

电子迴旋中心坐标系中的平衡分布函数*

王俊毅

(中国科学技术大学)

提 要

在电子迴旋脉塞动力学理论中,以电子迴旋中心坐标系中场的局部展开为基础的方法有很大的优点.本文给出一种用于这种方法的电子平衡分布函数,明确规定了电子的空间分布,并由此得到了与波导轴坐标系方法的结果可类比的色散关系.

一、引 言

在求解迴旋脉塞的线性符拉索夫(Власов)方程时,国际上一般都在波导轴坐标系中进行^[1-4].文献[5]中提出的以电子迴旋中心坐标系中场的局部展开为基础的方法(以下简称迴旋坐标系法)不但使符拉索夫方程的求解大为简化,而且物理意义更为明确.用这种方法首次导出了波导任意TE模的色散关系^[6].但是,在这种“局部”坐标系中描述整个电子束的空间分布比较困难.本文提出一种用于迴旋坐标系的平衡分布函数,显含空间位置变量.由此得到的色散关系可与波导坐标系方法的结果^[7]相类比.从推导色散关系的过程可看到,在迴旋坐标系中的计算比波导坐标系中使用同类分布函数的计算^[8]要简单得多,从而又一次表现出这种方法的优越性.

二、平衡分布函数

本文提出如下形式的用于迴旋坐标系的分布函数:

$$f_0 = \frac{K}{2\pi p_{\perp}} \delta(R - R_0) \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) g(p_{\parallel}) \quad (1)$$

式中 p_{\perp} 为垂直磁场方向的动量, p_{\parallel} 为平行磁场方向的动量, R 为迴旋中心至波导轴距离, R_0 为电子束平均半径, K 为归一化常数.

众所周知,在仅存在均匀直流磁场的情况下,在波导坐标系中动量及迴旋中心的径向距离 R 都是运动常数.在迴旋坐标系中,迴旋中心的径向坐标为零, R 可理解为该坐标系原点在波导中的位置,这对于在此坐标系中描述的一切运动来说都显然是一个常数.这样, (1) 式全部由运动常数构成,故满足零级符拉索夫方程.下面确定常数 K .

由图 1,

* 1980年10月4日收到.

$$r'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi + \chi) \quad (2)$$

图中 r 、 φ 为迴旋坐标系中的极坐标, r' 、 φ' 为波导坐标系中的极坐标。

$$\text{令} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(p_{\parallel}) dp_{\parallel} = 1,$$

$$\text{则} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}, R) d^3p = K \delta(R - R_0) = n(R).$$

$$\text{因} \quad r = \frac{p_{\perp}}{m\Omega_0} \quad \left(\text{其中} \quad \Omega_0 = \frac{eB_0}{m} \right),$$

$$\text{故在动量空间积分后, } r = r_c = \frac{p_{\perp 0}}{m\Omega_0}.$$

单位长度电子数(一般有 $R_0 < a - r_c$)

$$N_e = \iint_S n(R) ds = \int_0^{2\pi} R d\varphi_0 \int_0^a K \delta(R - R_0) dR = 2\pi K R_0,$$

$$\text{故} \quad K = \frac{N_e}{2\pi R_0}, \text{ 代入(1)式, 得}$$

$$f_0 = \frac{N_e}{4\pi^2 R_0 p_{\perp}} \delta(R - R_0) \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) g(p_{\parallel}) \quad (3)$$

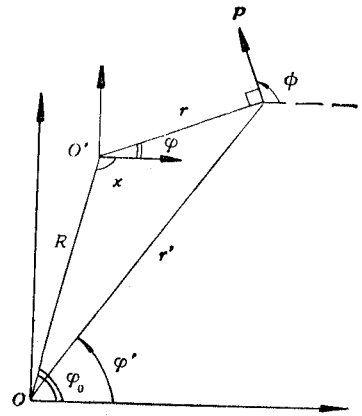


图 1
Fig. 1

三、色散关系

1. 色散方程

根据麦克斯韦方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{i\omega}{c} E_{\varphi} &= \frac{4\pi}{c} J_{\varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} &= \frac{i\omega}{c} H_r \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

