推广的赫姆霍兹定理及其在电磁理论中的应用*

宋 文 淼

（中国科学院电子学研究所，北京）

摘要　本文证明了在直角、圆柱和球坐标系的规则边界的系统内，一个任意的矢量一定可以分解为无旋场、横电模场和横磁模场三个相互正交的分量，每一个分量都可用一个标量函数来描述. 并在此基础上证明了这些系统内的 $\{\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}\}$ 矢量波函数系的完备性. 由此说明了一个矢量函数空间不仅可以通过它在欧氏空间中的射影分解为三个不相交的子空间，同样可以通过它在矢量波函数系上的射影分解为三个不相交的子空间.

关键词　电磁理论;赫姆霍兹定理;无旋场

一、引　言

原始的赫姆霍兹定理是对自由空间的[1]，它可以描述如下:

如果一个任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 是一个连续可导的矢量函数，在无限远处它的值为零(或者更严格地说，当 $R\to\infty$ 时，$|\boldsymbol{F}|R^2\to 0$)，则这个矢量函数一定可以唯一地被分解成一个标量函数的散度和一个矢量函数的旋度之和,即:

$$\boldsymbol{F}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1}$$

赫姆霍兹定理使我们可以把一个矢量场分解为一个旋量场和一个无旋场. 文献 [2] 进一步证明了自由空间中的旋量场和无旋场之间有正交性. 文献 [3] 讨论了有界区域内的赫姆霍兹定理,证明任意有界域内的场也可以得到如 (1) 式的关系式,但是由于该文中对有界域场的讨论未加齐次边界条件的限制,而只要求边界上场有限,所以分离后的无旋场和旋量场就不再有正交性. 而正交性对函数空间理论来说是非常重要的,文献[4]改进了有界域中的赫姆霍兹定理的形式，把齐次边界条件考虑进去得到下面的结论: 一个在域 v 内满足矢量齐次边界条件的任意矢量函数一定可以唯一地分解成如 (1) 式所示的一个旋量场和一个无旋场,且旋量场和无旋场都分别满足同样的边界条件，它们之间相互正交. 这就是说，在域 v 内满足矢量齐次边界条件的矢量函数空间一定可以唯一地被分解成互不相交的两个子空间,即旋量场子空间和无旋场子空间.

为了说明这一点,取这样的变换:

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=-\nabla^2\boldsymbol{W}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{W}-\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{W}, & \text{在域 } v \quad (2)\\ \hat{n}\times\boldsymbol{F}=0 \text{ 和 } \nabla\cdot\boldsymbol{F}=0, & \text{在边界 } s \quad (3)\\ \hat{n}\times\boldsymbol{W}=0 \text{ 和 } \nabla\cdot\boldsymbol{W}=0, & \text{在边界 } s \quad (4)\end{cases}$$

1989 年 7 月 19 日收到，1990 年 7 月 27 日修改定稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

在文献[4]中证明了由(2)、(3)和(4)式所定义的变换是唯一的，即对给定的矢量函数 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{W}$ 有唯一解。如果令

$$\boldsymbol{F}_r = \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{W} \text{ 和 } \boldsymbol{F}_l = -\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{W} \tag{5}$$

还可以证明 $\boldsymbol{F}_r$ 和 $\boldsymbol{F}_l$ 都满足和(3)式相同的第一类矢量齐次边界条件，且 $\boldsymbol{F}_r$ 与 $\boldsymbol{F}_l$ 正交。

同样，$\boldsymbol{W}$ 也可以唯一地被分解成 $\boldsymbol{W}_r$ 和 $\boldsymbol{W}_l$。而从(5)式中看出，对 $\boldsymbol{F}_r$ 实际上只有 $\boldsymbol{W}_r$ 有贡献，而对 $\boldsymbol{F}_l$ 只有 $\boldsymbol{W}_l$ 有贡献，即：

$$\boldsymbol{F} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{A} = -\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{W}_l + \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{W}_r \tag{6}$$

