

回旋管开放腔的衍射理论和工程设计*

朱锦林 吴鸿适

(北京真空电子器件研究所)

提 要

本文利用横截面法并引入“相位修正因子”推导出非对称模式情况下的缓变截面圆波导和同轴波导开放腔的开放端的衍射反射系数。由此得到开放端口处的衍射边界条件,进而求得开放腔的主要参数,并求解了多模问题。文中比较了几种形式的开放腔,认为变截面同轴波导开放腔的本征频谱最稀。此外,本文还对模式竞争和工程计算方法作了简要讨论。

一、引 言

关于开放腔的理论基本上可分为两类:一类是准光学衍射理论^[1],它适合于菲涅耳(Fresnel)数较大的激光器谐振腔;另一类是微波理论^[2-6],它利用索末菲(Sommerfeld)辐射条件,用爱里(Airy)函数求解场,它适合于低次模的高Q情况,但难于用它来解释在高次模式工作的回旋管中会激励起低次模式来,更难于用它来解释这些寄生模式的特性。

回旋管在不断地向更短波长和更大功率方向开拓,就需要利用高次模式,但这将使模式竞争问题更加突出。为了实现单一模式、高效率的稳定振荡,设计性能优良的开放腔是至关重要的。我们还利用本文推导出的变截面开放腔的衍射公式对如何选择开放腔的结构和如何设计场分布形状,以使本征频谱稀疏化进行了讨论,并对主要竞争模式的本征频率、Q值和高频场纵向分布函数等参数的计算作了简要讨论。

二、缓变截面圆波导开放腔

对于 $a(z) = a_0 + a_1(z)$ 的圆波导开放腔,我们利用横截面法^[7],假设在任意位置 z_1 上的比较波导为半无限长,再运用积分变换法,便可得到一组维纳-霍夫(Wiener-Hopf)型积分方程组^[8,9]。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izw} G(w) dw &= 0, \quad (z < z_1); \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{izw} \phi_m(w) G(w) dw &= 0, \quad (z > z_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

以 H_{mn} 模为例,(1)式中的

$$\phi_m(w) = H'_m(w) J'_m(w), \quad (2)$$

* 1984年1月3日收到,1985年1月10日修改定稿。

而 H'_m 为 m 阶汉克尔 (Hankel) 函数的导数, J'_m 为 m 阶贝塞尔 (Bessel) 函数的导数. (1) 式中的

$$G(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{i w z} dz,$$

而

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w) e^{i z w} dw = \sum^n \text{Res}\{G(w_n) e^{-i w_n z}\},$$

式中 $\sum^n \text{Res}\{ \}$ 为函数 $G(w)$ 在 w 复平面的上半平面内的奇点 w_n 的留数和. 将 ϕ_m 因子化, 令

$$\begin{aligned} \phi_m(w) &= \phi_m^+(w) \cdot \phi_m^-(w), \\ \phi_m^+(-w) &= \phi_m^-(w). \end{aligned}$$

ϕ_m^+ 和 ϕ_m^- 分别在上半平面 ($\text{Im} w \geq 0$) 和下半平面 ($\text{Im} w \leq 0$) 内无零点, 并且处处是解析的, 故在开放端的衍射反射系数和模式转换系数为^[8,9]

$$\left. \begin{aligned} R &= -\text{Res}G(-w)/\text{Res}G(w) = -\sqrt{\frac{k+w}{k-w}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\phi_m^+(w)}{w \phi_m^-(w)}, \\ R_{l,n} &= -\text{Res}G(-w_l)/\text{Res}G(w_n) = -\sqrt{\frac{k+w_l}{k-w_l}} \cdot \frac{1}{w_l + w_n} \cdot \frac{\phi_m^+(w_l)}{\phi_m^-(w_n)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $R_{l,n}$ 是入射波为 H_{ml} 模, 反射波为 H_{mn} 模的模式转换系数. 将德拜 (Debye) 近似表达式代入 (2) 式 (略去 $a^2(z)$ 和 w^4/a^2 项), 得

$$\phi_m(va) = 1 - \exp[2i\Omega_m(va)],$$

式中

$$\Omega_m(va) = \Omega_m(ka) - 2\Phi(z) - w^2 z / 2k,$$

这里 v 为横向波数, w 为纵向波数, k 为波数, Ω_m 为汉克尔函数导数的辐角, 而

$$\Phi(z) = ka_1(z) [1 - (m/ka_0)^2]^{1/2}, \quad (4)$$

它表示缓变截面引起的横向相位增量, 称为“相位修正因子”. 利用文献[8]中推导瓦因施坦 (Вайнштейн) 函数相类似的途径, 求出修正的瓦因施坦积分

$$V(s, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 - \exp \left(i 2\pi p - \frac{t^2}{2} + i 4\Phi(z) \right) \right] \frac{dt}{t - e^{i\pi/4}}, \quad (5)$$