由于电子在角向作周期运动, 可将所有微扰量展为 φ 的傅里叶级数:

$$H_z(t, \mathbf{r}) = \sum_l H_l(r) e^{i(l\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)}, \quad (5)$$

$$f_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_l F_l(r, \mathbf{p}) e^{i(l\varphi + k_{\parallel} z - \omega t)}. \quad (6)$$

由于电子束非常稀薄, 可用空波导 TE 模来近似实际场. 将 $E_z = 0$, $H_r = \frac{i k_{\parallel}}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}$ 以及(5)、(6)式代入(4)式对于第 l 次迴旋谐波, 得色散方程如下:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 \right) \frac{\partial H_l}{\partial r} = k_c^2 J_{\varphi l} = \frac{e k_c^2}{m} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\frac{p_{\perp}}{\gamma}} F_l(r, \mathbf{p}) dp_{\perp}, \quad (7)$$

其中 $J_{\varphi l}$ 是微扰电流密度 φ 分量的 l 次谐波幅度. 注意在迴旋坐标系中 $J_{\varphi} = J_{\perp}$.

2. 求解线性符拉索夫方程 利用(5)、(6)两式, 在迴旋坐标系的未扰轨道上, 对于第 l 次谐波线性符拉索夫方程可化为:

$$\frac{\partial F_l(r, \mathbf{p})}{\partial \phi} + \frac{i\gamma \Omega_l}{\Omega_0} F_l(r, \mathbf{p}) = \frac{e\gamma}{\Omega_0} \left(\mathbf{E}_l + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_l \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad (8)$$

式中 $\Omega_l = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - l\Omega_0/\gamma$, $\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l$ 是以 $H_l(r)$ 表示的波导 TE 场模式. 方程 (8) 实际可当作一个常微分方程来解, 其解为:

$$F_l(r, \mathbf{p}) = \frac{e\gamma}{\Omega_0} \int_{\infty}^{\phi} d\phi' \left(\mathbf{E}_l + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_l \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'} e^{-\frac{i\gamma\Omega_l}{\Omega_0}(\phi-\phi')}, \quad (9)$$

式中 $f_0 = f_0(p_{\parallel}, p_{\perp}, \phi)$, $\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \mathbf{e}_{\varphi} + \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \mathbf{e}_z + \frac{1}{p_{\perp}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \phi} \mathbf{e}_{\phi}$.

作变量变换 $(p_{\parallel}, p_{\perp}, \phi) \rightarrow (p_{\parallel}, p_{\perp}, R)$, 变换后的平衡分布函数仍记为 $f_0 = f_0(p_{\parallel}, p_{\perp}, R)$, 则

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial f_0}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial p_{\perp}} \right) \mathbf{e}_{\varphi} + \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \mathbf{e}_z + \frac{1}{p_{\perp}} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi} \mathbf{e}_{\phi}. \quad (10)$$

在迴旋坐标系中, 动量空间极角 $\phi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, 利用 $r = \frac{p_{\perp}}{m\Omega_0}$, (2) 式可写成

$$r'^2 = R^2 + \frac{p_{\perp}^2}{m^2\Omega_0^2} - \frac{2Rp_{\perp}}{m\Omega_0} \sin(\chi + \phi). \quad (11)$$

(11) 式两边对 p_{\perp} 求导, 得

$$\frac{\partial R}{\partial p_{\perp}} = \frac{1}{m\Omega_0} \sin(\chi + \phi) - \frac{p_{\perp}}{m^2\Omega_0^2 R}. \quad (12)$$

(11) 式两边对 ϕ 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \phi} &= \frac{\frac{Rp_{\perp}}{m\Omega_0} \cos(\chi + \phi)}{R - \frac{p_{\perp}}{m\Omega_0} \sin(\chi + \phi)} \\ &= \frac{p_{\perp}}{m\Omega_0} \cos(\chi + \phi) \left[1 + \frac{r}{R} \sin(\chi + \phi) + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \sin^2(\chi + \phi) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