我们把(1)式和任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 在欧氏空间上的射影的形式加以比较，则从

$$\boldsymbol{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z} \tag{7}$$

可以看出，一个任意的三维矢量 $\boldsymbol{F}$，一定可以用三个相互独立的标量函数(这里是 F_x、F_y 和 F_z)和已知的基矢(这里是 $\hat{x}$、$\hat{y}$ 和 $\hat{z}$)通过一定形式的组合而表示出来。赫姆霍兹方程把一个任意矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示成一个标量函数 φ 和一个矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的组合，这就类似于欧氏空间中不完全的射影形式：

$$\boldsymbol{F} = F_z\hat{z} + \boldsymbol{F}_t \tag{8}$$

这里 $\boldsymbol{F}_t$ 是横向场，是一个二维的矢量。从这一类比中可以看出，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 也应该是“二维”的。难怪有些文献中[5,6]把电流 $\boldsymbol{J}$ 的旋量分量称作 $\boldsymbol{J}_{横向}$，而把无旋分量叫作 $\boldsymbol{J}_{纵向}$。当然赫姆霍兹定理是把矢量场在并非是欧氏空间的子空间上进行射影，把它和欧氏空间中的射影，纵向和横向分量混淆起来是不对的.但是旋量分量确有和横向场同样的特性——二维性。本文所讨论的推广的赫姆霍兹定理就是希望把矢量场再分解成两个相互正交的分量，而每一分量都可以用一个独立的标量函数与基矢的一定的组合形式来表示。这就是说赫姆霍兹定理是矢量函数在一个不是欧氏空间的新的子空间系统中的不完全的射影，而推广的赫姆霍兹定理则是其完全的射影形式，这一新的子空间系统就是大家所熟知的 $\{\boldsymbol{L}、\boldsymbol{M}和\boldsymbol{N}\}$ 的矢量波函数的子空间系统.

二、推广的赫姆霍兹定理

为了讨论方便起见，我们先把系统作些限制，即只讨论规则的柱坐标系统。在这系统中有一个基矢是 $\hat{z}$，而所有的边界可以分成两类：一是 $\hat{n}\perp\hat{z}$ 的，即侧面边界；另一类 $\hat{n}/\!/\hat{z}$ 的，即端面边界。对于这类系统，由于侧面形状是不变的，所以对于任意的满足齐次边界条件的矢量函数，它在 z 方向是可以分离的。对于这类系统我们可以得到推广的赫姆霍兹定理。

柱形规则系统内任意满足矢量齐次边界条件的矢量函数一定可以分成一个无旋场，一个横电模场和一个横磁模场之和，即：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_l + \boldsymbol{F}_m + \boldsymbol{F}_n = \nabla\varphi_l + \nabla\times(\varphi_m\hat{z}) + \nabla\times\nabla\times(\varphi_n\hat{z}) \tag{9}$$

这里假定 $\boldsymbol{F}$ 满足第一类矢量齐次边界条件，即相当于电场的边界条件；$\boldsymbol{F}_m$ 只有横向分量称横电模式；$\boldsymbol{F}_n$ 称横磁模式，这是由于 $\nabla\times\boldsymbol{F}_n$ 只有横向分量。这里 φ_l 就是(1)式中的 φ。所以要证明(9)式成立只需证明：

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{W}_r = \nabla \times (\varphi_m \hat{z}) + \nabla \times \nabla \times (\varphi_n \hat{z}) \tag{10}$$

即对任意的旋量场一定可以找到唯一确定的 φ_m 和 φ_n 满足(10)式．把 $\boldsymbol{W}_r$ 表示成

$$\boldsymbol{W}_r = W_{rx}\hat{x} + W_{ry}\hat{y} + W_{rz}\hat{z} \tag{11}$$

则 W_{rx}、W_{ry} 和 W_{rz} 之间满足

$$\frac{\partial W_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial W_{ry}}{\partial y} + \frac{\partial W_{rz}}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

为了从(10)式的变换找出唯一确定的 φ_m 和 φ_n，我们把(10)式两边都展开：

$$\begin{aligned} &-\hat{x}\nabla^2 W_{rx} - \hat{y}\nabla^2 W_{ry} - \hat{z}\nabla^2 W_{rz} \\ &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\hat{x} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z}\hat{x} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial z}\hat{y} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}\right)\hat{z} \end{aligned} \tag{13}$$