式中, p 表示直圆波导的开放端效应,

$$\begin{aligned} p &= (ka_0 - \mu_{mn}) \Omega'_m(ka_0) / \pi, \\ s &= \sqrt{\frac{2}{ka_0}} w_l \approx \sqrt{4\pi p}, \end{aligned}$$

而 μ_{mn} 为 J'_m 的第 n 个根.

利用瓦因施坦函数, 缓变截面圆波导开放端效应可表示为

$$p_{eq} = p + 2\Phi(z) / \pi.$$

它与缓变截面的形状有关. 当 $w \ll k$ 时, 我们有

$$\left. \begin{aligned} R &\approx -\exp[2V(s, p)] / s^2, \\ R_{l,n} &\approx -\exp[V(s, p) + V(s_n, p)] / s(s + s_n). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里 $s_n = \sqrt{\frac{2}{k a_0}} w_n \approx \sqrt{4\pi(p+l-n)}$.

令 $R = |R| \exp(i\theta)$, 则本征频率可由下式

$$2 \int_0^L w dz + \theta_1 + \theta_2 = 2nq \quad (7)$$

确定, 式中 L 为腔长, $q = 1, 2, 3 \dots$, 为本征模的纵向下标. 由 (1) 式可知

$$\theta = 2I_m[V(s, p)] - \pi/2.$$

(若为 E_{mn} 模, 则 $\theta = 2I_m[V(s, p)] + \pi/2$.)

衍射的 Q 值为

$$Q = \frac{4\pi \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2}{q^2} \frac{1}{1 - |R_1 R_2|}, \quad (8)$$

式中 R_1, R_2 分别为两端口处的反射系数.

开放腔的高频场分布函数满足非均匀弦方程^[2]

$$\frac{d^2 E_m(z)}{dz^2} + w^2(z) E_m(z) = 0. \quad (9)$$

衍射的边界条件为

$$|E_m(z_1)| = \sin \theta_1 \text{ 和 } |E_m(z_2)| = \sin \theta_2,$$

从而可求得定解. 对于鼓形开放腔, 高频分布函数应满足韦泊 (Weber) 方程, 其解为厄米特 (Hermite) 多项式.

对于常见的圆锥形开放腔, $a(z) = a_0 + a_1(z) \operatorname{tg} \delta$, δ 为锥角. 以开放端为原点, 腔长取为 L , 则

$$\Phi(L) = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \delta \sqrt{1 - m^2 / (k a_0)^2},$$

令 $\zeta = 1 + z \operatorname{tg} \delta / a_0$, $A = (a_0 k / \operatorname{tg} \delta)^2$, $n = \frac{1}{2} - \nu, \nu^2 - \nu = \mu_{mn}^2 / (\zeta \cdot \operatorname{tg} \delta)^2$ 和 $E_m(\zeta) = \zeta^{n+\nu} z_n(\sqrt{A\zeta})$, 并代入 (9) 式, 可得典型的贝塞尔方程

$$z_n'' + z_n' / (\sqrt{A\zeta}) + [1 - n^2 / (\sqrt{A\zeta})^2] z_n = 0.$$

这样便可求得高频场分布函数

$$E_m(z) = C_1 \zeta^n J_n(\sqrt{A\zeta}) + C_2 \zeta^{-n} J_{-n}(\sqrt{A\zeta}).$$

除 $n = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}$ 和 ± 1 外, 一般情况下需将上式展开成级数求解. 常数 C_1 和 C_2 由边界条件确定.

高频场最大振幅的位置是设计回旋管的关键参数之一, 可从下式

$$2 \int_0^x w dz + \theta_1 = q\pi$$

求出. 以开放端作为坐标原点, 可以求得任意给定的 q 次纵向谐波的振幅峰值点的位置,

$$x = z_1, z_2, \dots, z_q.$$

高频场分布函数可零级近似为

$$E_m(x) \approx (\sin^2 A + \cosh^2 B - \cosh 2B)^{\frac{1}{2}},$$

式中,

$$A = [(\pi q z / L) \cdot (1 + \beta / M)] / [(1 + \beta / M)^2 + \beta^2 / M^2],$$

