

# 数字空间轮廓的小波描述子<sup>1</sup>

曲桂红 张大力 阎平凡

(清华大学自动化系 北京 100084)

**摘要** 为了描述数字空间目标轮廓,便于计算机图形表达,提出一种适于描述序列点轮廓的小波描述子。将数字空间轮廓视为周期序列,并基于离散小波变换给出序列点轮廓小波描述子的具体表达。结合具体医学图像轮廓进行相应的应用研究,并与 Fourier 轮廓描述子进行了对比,研究表明,在具有相同比特率的情况下,序列点轮廓小波描述子具有更好的保形性,同时实现了对轮廓数据的压缩。

**关键词** 小波,描述子, Fourier 轮廓描述子,数据压缩

**中图分类号** TN911.73, O177.6

## 1 引言

目标轮廓的描述由于容易表达目标的形状和对目标的识别,广泛应用于图像分析、模式识别、机器人视觉、多媒体与可视化以及虚拟现实等领域。常用的轮廓描述方法有参数方程、Freeman 链码、样条函数、Fourier 描述子等。小波分析作为调和领域的一个新的发展方向,已成为信号处理与图像分析新的有力手段,并受到日益广泛的重视。有关文献还将小波分析方法用于轮廓描述,进行网络动画传输<sup>[1]</sup>、文字识别<sup>[2]</sup>等方面的研究工作。

由于数字图像及其轮廓的表示都是在数字空间中进行的。对目标轮廓分析不难发现其具有两个重要的特点:(1)由坐标点构成的离散序列;(2)以周长为周期的周期序列。因此,数字空间轮廓的小波表示就归结为离散周期序列的小波分析。需要指出的是,一般地定义在  $L^2(R)$  上的小波是不适于周期函数表达的, Daubchies 曾对  $L^2([0, 1])$  上的周期化小波给予描述<sup>[3]</sup>。针对离散周期序列构成有限维向量空间,文献[4]对离散周期序列的小波分析进行了详细的研究。

本文将离散周期序列的小波分析应用于数字空间的轮廓描述,提出序列点轮廓小波描述子的概念。为了证实这种小波描述子的优越性,本文将其应用于医学 CT 图像轮廓表示,并与 Fourier 描述子表示方法进行对比。

## 2 轮廓的小波描述子

周期信号在信号处理中占有很大的比例,以往对于周期信号的分析中, Fourier 分析是非常重要的手段。近年来的大量研究表明,小波分析已成为在  $L^2(R)$  中信号多分辨率分析 (MultiResolution Analysis, MRA) 的有力工具,但是对于区间分析,由于在越过边界时往往发生跳变,为了获得对这个问题的解决,就需要对区间上的小波进行分析。有关文献采用周期化小波对连续周期信号与序列周期信号进行了研究,并就周期化小波的构造给出了详细的分析。除了对于周期信号进行一般性的理论研究外,周期化小波应用也受到人们的重视。文献[2]将平面轮廓作为连续周期信号,提出了平面轮廓小波描述子的概念。但是,在实际应用中,平面轮廓一般采用离散的坐标对序列表示,因此有必要对数字空间上平面轮廓小波描述子进行研究。为了引出数字空间上平面轮廓小波描述子的概念,下面首先讨论作为连续函数的平面轮廓小波描述子。

<sup>1</sup> 2000-05-10 收到, 2000-09-11 定稿

### 2.1 连续周期信号的多分辨率分析与轮廓描述子

研究  $L^2([0, 1])$  上的连续周期信号的意义在于  $L^2([0, 1])$  是一个 Hilbert 空间, 具有无条件基, 并有许多良好的性质.  $L^2([0, 1])$  上的多分辨率分析是由  $L^2(R)$  空间的多分辨率分析衍生出来的, 对于  $L^2(R)$  空间的多分辨率有双尺度方程:

$$\phi(t) = 2^{1/2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \quad (1)$$

$$\psi(t) = 2^{1/2} \sum_n g_n \psi(2t - n) \quad (2)$$

式中,  $\phi(t)$  为尺度函数,  $\psi(t)$  为小波函数. 设  $\phi(t)$  与  $\psi(t)$  具有足够的衰减性, 则可以根据  $\phi(t)$  与  $\psi(t)$ , 将  $L^2([0, 1])$  空间上的周期尺度函数与周期小波函数定义为

$$\phi_{j,k}^{\text{per}}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi_{j,k}(t + l) \quad (3)$$

$$\psi_{j,k}^{\text{per}}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}(t + l) \quad (4)$$

其中,  $\psi_{j,k}^{\text{per}}$  与  $\phi_{j,k}^{\text{per}}$  是由尺度函数  $\phi(t)$  与小波函数  $\psi(t)$  经过 ‘膨胀’ 与 ‘平移’ 得到的

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

文献 [3] 证明  $\psi_{j,k}^{\text{per}}$  与  $\phi_{j,k}^{\text{per}}$  都是以  $2^{|m|}$  ( $m < 0$ ) 为周期的函数, 即

$$\psi_{j,k}^{\text{per}} = \psi_{j,k-|2^{|m|}l}^{\text{per}}, \quad \phi_{j,k}^{\text{per}} = \phi_{j,k+|2^{|m|}l}^{\text{per}}$$

相应地, 由  $\psi_{j,k}^{\text{per}}$  与  $\phi_{j,k}^{\text{per}}$  张成的子空间为

$$V_j^{\text{per}} = \overline{\text{Span}\{\phi_{j,k}^{\text{per}}; k \in \mathbb{Z}\}}, \quad W_j^{\text{per}} = \overline{\text{Span}\{\psi_{j,k}^{\text{per}}; k \in \mathbb{Z}\}}$$

与在  $L^2(R)$  空间一样, 有  $V_{j-1}^{\text{per}} = V_j^{\text{per}} \oplus W_j^{\text{per}}$ . 文献 [3] 还证明了,  $V_j^{\text{per}}$  与  $W_j^{\text{per}}$  都是有限维空间, 即是由  $2^{|m|}$  ( $m < 0$ ) 个基函数张成的, 于是对于连续周期信号  $x(t) \in L^2([0, 1])$  有

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), \phi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \phi_{j,k}^{\text{per}} + \sum_j \sum_k \langle x(t), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \psi_{j,k}^{\text{per}} \quad (7)$$

式中等式右边第一项表示信号低频部分, 第二项表示信号高频部分, 上式给出了连续周期信号的多分辨率分析.

