的一组计算曲线如图 2(a) 所示. 由图可以看到, 相对收敛性现象的存在. 图 2(b) 所示为经过排序后, 函数  $e_r$  的收敛特性. 比较图 2(a) 中点 A 与图 2(b) 中点 B, 所取模式函数数目相同, A 点相对误差为 0.0075%, B 点相对误差为 -0.0044%. 由此可见, 排序以后, 不但消除了相对收敛性问题, 而且大大提高了了解的精度.

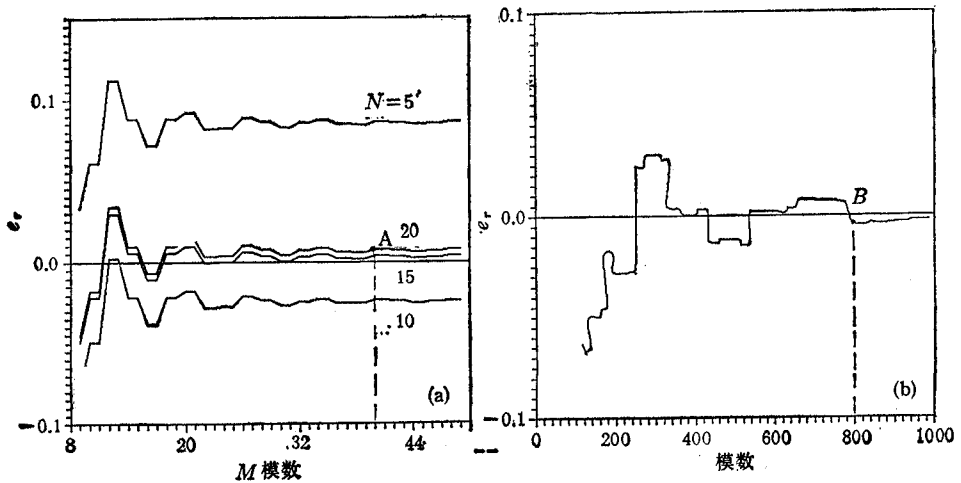


图 2 两种取模方法的比较曲线

### 3. 波导接头不连续性分析

考虑图 3 所示的波导不连续性. 在接头不连续面  $z = 0$  上, 波导 I, II 中的横向场用各自的矢量模式函数展开如下:

波导 I 中满足

$$\left. \begin{aligned} E_{I1} &= \sum_p e_p^I Z_p^I (A_p^I + B_p^I) \\ H_{I1} &= \sum_p h_p^I (A_p^I - B_p^I) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

波导 II 中满足

$$\left. \begin{aligned} E_{II1} &= \sum_q e_q^{II} Z_q^{II} (A_q^{II} + B_q^{II}) \\ H_{II1} &= \sum_q h_q^{II} (A_q^{II} - B_q^{II}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

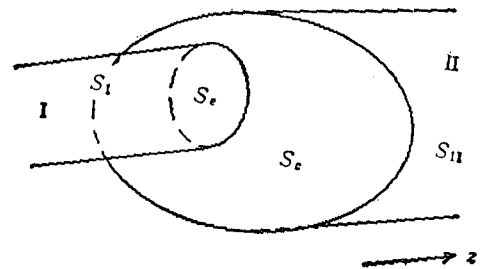


图 3 波导接头不连续性示意

其中,  $p, q$  分别是 I, II 波导中的正交模式函数.  $A_k^i, B_k^i (i = I, II)$  分别为 I, II 波导中第  $k$  个人射波和反射波幅度.  $Z_k$  为  $k$  次模波阻抗, 表达式如下

$$Z_p^i = \begin{cases} \gamma_p^i / j\omega\epsilon, & \text{E 波} \\ j\omega\mu / \gamma_p^i, & \text{H 波} \end{cases}$$