这里利用了 $\boldsymbol{W}_r$ 的无散特性．从(13)式得

$$\nabla_t^2 \varphi_n = \nabla^2 W_{rz} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z} - \nabla^2 W_{rx} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \nabla^2 W_{ry} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial z} \tag{16}$$

(15)式和(16)式是等价的．我们只要把(15)式对 x 求偏微分，而(16)式对 y 求偏微分，就可证明两式是一样的．即两式相减，左右两边均为零．这就保证了变换的唯一性．为了得到 φ_m 和 $\boldsymbol{W}_r$ 的关系，把(15)式对 y 求偏导数加上(16)式对 x 求偏导数，得

$$\nabla_t^2 \varphi_m = \nabla^2\left(\frac{\partial W_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial W_{rx}}{\partial y}\right) \tag{17}$$

这里消去了 φ_n。如果我们令

$$\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{W}_r \tag{18}$$

则

$$\nabla_t^2 \varphi_m = \nabla^2 A_z \tag{19}$$

这样，我们就得到了(14)和(19)式一对变换．实际上(19)式可以由更简单的方法求出：对(10)式两边取旋度，并代入(18)式，则得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\hat{z}\nabla^2 \varphi_n) + \nabla \times \nabla \times (\varphi_m \hat{z})$$

这里，右边第一项为纯横向场，取纵向场相等，得

$$\nabla_t^2 \varphi_m = \nabla^2 A_z$$

从这里可以看到这两个变换的对称关系．如果 $\boldsymbol{W}_r$ 是旋量电场，则 $\boldsymbol{A}$ 就是磁场．为了讨论(14)和(19)式变换的唯一性，我们需确定 φ_m 和 φ_n 在侧面上应满足的边界条件．文献[7]已经证明，为了使 $\boldsymbol{F}_m$ 和 $\boldsymbol{F}_n$ 满足第一类齐次边界条件，在侧面上 φ_n 有与 W_z 同样的边界条件，即纵向电场应满足的边界条件；而 φ_m 有与 A_z 同样的边界条件，即纵向磁场的边界条件；而 A_z 和 W_{rz} 在 $\boldsymbol{F}$ 确定时都是唯一确定的，这样我们对任一固定的 z 都可解出唯一确定的 φ_m 和 φ_n。实际上，前面已指出，在这种系统中场的 z 方向是可分离的，所有的函数都是连续可导的，所以可逐点在 z 坐标上找出 φ_m、φ_n 与 $\boldsymbol{F}_r$ 的唯一确定关系，即在整个域上找出唯一确定的关系。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_l &= \sum_\lambda \boldsymbol{L}_\lambda \int \lambda \phi'_{l_\lambda} \varphi'_l dv' = \sum_\lambda \boldsymbol{L}_\lambda \int \left\{ -\frac{1}{\lambda} \nabla^2 \phi'_{l_\lambda} \right\} \varphi'_l dv' \\
&= \sum_\lambda \boldsymbol{L}_\lambda \left[\int_v \frac{1}{\lambda} \nabla \phi'_{l_\lambda} \cdot \nabla \varphi'_l dv' - \oint_s \varphi'_l \frac{1}{\lambda} \nabla \phi'_{l_\lambda} \cdot \hat{n} ds \right] \\
&= \sum_\lambda \boldsymbol{L}_\lambda \int_v \boldsymbol{L}'_\lambda \cdot \boldsymbol{F}'_l dv' \qquad (28)
\end{aligned}
$$

这里利用了 φ_l 的边界条件，面积分项为零。

(2) $\{\boldsymbol{M}\}$ 对 $\boldsymbol{F}_m$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 对 $\boldsymbol{F}_n$ 的完备性　从文献[5]

$$
\boldsymbol{N}_\lambda = \nabla \times \nabla \times \phi_{n_\lambda}/\lambda
$$

而 ϕ_{n_λ} 满足

$$
\begin{cases}
\nabla^2 \phi_{n_\lambda} + \lambda^2 \phi_{n_\lambda} = 0, & \text{在域 } v \text{ 上} \qquad (29) \\
\phi_{n_\lambda} = 0, & \text{在 } \hat{n} \perp \hat{z} \text{ 的边界上} \qquad (30) \\
\partial \phi_{n_\lambda} / \partial n = 0, & \text{在 } \hat{n} /\!/ \hat{z} \text{ 的边界上} \qquad (31)
\end{cases}
$$

