第5卷 第4期 电子科学学刊 Vol. 5, No. 4
1983 年 7 月 JOURNAL OF ELECTRONICS July, 1983

关于无重复分解产生树的定理*

陆 生 勋
（杭 州 大 学）

提 要

本文定义了一种二分图，称之为互补划分图．利用此图容易证明有关互补划分的定理，并可得到一个判别是否是本性互补划分的较弱的条件．

一、引 言

Chen[1,2] 在 1969 年先后发表无重复分解（decomposition without duplications）产生树和余树的算法，以后在专著[3]中又总结了这方面的工作．为了进行这种算法，他定义了集合的互补划分（Complementary partitions）和本性互补划分（essential complementary partitions）并给出有关这种划分的定理．利用本性互补划分所联系的多树（multi-trees）两两作笛卡儿相乘，这些乘积的并集就是一个图的全部的树．本文的目的是阐述互补划分与二分图（bipartite graph）的关系，证明与互补划分和本性互补划分有关的定理，然后给出较简单的判别本性互补划分的条件．

二、互补划分图

定义 互补划分图是以 V', V'' 为不相交的顶点集，以 E 为边集的一个二分图 $G(V', V''; E)$，且在 E 中恰有 1 条无向边 $j=[x, y]$，其他 $|E|-1$ 条边均为有向边，各顶点的出度（outgoing degree）除 $d^+(x)=0$, $d^+(y)=0$ 以外，其他 $v \neq x, y$ 的各顶点的出度 $d^+(v)=1$．

设 $P'(H_k)$ 和 $P''(H_k)$ 是集合 H_k 的两个划分．如果存在 $V \subseteq H_k$，j 是 V 的一个元素使 V 和 $\overline{V-\{j\}}$ 分别为 $P'(H_k)$ 和 $P''(H_k)$ 的相异代表集（set of distinct representation)，则这两个划分为 H_k 对 j 的互补划分，简称互补划分[3]．这里 $\overline{V-\{j\}}$ 表示 H_k 中子集 $V-\{j\}$ 的补集．H_k 对 j 的互补划分写作 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$． 如果互补划分 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$ 不存在满足以下条件的互补划分 $C_j[P'(V), P''(V)]$，则称 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是本性互补划分：

(1) $V \neq \phi$,

* 1982 年 1 月 15 日收到．

(2) $V \subset H_k$,

(3) $P'(V) \subseteq P'(H_k)$, $P''(V) \subseteq P''(H_k)$.

定理 1 (1) 若 $G(V', V''; E)$ 为一互补划分图,无向边为 j, 则 V' 的各顶点,V'' 的各顶点所关联的边集构成 E 对 j 的互补划分 $C_j[P'(E), P''(E)]$. (2) 若有 H_k 对 j 的互补划分 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$, 则以 H_k 为边集可构造一个互补划分图 $G(V', V''; H_k)$, 使 j 为其中的无向边.

[证] (1)设 $G(V', V''; E)$ 为一互补划分图, 无向边为 j, $v'_i \in V'(1 \leqslant i \leqslant p)$, $v''_l \in V''(1 \leqslant l \leqslant q)$. 若用 $Incv'_i$ 表示顶点 v'_i 所关联的全部边(包括出边、入边和无向边),则

$$P'(E) = \{Incv'_1; Incv'_2; \cdots\cdots; Incv'_p\}, \tag{1}$$

$$P''(E) = \{Incv''_1; Incv''_2; \cdots\cdots; Incv''_q\}, \tag{2}$$

显然都是 E 的划分.

因为划分 $P'(E)$ 的相异代表集是

$$R = \{(v'_r, v''_s)/v'_r \in V', v''_s \in V''\} \cup \{j\},$$

划分 $P''(E)$ 的相异代表集是

$$R^* = \{(v''_x, v'_y)/v'_y \in V', v''_x \in V''\} \cup \{j\},$$

所以

$$R^* = E - (R - \{j\}) = \overline{R - \{j\}}.$$

可见 $P'(E)$ 和 $P''(E)$ 的相异代表为 R 和 $\overline{R - \{j\}}$, 因而是 E 对 j 的互补划分.