将(12)、(13)式代入(10)式, 再代入(9)式, 可得

$$\begin{aligned} F_l(r, \mathbf{p}) &= -\frac{e}{c k_c^2 \Omega_l} \cdot \frac{\partial H_l(r)}{\partial r} \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + \frac{p_{\perp}}{m^2\Omega_0^2 R} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial R} \right) \right. \\ &\quad \left. + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] + F(\phi), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $F(\phi)$ 是(12)式右边第一项和(13)式代入(10)、(9)式积分的结果, 显然是 ϕ 以 2π 为周期的函数, 代入(7)式积分等于零. 这就是迴旋坐标系的优点. 在波导坐标系中 $J_{\varphi} \neq J_{\perp}$, $F(\phi)$ 积分不为零, 计算非常复杂^[8].

3. 色散关系 对于冷电子束, 可令(3)式中 $g(p_{\parallel}) = \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0})$, 代入(14)式, 再代入(7)式积分, 可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 \right) \frac{\partial H_l(r)}{\partial r} &= \frac{2v_{\parallel}}{\gamma_0 R} \left\{ \left[\frac{\partial H_l(r_c)}{\partial r} + r_c \frac{\partial^2 H_l(r_c)}{\partial r^2} \right] \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0}}{\Omega_{l0}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial H_l(r_c)}{\partial r} \cdot \frac{\beta_{\perp 0}^2 (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{\Omega_{l0}^2} \right\} \delta(R - R_0) \\ &\quad - \frac{2v_{\parallel}}{\gamma_0 R_0} \cdot \frac{r_c^2 (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0})}{\Omega_{l0}} \cdot \frac{\partial H_l(r_c)}{\partial r} \cdot \frac{\delta'(R - R_0)}{R}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\Omega_{l0} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0} - l\Omega_0/\gamma_0$, $\gamma_0 = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} (p_{\parallel 0}^2 + p_{\perp 0}^2)}$, $\beta_{\perp 0} = \frac{v_{\perp 0}}{c}$, $\nu = \frac{N_e e^2}{m c^2}$ 为布德克尔参数, $r_c = \frac{p_{\perp 0}}{m\Omega_0}$ 为拉摩半径.

由贝塞尔加法定理, $H_l(r) = H_0 J_l(k_c r) J_{m-l}(k_c R) e^{i(m-l)\varphi_0}$, 代入(15)式, 两边从 0 至 r_c 对 r 积分, 并注意到 $l \neq 0$ 时, $J_l(0) = 0$, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 \right) J_{m-l}(k_c R) &= \frac{2\nu k_c r_c}{\gamma_0 R_0 J_l(k_c r_c)} \left\{ [J'_l(k_c r_c) + k_c r_c J''_l(k_c r_c)] \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0}}{\Omega_{l0}} - J'_l(k_c r_c) \frac{\beta_{\perp 0}^2 (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{\Omega_{l0}^2} \right\} J_{m-l}(k_c R) \delta(R - R_0) \\ &\quad - \frac{2\nu k_c r_c}{\gamma_0 R_0} \cdot \frac{J'_l(k_c r_c)}{J_l(k_c r_c)} \cdot \frac{r_c^2 (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0})}{\Omega_{l0}} J_{m-l}(k_c R) \frac{\delta'(R - R_0)}{R}. \end{aligned}$$

两边乘以 $R J_{m-l}(k_c R) dR$, 从 0 至 a 积分, 并注意到

$$\begin{aligned} \int_0^a R J_{m-l}^2(k_c R) dR &= \frac{a^2}{2} \left[1 - \frac{(m-l)^2}{k_c^2 a^2} \right] J_{m-l}^2(k_c a), \\ \int_0^a J_{m-l}^2(k_c R) \delta'(R - R_0) dR &= -2k_c J_{m-l}(k_c R_0) J'_{m-l}(k_c R_0), \end{aligned}$$