而且还证明了 $\boldsymbol{N}_\lambda$ 的归一化系数和 ϕ_{n_λ} 的归一化系数之间的关系：

$$
I_{N_\lambda} = (\lambda^2 - h^2) I_{\phi_{n\lambda}} = k_c^2 I_{\phi_{n\lambda}} \qquad (32)
$$

这里为了让 ϕ_{n_λ} 和 $\boldsymbol{N}_\lambda$ 都有相同的归一化系数，则把归一化的 N 表示为

$$
\boldsymbol{N}_\lambda = \nabla \times \nabla \times \phi_n \hat{z} / (\lambda k_c) \qquad (33)
$$

为了使 $\boldsymbol{F}_n$ 满足边界条件，φ_n 应该有和 ϕ_{n_λ} 同样的边界条件，所以 φ_n 可以在 $\{\phi_{n_\lambda}\}$ 上展开

$$
\varphi_n = \sum_\lambda \phi_{n_\lambda} \int_v \phi'_{n_\lambda} \varphi'_n dv \qquad (34)
$$

对(34)式两边乘以 $\hat{z}$，并取二次旋度得

$$
\boldsymbol{F}_n = \nabla \times \nabla \times (\varphi_n \hat{z}) = \sum_\lambda \boldsymbol{N}_\lambda \int_v \lambda k_c \phi'_n \varphi'_n dv' \qquad (35)
$$

现在证明

$$
\int_v \boldsymbol{N}'_\lambda \cdot \nabla \times \nabla \times \varphi'_n \hat{z} dv' = \int_v \lambda k_c \phi'_{n_\lambda} \varphi'_n dv' \qquad (36)
$$

展开 $\boldsymbol{N}'_\lambda$ 并利用格林定理：

$$
\begin{aligned}
\int_v \boldsymbol{N}'_\lambda \cdot \nabla \times \nabla \times \varphi'_n \hat{z} dv' &= \int_v \frac{1}{\lambda k_c} \nabla \times \nabla \times \phi'_{n_\lambda} \hat{z} \cdot \nabla \times \nabla \times \varphi'_n \hat{z} dv' \\
&= \int_v \nabla \times \nabla \times \frac{1}{\lambda k_c} \nabla \times \nabla \times \phi'_{n_\lambda} \hat{z} \cdot \varphi'_n \hat{z} dv' \\
&= \int_v \frac{\lambda}{k_c} \nabla \times \nabla \times \phi'_{n_\lambda} \hat{z} \cdot \varphi'_n \hat{z} dv' \\
&= \int_v \frac{\lambda}{k_c} \varphi'_n \hat{z} \left(\hat{z} \nabla^2 \phi'_{n_\lambda} - \hat{z} \frac{\partial^2 \phi'_{n\lambda}}{\partial z^2} \right) dv' = \int_v \lambda k_c \varphi'_n \phi'_{n_\lambda} dv' \qquad (37)
\end{aligned}
$$

这里由于 ϕ_n 和 φ_n 的边界条件而使所有的面积分为零．把(30)式代入(35)式得

$$
\boldsymbol{F}_n = \sum_\lambda \boldsymbol{N}_\lambda \int_v \boldsymbol{N}'_\lambda \cdot \boldsymbol{F}'_n dv' \qquad (38)
$$

用同样的方法，利用 φ_m 在 $\{\phi_{m_\lambda}\}$ 上的展开，可以证明

$$\boldsymbol{F}_m=\sum_{\lambda}\boldsymbol{M}_{\lambda}\int_{v}\boldsymbol{M}'_{\lambda}\cdot\boldsymbol{F}'_m dv \tag{39}$$