(2) 设 $H_k = \{1, 2, \cdots\cdots, k\}$,

$$P'(H_k) = \{V'_1; V'_2\cdots\cdots; V'_p\}, \tag{3}$$

$$P''(H_k) = \{V''_1; V''_2; \cdots\cdots; V''_q\}, \tag{4}$$

是互补划分 $C_j = [P'(H_k), P''(H_k)]$. 先作无向二分图 $G(V', V''; E)$:(a)将 $P'(H_k)$ 的每个元素 V'_i 看作属于顶点集 V' 的一个顶点 V'_i, $V' = \{V'_1, V'_2, \cdots\cdots, V'_p\}$. 同样,从 $P''(H_k)$ 作出顶点集 $V'' = \{V''_1, V''_2, \cdots\cdots, V''_q\}$. ($b$) 从 H_k 中取一个元素 x, 则 x 必属于式(3)的某元素,又属于式(4)的某元素. 若 $x \in V'_u \cap V''_w$, 则在 G 中以 x 作为连接 $V'_u \in V'$, $V''_w \in V''$ 的一条边, 如此对应 H_k 的 k 个元素一一连接 V' 和 V'' 的顶点构成无向二分图. 按照定义,从上述 H_k 中所取的元素 x, 当 $x \neq j$ 时,则不是 $V'_i(1 \leqslant i \leqslant p)$ 的相异代表就是 $V''_j(1 \leqslant j \leqslant q)$ 的相异代表, 故可给边 x 赋予方向使得边 x 的始点对应 V'_i 或 V''_j 的相异代表. 显然,此混合图为互补划分图.

现在举例说明互补划分图. 设 $H_{11} = \{1, 2, \cdots, 11\}$, 此集合的两个划分是

$$P'(H_{11}) = \{1, 4; 2, 3, 5, 6; 7; 10; 8, 9, 11\},$$

$$P''(H_{11}) = \{1; 2; 3; 5; 4, 6, 8; 7, 9; 10, 11\}.$$

相异代表集分别为

$$V = \{4; 6; 7; 10; 11\},$$

$$\overline{V - \{11\}} = \{1; 2; 3; 5; 8; 9; 11\}.$$

相应的互补划分图如下:

定理 2 在不连通的互补划分图中, 不包含无向边的各连通支都恰有一个圈.

将无向边换以通过该边的两个端点的有向圈 C_2 就是文献 [4] 定义的函数有向图

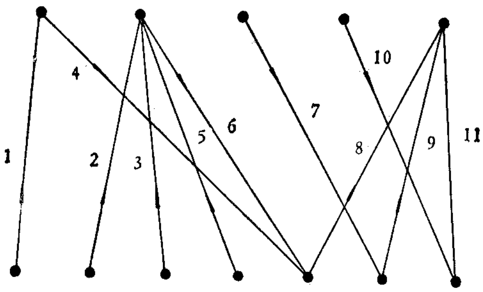

图1　互补划分图

Fig. 1 Complementary partitive graph

(functional digraph)，利用文献[4]的定理16.5即可证明本定理.

定理3　当且仅当互补划分图是连通图时，边的互补划分是本性互补划分.

[证]　**充分性**　设 $G(V', V''; E)$ 是个连通的互补划分图，j 是无向边. 用反证法，假设 E 对 j 的互补划分 $C_j[P'(E), P''(E)]$ 不是本性互补划分，根据定义应存在互补划分 $C_j[P'(E_s), P''(E_s)]$，其中 E_s 为 E 的非空真子集. 设边 $l_x \in E_s$，边 $l_y \in E - E_s$，因 $G(V', V'', E)$ 连通，故有一条始边为 l_x，终边为 l_y 的半路 (semipath) P_{xy}. 在半路 P_{xy} 上至少有一个顶点，譬如说 $v'_i \in V'$，它在 P_{xy} 中所关联的两条边有一条属于 E_s 而另一条不属于 E_s. 因此 $Inc\,v'_i \not\subseteq P'(E_s)$，这意味着被划分的子集是 $E_s \not\subset Inc\,v'_i$ 而不是 E_s，与存在 $C_j[P'(E_s), P''(E_s)]$ 矛盾.