可得色散关系

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 &= \frac{4\nu}{\gamma_0 a^2 K_{ml}} \left[\frac{Q_{ml} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0} - l\Omega_0/\gamma_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{\perp 0}^2 W_{ml} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0} - l\Omega_0/\gamma_0)^2} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $K_{ml} = J_{m-l}^2(k_c a) J_l(k_c r_c) \left[1 - \frac{(m-l)^2}{k_c^2 a^2} \right]$, $W_{ml} = k_c r_c J'_l(k_c r_c) J_{m-l}^2(k_c R_0)$,

$$\begin{aligned} Q_{ml} &= W_{ml} + k_c^2 r_c^2 \left[J'_l(k_c r_c) J_{m-l}^2(k_c R_0) + \frac{r_c}{R_0} J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_0) J_{m-l-1}(k_c R_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_c}{R_0} J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_0) J_{m-l+1}(k_c R_0) \right]. \end{aligned}$$

文献[7]用波导轴坐标系方法得到了以下色散关系:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_c^2 &= \frac{4\nu}{\gamma_0 a^2 K_{ml}} \left[\frac{Q_{ml} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0} - l\Omega_0/\gamma_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{\perp 0}^2 W_{ml} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2)}{(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel 0} - l\Omega_0/\gamma_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $K_{ml} = J_m^2(k_c a) \left(1 - \frac{m^2}{k_c^2 a^2} \right)$, $W_{ml} = [J'_l(k_c r_c) J_{m-l}(k_c R_0)]^2$,

$$\begin{aligned} Q_{ml} &= 2W_{ml} + k_c r_c \left[J'_l(k_c r_c) J''_l(k_c r_c) J_{m-l}^2(k_c R_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} J'_l(k_c r_c) J'_{l-1}(k_c r_c) J_{l-m-1}^2(k_c R_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} J'_l(k_c r_c) J'_{l+1}(k_c r_c) J_{l-m+1}^2(k_c R_0) \right]. \end{aligned}$$

对比(16)与(17)两式,可见用两种方法推得的色散关系是可以类比的。系数上的差异是由于二者使用的色散方程不同。在文献[7]中用的是 \mathbf{E} 的忽略 $\nabla\rho$ 的矢量波动方程,本文则直接从麦克斯韦方程(4)出发,在这一点上没有作近似。

四、结 论

本文给出了可用于回旋坐标系的电子平衡分布函数(3)式。这种分布函数给定了电子束的空间分布,并且由此能得到与波导轴坐标系方法的结果可类比的色散关系。从推导过程可以看出,回旋脉塞的动力学问题应用回旋坐标系法往往可使问题大为简化。

本文得到中国科学技术大学李敦复副教授及中国科学院电子学研究所郭和忠副研究员的指导及帮助,尤其是得到成都电讯工程学院刘盛纲教授多次帮助和莫元龙老师对本文提出过宝贵的意见,在此一并表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Hwan-Sap Uhm, R. C. Davidson and K. R. Chu, Phys. Fluids, **21** (1978), 1866.
- [2] Hwan-Sap Uhm, R. C. Davidson and K. R. Chu, Phys. Fluids **21** (1978), 1877.
- [3] K. R. Chu, Phys. Fluids, **21** (1978), 2354.
- [4] 刘盛纲, *On the Equilibrium Distribution Function in Kinetic Theory of ECRM, the Fifth International Conference on IR/MM Waves*, D10—5, (1980).
- [5] 刘盛纲, 电子学报, **9**(1981), 20.
- [6] 刘盛纲, 中国科学, 1979年, 第5期, 第524页.
- [7] V. L. Granatstein, 1980年7月在中国科学院电子学研究所的讲学资料.
- [8] J. L. Hirshfield, 1981年3月在成都电讯工程学院的讲学资料.

THE EQUILLIBRIUM DISTRIBUTION FUNCTION OF ELECTRONS IN THE GUIDING CENTER FRAME

Wang Jun-yi

(China University of Science and Technology)

In the kinetics of electron cyclotron masers, the method based on the local field expansion in the guiding center frame has many advantages. In this paper, an equilibrium function of electrons applicable to this method is given. The function specifies the space distribution of the electron beam explicitly. On employing this function, a dispersion relation which can compare with that derived in the waveguide axis frame is obtained.