由于文献[5]中已证明了 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 与 $\boldsymbol{N}_\lambda$ 之间的正交性，也可证明 $\boldsymbol{L}_\lambda$ 与 $\boldsymbol{M}_\lambda$（或 $\boldsymbol{N}_\lambda$）之间的正交性。这样就可证明 $\boldsymbol{F}_l$、$\boldsymbol{F}_m$ 与 $\boldsymbol{F}_n$ 相互之间的正交性。最后利用(9)式，把(22)、(38)和(39)式加起来，由于 $\boldsymbol{M}_\lambda$ 与 $\boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{F}_l$ 之间都是正交的。所以(39)式中 $\boldsymbol{F}'_m$ 可以用 $\boldsymbol{F}'$ 代替，同样(22)和(38)式中的 $\boldsymbol{F}'_n$ 和 $\boldsymbol{F}'_l$ 都可以用 $\boldsymbol{F}'$ 代替，得

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_l+\boldsymbol{F}_m+\boldsymbol{F}_n=\sum_{\lambda}\left\{\boldsymbol{L}_\lambda\int\boldsymbol{L}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv'+\boldsymbol{M}_\lambda\int\boldsymbol{M}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv'\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{N}_\lambda\int\boldsymbol{N}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv'\right\} \tag{40}$$

这样就证明了 $\{\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}\}$ 矢量波函数系的完备性。同时也给出了 $\boldsymbol{F}_m$、$\boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{F}_l$ 的非常明确的物理意义和简洁的数学表达式。

无旋场 $\boldsymbol{F}_l$ 就是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\{\boldsymbol{L}_\lambda\}$ 子空间上的射影：

$$\boldsymbol{F}_l=\sum_{\lambda}\boldsymbol{L}_\lambda\int\boldsymbol{L}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv' \tag{41}$$

横电模场 $\boldsymbol{F}_m$ 就是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\{\boldsymbol{M}_\lambda\}$ 子空间上的射影：

$$\boldsymbol{F}_m=\sum_{\lambda}\boldsymbol{M}_\lambda\int\boldsymbol{M}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv' \tag{42}$$

横磁模场 $\boldsymbol{F}_n$ 就是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\{\boldsymbol{N}_\lambda\}$ 子空间上的射影：

$$\boldsymbol{F}_n=\sum_{\lambda}\boldsymbol{N}_\lambda\int\boldsymbol{N}'_\lambda\cdot\boldsymbol{F}'dv' \tag{43}$$

同样，如果系统是球坐标系，则 $\boldsymbol{F}_l$、$\boldsymbol{F}_m$ 和 $\boldsymbol{F}_n$ 就分别为 $\boldsymbol{F}$ 在球矢量波函数系 $\{\boldsymbol{L}\}\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 上的射影。

四、推广的赫姆霍兹定理在电磁理论中的意义和应用

经典场论的基础是利用矢量场在欧氏空间中的射影来求解麦克斯韦方程组。但是实际上麦克斯韦方程组中，不论哪一个方程它们在欧氏空间中的射影是不可分离的，所以严格说来用经典数学的方法，即欧氏空间中射影的方法是不可能把麦克斯韦方程组——矢量偏微分方程组分离成标量偏微分方程组的。为了在经典数学的范围内求解麦克斯韦方程组，人们不得不引入洛仑茨规范，并把麦克斯韦方程组转换成矢量赫姆霍兹方程。虽然上百年来人们已经习惯了这套方法，但实际上，洛仑茨规范仅仅是为了使方程能在经典数学范围内求解才作出的假定，而没有任何物理和数学上的依据。通过洛仑茨规范所得到的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的矢量赫姆霍兹方程不是物理上的对电磁场问题的精确的方程形式，而仅仅只是对旋量场部分有效的一种近似形式。

在物理上电磁场问题是由两个相互独立的物理问题组成的：一个是电荷场，它是由库仑定律描述的；它的特点是算子中不包含 k^2，可以由标量 ∇^2 算子来描述，或用泊松方程来描述。另一类是电磁波的场，它是由含 k^2 的算子 $\nabla\times\nabla\times-k^2$ 来描述的。用经典的数字方法，通过洛仑茨规范，把麦克斯韦方程组转换成一对都包含 k^2 的矢量和标量的

赫姆霍兹方程组．因此在这类求解方法中，由库仑定律确定的空间电荷场消失了，而产生了所谓的“源区场”，由于经典数学的局限性，不同的处理方法会得到不同的“源区场”的形式，因而引起了很多的争论[11]．实际上这一争论是不可能在经典数学的范围内解决的．