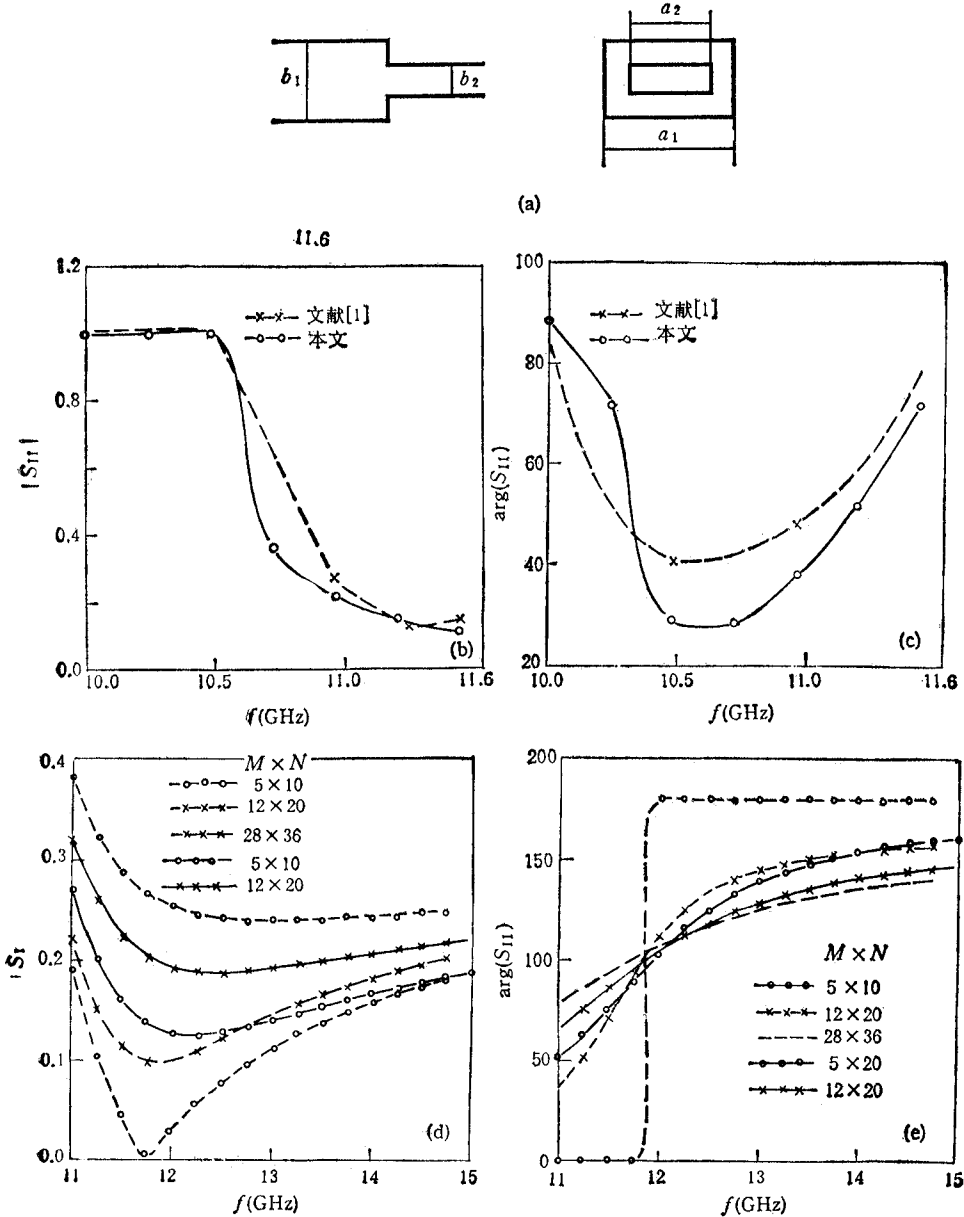


图 4

- (a) 矩形波导接头结构;  
结构尺寸为:  $a_1 = 2.285\text{cm}$ ,  $b_1 = 1.005\text{cm}$ ,  $a_2 = 1.428\text{cm}$ ,  $b_2 = 0.65\text{cm}$
- (b), (c) 矩形波导反射特性(与文献[1]比较);
- (d), (e) 未经排序处理以及经过排序处理的方法计算出的反射系数的比较。(实线表示经过排序的模)

$$Z_q^{\text{II}} = \begin{cases} \gamma_q^{\text{II}}/j\omega\epsilon, & \text{E 波} \\ j\omega\mu/\gamma_q^{\text{II}}, & \text{H 波} \end{cases}$$