必要性　设 $G(V', V''; E)$ 是互补划分，证明 G 不连通时，E 的互补划分不是本性互补划分. 因 G 不连通，由定义知 G 有一个含有一条无向边的连通支 G_c. 显见 G_c 是互补划分图，据定理1(1)，存在 $E_c(=E(G_c))$ 的互补划分 $C_j[P'(E_c), P''(E_c)]$. 因此 E 的互补划分不是本性互补划分. 证毕.

根据本定理只须判别互补划分图是否连通就可决定是否是本性互补划分. 判别条件比文献[3]的定理5.26简单.

定理4　若 H_k 对某元素是本性互补划分时，则对 H_k 的任一元素都是本性互补划分.

[证]　此定理即文献[3]的定理5.25，亦可利用互补划分图 G 来证明. 事实上与本性互补划分相应的 G 的基图 (underlying graph) 是树 t，而 G 是以无向边 $[l, m]$ 的两端点为汇的两人树 $t_{l,m}$，因此将 G 的任意一条有向边 (a, b) 改为无向边 $[a, b]$ 并以它的两端点为汇从基图 t 构成两人树 $t_{a,b}$ 就得到另一互补划分图. 显然这样作不会影响边集的划分，故有上述定理.

定理5　设 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是本性互补划分，$|H_k| \geqslant 3$，$P'(H_k) \cup P''(H_k)$ 中元素最多的部分为 V_m. 若 $|V_m| = \Delta$，则 $P'(H_k) \cup P''(H_k)$ 中至少有 Δ 个 $|V_i| = 1$ 的元素，至多有 $n \leqslant \left[k + 1 - \dfrac{k-1}{\Delta - 1}\right]$ 个 $|V_i| = 1$ 的元素.

这里的 V_i 即文献[3]引理5.3中的 p，是该引理的推广.

[证]　对应 H_k 构造一个互补划分图 G，利用 G 的基图是树这一性质，证明如下：设树

的顶点 v 有最大度 Δ，以 $Incv$ 的各条边为始边作长度为极大的路，则终边即末端边(terminal edge)，显然至少有 Δ 条，所以 $|V_i|=1$ 的元素至少有 Δ 个.

其次，设树有 k 条边，n 条末端边，则有

$$(k+1-n)\Delta+n\geqslant 2k, \tag{5}$$

得末端边数

$$n\leqslant\left[k+1-\frac{k-1}{\Delta-1}\right], \tag{6}$$

就是说至多有 n 个 $|V_i|=1$ 的元素. 证毕.

三、结　束　语

其他如文献[3]的5.2算法中定义的算子 $D'(R')$，$D''(R'')$ 和引理5.5等利用互补划分图都不难得到直观而简单的证明. 此外，利用互补划分图还便于进一步讨论互补划分的性质.

本文曾得到李永富同志的审阅和指正，在此特致谢意.

参　考　文　献

[1] W. K. Chen, Proc. IEE, **116**(1969), 1639.
[2] W. K. Chen, *IEEE Trans. on CT*, **CT-16**(1969), 518.
[3] W. K. Chen, Applied Graph Theory, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam, 1976.
[4] F. Harary著，李慰萱译，图论，上海科学技术出版社，1980年.

ON THE THEOREMS OF GENERATION OF TREES BY DECOMPOSITION WITHOUT DUPLICATIONS

Lu Shengxun
(*Hangzhou University*)

A complementary partitive graph is a bipartite graph G(V′, V″; E) with disjoint vertex sets V', V'', and an edge set E such that all edges are directed except only one edge, say $j=[x, y]$, is undirected, and the outgoing degrees are $d^+(x)=0$, $d^+(y)=0$ and $d^+(v)=1$ for all $v\neq x, y$. The following assertions can be easily proved: If $G(v', V''$; E) is a complementary partitive graph with undirected edge j, then a pair of complementary partitions $P'(E)$ and $P''(E)$ with respect to j can be constructed by the edges incident with each vertex of V' and each vertex of V''. Conversely, if H_k has a complementary partition with respect to j, then a complementary partitive graph can be constructed.

By using the complementary partitive graph defined above. We can ease the proofs of theorems of complementary partitions established by W. K. Chen (1969, 1976) and give a simple criterion to determine whether or not a complementary partition is essential as follows:

Theorem A complementary partition is essential if and only if the corresponding complementary partitive graph is a connected graph.