推广的赫姆霍兹定理为电磁矢量提供了另一类空间，算子的本征函数空间．由于电磁场问题本来就是 $\nabla\nabla\cdot$ 算子和 $\nabla\times\nabla\times - k^2$ 算子的两个独立的算子方程问题，所以在这两个算子所属的子空间中射影，自然可以把矢量偏微分方程分离成标量偏微分方程的问题，因为它的每一个子空间 $\{\boldsymbol{L}\}$、$\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 都可以用相应的标量函数来描述．怎样把并矢关格林函数问题通过在 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 子空间上的射影转换成标量格林函数来求解，已在文献[12]中详细地进行了讨论，这里不再重复．只是文献[12]中直接利用了(9)式而没有加以证明，本文的证明为文献[12]的方法提供了严格的理论基础．

最后要讨论的是在一般边界条件下场的本征函数展开问题．与赫姆霍兹定理不同，推广的赫姆霍兹定理只在规则边界下才成立，而赫姆霍兹定理和边界形状无关．这就是说一个满足矢量齐次边界条件的矢量函数空间一定可以被分解成两个互不相交的子空间：无旋场子空间和旋量场子空间；而一个旋量场子空间只有当边界是规则时才能分解成两个不相交的子空间——横电场子空间和横磁场子空间．这样一来似乎使问题有很大的局限性，其实不然．在不规则边界的域内，无法得到 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 的函数系的解析形式，所以也无法讨论在这些函数系上展开的问题．但是如果取一个包括上面不规则边界域的规则边界的系统，在这一大的规则系统内，可以找到 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 本征函数系．而包含在这规则系统内的任意不规则边界所包含的域内的场也可以在 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 上展开．这时只要取 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 的一定形式的组合就可满足特定的边界条件．自由空间是最大的规则边界系统，所以 $\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 的自由空间球矢量波函数对各种散射问题都构成完备的正交系．只是存在散射体后，$\{\boldsymbol{M}\}$ 和 $\{\boldsymbol{N}\}$ 在包含散射体的不规则边界的域内不再是独立的，而必须按一定的组合形式以孪生模的形式出现，这些概念和方法在求解电磁问题中是很有用的．

参　考　文　献

[1] P. M. Morse, F. Feshback, Math. of Theoretical Phys., Pt. I, McGraw-Hill Book Company, New York. (1953).

[2] 宋文淼，微波，1986 年，第 3 期，第 23—28 页．

[3] 林为干，微波理论和技术，科学出版社，(1979)，p.671．

[4] Wang Jianying, Song Wenmiao, Helmholtz's Theorem and Expansions of Eigenfunctions of EM Field in Resonant Cavity, APMC'88, The Second Asia-Pacific Microwave Conference, Beijing, (1988), p. 85.

[5] J. D. 杰克逊著，朱培予译，经典电动力学，上册，人民教育出版社，(1980)，p.244．

[6] O. L. Brill, B. Grodman, *Am. J. Phys.*, 35(1967), 832.

[7] 宋文淼，电子科学学刊，8(1986)3，188—195．

[8] K. Kurokawa, *IRE Trans. on MTT*, MTT-6 (1958), 178—187.

[9] 龚书喜，电磁理论中广义本征函数展开问题，西安交通大学博士论文，1987 年．

[10] 宋文淼，微波学报，1989 年，第 3 期，第 21—28 页．

[11] R. E. Collin, *Radio Science*, 21 (1986), 883—890.

[12] 宋文淼、王建英，电子科学学刊，11(1989)5，518—527．

EXTENDED HELMHOLTZ THEOREM AND ITS APPLICATION IN ELECTROMAGNETIC THEORY

Song Wenmiao

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract It is proved that in a regular boundary system of rectangular, cylindrical or spherical coordinate, an arbitrary vector function can be separated into three orthogonal parts: TE mode field, TM mode field and irrotational field. Each of these components can be determined fully by a scalar function. On the basis of this theorem, the completeness of vector wave function system $\{\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \text{and} \boldsymbol{N}\}$ is proved also. Thus it is explained that a vector function space can be projected into three uncrossed subspaces not only in Euclidean space but also in the subspace of vector wave function space.

Key words Electromagnetic Theory; Helmholtz theorem; Irrotational field