$$B = [(\pi q z / L)(\beta / M)] / [(1 + \beta / M)^2 + \beta^2 / M^2];$$

而

$$M = \sqrt{kL^2 / (2bm)},$$

$$b_m = a_0(1 - m^2 / \mu_{mn}^2),$$

$$\beta = 0.824.$$

例 计算图 1 给出的变截面实验开放腔 我们先用迭代法求其本征频率, 取 $f_0 = f_c[1 + q^2 \cdot \lambda_c^2 / (8L^2)]$ 作为迭代初值代入 (7) 式 (f_c 为截止频率); 然后由 (6) 式和 (8) 式计算 R 和 Q 值. 所得结果, 计算值与实验值基本一致, 差别在测量误差范围之内. 若在图 1 所示腔的“ A ”处放置一衰减器, 则对纵向二次和三次谐波模式的衰减很大, 而对纵向基波模式几乎无影响. 此法用于回旋管, 已取得满意的效果.

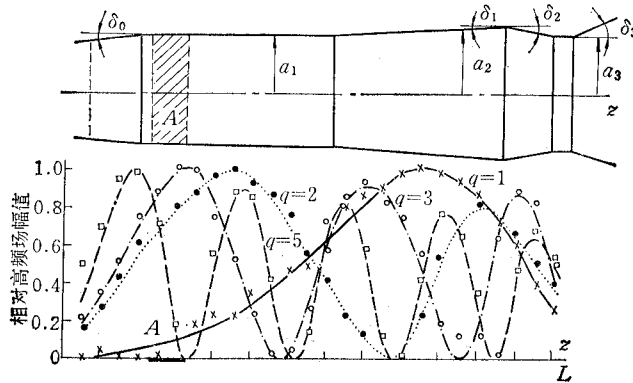


图 1 实验 H_{01} 模圆波导开放腔及其射频频场分布函数

三、缓变截面同轴开放腔

对内径为 $a(z) = a_0 + a_1(z)$, 外径为 $b(z) = b_0 + b_1(z)$ 的同轴开放腔, 我们仍利用横截面法和维纳-霍夫积分变换法求解. 若

$$m^2 / (ka_0)^2 \ll 1, d = (b - a) \gg a,$$

则有

$$\Omega_m(kd) \approx \Omega_m(kb) - \Omega_m(ka).$$

将 $d(z)$ 写作

$$d(z) = b(z) - a(z) = d_0 + d_1(z),$$

则可得与上述的变截面圆波导开放腔相同的形式, 只要将 a 换成 d 即可. 相应的相位修正因子则可写成

$$\Phi(z) = kd_1(z) [1 - m^2 / (kd_0)^2]^{1/2}.$$

这里应当注意的是, μ_{mn} 为方程式

$$N'_m(x \cdot \Delta) J'_m(x) - J'_m(x \Delta) N'_m(x) = 0$$

的第 n 个根; 式中 $\Delta = b/a$, N'_m 为 m 阶诺埃曼 (Neumann) 函数的导数。

此外, 对等效波数法^[5] 还可作进一步推广。若已知同轴开放腔的横向波数为 $\nu(z)$, 则可得与其等效的圆波导开放腔的等效半径 $b_{eq}(z) = \mu_{mn}/\nu(z)$ 。若工作模式在 $z = 0$ 处是截止的, 则 $b_{eq}(0) = b_0$, 这样, 等效圆波导开放腔的等效尺寸可由下式

$$b_{eq}(z) = \left\{ \left(1 - \frac{b_0}{a(z)\mu_{mn}} \cdot \frac{d\mu_{mn}}{d\Delta} \right) db_1(z) + \frac{b(z)}{a^2(z)\mu_{mn}} \cdot \frac{d\mu_{mn}}{d\Delta} da_1(z) \right\} + C \quad (10)$$

唯一确定; 式中, 积分常数 C 可由 $b_{eq}(0)$ 确定。

例 设计一个 H_{521} 模式的高 Q 谐振腔 若取 $\Delta = 3$, 则主要的竞争模式将是 H_{231} , H_{331} , H_{911} 和它们的纵向谐波模式。利用当非对称模式的内焦散面接近内导体时, 则内导体的外形对该模式有很大影响的特点, 可以将内导体设计成双锥形的, 如图 2(a) 所示。此时, 由于 H_{231} 和 H_{331} 模式在最小等效半径 b_{min} 处是过截止的, 因而这两个模式就远远偏离了工作频率范围。 H_{911} 模是一个低 Q 模, 等效于一个直圆波导开放腔。因此模式分割就比较容易, 且较易实现单模振荡。选择 a_2 , δ_2 和 L_2 的尺寸, 可调整 H_{521} 模的 Q 值。若 b_2 略小于截止半径, 其反射系数可按文献[4]的方法求出。实验值与计算值相符。