横截面  $z=0$  上边界条件如下

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{11}, & \text{on } S_e \\ E_1 &= 0, & \text{on } S_c \end{aligned} \right\} \quad (5(a))$$

$$H_1 = H_{11}, \quad \text{on } S_c \quad (5(b))$$

将(3),(4)两式代入(5)式,用矢量模式函数  $e_q^{\text{II}}$  对 5(a) 式两边求内积,并在  $S_{11}$  上积分;用  $h_p^1$  对 5(b) 式两边求内积,并在  $S_c$  上积分得线性代数方程组

$$\left. \begin{aligned} A^{\text{II}} + B^{\text{II}} &= [G](A^{\text{I}} + B^{\text{I}}) \\ A^{\text{I}} - B^{\text{I}} &= [Q](A^{\text{II}} - B^{\text{II}}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中,  $A^{\text{I}}, B^{\text{I}}$  为  $P_0$  维列向量,  $A^{\text{II}}, B^{\text{II}}$  为  $Q_0$  维列向量.  $[G], [Q]$  分别为  $Q_0 \times P_0$  和  $P_0 \times Q_0$  维矩阵,其中元素分别为

$$g_{qp} = \frac{Z_p^{\text{I}}}{Z_q^{\text{II}}} \iint_{S_{11}} e_q^{\text{II}} \cdot e_p^{\text{I}} dS$$

$$q_{pq} = \iint_{S_c} h_p^1 \cdot h_q^{\text{II}} dS$$

由(6)式可得

$$\begin{bmatrix} A^{\text{I}} \\ B^{\text{I}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [G]^{-1} + [Q] & [G]^{-1} - [Q] \\ [G]^{-1} - [Q] & [G]^{-1} + [Q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\text{II}} \\ B^{\text{II}} \end{bmatrix} - [T] \begin{bmatrix} A^{\text{II}} \\ B^{\text{II}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中  $[T]$  为广义传输矩阵. 假定 II 中无人射场,  $A^{\text{II}} = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} B^{\text{I}} &= ([I] - [Q][G])^{-1} \cdot ([I] + [Q][G])A^{\text{I}} \\ &= [R]A^{\text{I}} \end{aligned} \quad (8)$$

其中矩阵  $[R]$  为

$$[R] = ([I] - [Q][G])^{-1}([I] + [Q][G]) \quad (9)$$

矩阵  $[R]$  的第 1 个元素  $R_{11}$  就是波导 I 中主模反射系数.

#### 4. 结果和结论

本文对矩形波导接头的不连续性进行了分析和计算. 矩形波导接头结构如图 4(a) 所示, 计算结果如图 4(b), 4(c) 所示, 与文献 [1] 中结果一致. 为比较排序的模式匹配法与未经排序的模式匹配法之间的差别, 取相同的模函数, 对同尺寸的波导接头, 分别用未经排序的模式匹配法和经过排序的模式匹配法进行分析, 结果示于图 4(d) 和图 4(e). 通过比较可以看出, 经过排序处理的模式匹配法有以下优点: (1) 解决了相对收敛性问题. (2) 在相同条件下, 尤其是模函数较少时, 本文方法具有较高精度.

#### 参 考 文 献

- [1] R. Sofai-Naini, R.H. Macphic, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30** (1982) 11, 2060—2063.
- [2] J. D. Hunter, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-32** (1984)4, 387—393.
- [3] 刘志钧、洪伟、章文勋, 矩形波导二维错位和膜片加载组合不连续性分析, 第五届全国毫米波、亚毫米波会议论文集, 青岛, 1990 年, 第 264—267 页.
- [4] R. Mittra, Relative Convergence of the Solution of a Doubly Infinite Set of Equations, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Vol. 67, Mar. -Apr. 1963, pp. 245—254.
- [5] R. Mittra, T. Itoh, T. S. Li, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-20** (1972) 2, 96—104.

- [6] R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*, New York, Pergamon, (1973), pp. 300–303.

## RELATIVE CONVERGENCE PROBLEM IN MODE MATCHING METHOD

Huang Min   Hong Wei   He Liquan

(*Southeast University, Nanjing 210018*)

**Abstract** The relative convergence problem arise in mode matching method is discussed and a mode sorting technique is presented to solve this problem. Numerical examples demonstrated that this sorted mode matching method can not only solve the relative convergence problem, but also accelerate the convergence rate and has better accuracy than conventional mode matching method. Numerical results of the waveguide junction discontinuity using this method indicated that this method takes the advantages of stable, accurate and fast convergence.

**Key words**    Electromagnetic field; Sort; Mode matching; Relative convergence