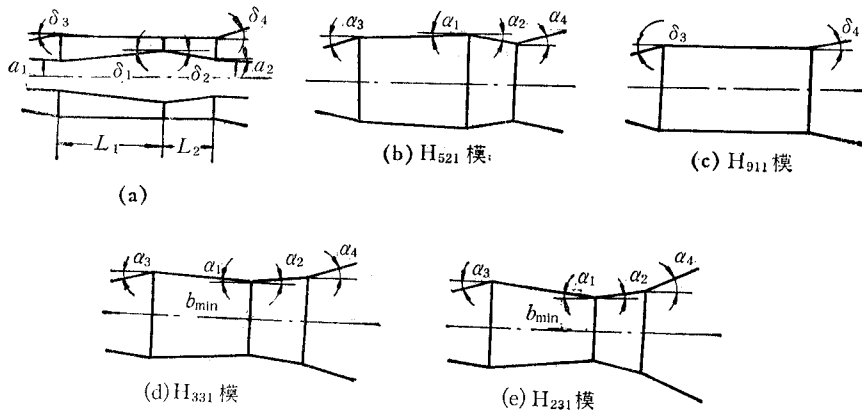


图 2 H_{521} 模的高 Q 同轴开放腔和主要竞争模式的等效圆波导开放腔

(a) 尺寸示意图

(b) H_{521} 模 $\alpha_1 = 0.43\delta_1$, $\alpha_3 = 1.29\delta_3$, $\alpha_2 = 0.43\delta_2$, $\alpha_4 = 1.29\delta_4$

(c) H_{911} 模 $\alpha_3 = \delta_3$, $\alpha_4 = \delta_4$

(d) H_{331} 模 $\alpha_1 = 0.815\delta_1$, $\alpha_3 = 1.24\delta_3$, $\alpha_2 = 0.815\delta_2$, $\alpha_4 = 1.24\delta_4$

(e) H_{231} 模 $\alpha_1 = 1.28\delta_1$, $\alpha_3 = 1.38\delta_3$, $\alpha_2 = 1.28\delta_2$, $\alpha_4 = 1.38\delta_4$

四、结 论

开放腔中采用的衍射的辐射条件是符合惠更斯 (Huygens) 原理的^[8,10]。这些条件可以用来计算开放腔参数和处理多模问题。

参 考 文 献

- [1] Л.А. Вайнштейн, Открытые Резонаторы и Открые Волноводы, Изд. Советское Радио, М.,(1966).
 [2] С. И. Власов и др., Изв. Вудов Радиопизика, 12 (1969), 1236.

- [3] 周乐柱、徐承和、龚中麟,物理学报, **30** (1981), 154.
[4] 钱景仁,电子学通讯, **4** (1982), 8.
[5] С. Н. Власов и др., Радиотехника и Электроника, **21** (1976), 1485.
[6] A. W. Fliflet and M. E. Read, Int. J. Electronics, **51** (1981), 475.
[7] Б. З. Каценеленбаум, Теория Нерегулярных Волновод с Медленно Меняющимися Параметрами, Изд., АН СССР, (1961).
[8] Л. А. Вайнштейн, Теория Дифракции и Метод Фракторизации, Изд., Советское Радио, М., (1966).
[9] B. Nobel, Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Equations, Pergamon Press, (1958).
[10] B. B. Baker and E. F. Copsons, The Mathematical Theory of Huygens Principle, 2nd ed., Oxford, The Clarendon Press, (1953).

DIFFRACTION THEORY AND ENGINEERING CALCULATION OF OPEN RESONATORS OF THE CIRCULAR AND COAXIAL WAVEGUIDE TYPES FOR GYROTRON

Zhu Jinlin, Wu Hongshi

(Beijing Vacuum Electron Devices Research Institute)

By using the method of transverse-section, the reflective coefficient of diffraction in the open-end of resonators with slowly varying cross-section under general unsymmetrical mode conditions have been found by introduction of a "phase correction factor". Diffraction boundary conditions in the open-end are obtained, and can be used to solve multimode problems. Several different types of open resonators are studied, and methods of engineering calculation also briefly discussed.

更 正

陆生勋同志来函称：“刊登在1985年第2期上的‘关于Coates图的1-因子的算法’一文的作者是陆生勋、朱加生、徐宗元”。特予更正。