若将平面轮廓采用参数坐标表示, 即  $\alpha(t) = (x(t) \ y(t))^T$ ,  $t(l) = l/L$ ,  $0 \leq l \leq L$ . 其中  $t(l)$  为经过归一化的弧长,  $l$  为弧长,  $L$  为轮廓周长. 根据上述连续周期信号的多分辨率分析, 有

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a^M(t) \\ y_a^M(t) \end{bmatrix} + \sum_{m=M-m_0}^M \begin{bmatrix} x_d^m(t) \\ y_d^m(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中,

$$x_n^M(t) = \sum_n a_n^M \bar{\phi}_n^M(t), \quad y_n^M(t) = \sum_n c_n^M \bar{\phi}_n^M(t) \quad (9)$$

$$x_d^m(t) = \sum_n r_n^m \bar{\psi}_n^m(t), \quad y_d^m(t) = \sum_n d_n^m \bar{\psi}_n^m(t) \quad (10)$$

文献 [2] 将上式中的小波系数  $\alpha_n^M$ ,  $c_n^M$ ,  $r_n^m$ ,  $d_n^m$  称为平面轮廓的小波描述子。参照上述讨论, 以下将结合文献 [4] 给出的离散周期序列小波分析结果, 给出数字空间上平面轮廓小波描述子定义。

## 2.2 离散周期信号的多分辨率分析与小波描述子

与连续周期信号的情况不同, 离散周期信号的分辨率分析是在由周期为  $N$  的全体信号构成的空间  $X_0$  上进行的。对离散周期信号的多分辨率分析, 就是研究如何构造  $N$  维小波基。若假定  $N$  为 2 的幂次方, 对于离散周期序列则有以下相应的分辨率分析

$$x(n) = \sum_k \langle x(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle \phi_{J,k}^{\text{per}} + \sum_j \sum_k \langle x(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \psi_{j,k}^{\text{per}} \quad (11)$$

式中  $\langle x(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle$  和  $\langle x(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle$  为小波系数。与在  $L^2(R)$  空间上的多分辨率一样, 对离散周期信号空间上的小波分析, 也可放松条件, 构造双正交尺度函数  $\{\phi_{J,k}^{\text{per}}, \phi_{J,k}^{\text{per}}\}$  和小波函数  $\{\psi_{j,k}^{\text{per}}, \psi_{j,k}^{\text{per}}\}$ , 离散情况的双正交小波分析可表示为

$$x(n) = \sum_k \langle x(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle \bar{\phi}_{J,k}^{\text{per}} + \sum_j \sum_k \langle x(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \bar{\psi}_{j,k}^{\text{per}} \quad (12)$$

同样, 将上式中的  $\langle x(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle$  和  $\langle x(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle$  称为小波系数。

根据上述关于离散周期序列的小波分析, 现对数字空间轮廓的小波描述子进行定义。在平面上, 一个封闭的轮廓可以表示为坐标对序列  $Z(n) = \{x(n), y(n) | x(n), y(n) \in N, n = 0, 1, 2, \dots, L-1\}$ , 或写成矢量形式

$$Z(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

如果对轮廓重复跟踪, 即令  $Z(L) = Z(0), Z(L+1) = Z(1), \dots, Z(L+i) = Z(i), \dots$ , 则  $Z(n)$  为离散周期序列。根据 (11) 式, 有

$$x(n) = \sum_k \langle Z(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle \phi_{J,k}^{\text{per}} + \sum_j \sum_k \langle Z(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \psi_{j,k}^{\text{per}} \quad (14)$$

于是将上式中的系数  $\langle Z(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle$  和  $\langle Z(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle$  定义为轮廓的小波描述子。

同 (12) 式, 也可给出双正交小波分析

$$Z(n) = \sum_k \langle Z(n), \phi_{J,k}^{\text{per}} \rangle \bar{\phi}_{J,k}^{\text{per}} + \sum_j \sum_k \langle z(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle \bar{\psi}_{j,k}^{\text{per}} \quad (15)$$

亦可将上式中的系数  $\langle Z(n), \psi_{j,k}^{\text{per}} \rangle$  和  $\langle Z(n), \phi_{j,k}^{\text{per}} \rangle$  定义为轮廓的小波描述子。

### 3 点序列轮廓小波描述子应用研究

以上对序列点轮廓的小波描述子进行了分析, 现在利用结果结合临床实际, 进行具体的应用研究。这里给出的是一个关于放射治疗计划系统开发应用的例子, 放射治疗计划系统 (Radiotherapy Treatment Planning System, RTPS), 是制定放射治疗计划的重要工具, 是放射治疗质量控制与保证不可缺少的手段。临床上, 在对患者进行放射治疗之前需要进行详细、周密的治疗计划设计, 制定治疗方案。其中包括对病灶、治疗靶区、周围危及器官位置与形态的确定, 治疗参数设定与优化等, 医生可以借助治疗计划系统完成计划设计并获得治疗的仿真结果。这个过程的一个主要工作环节是, 输入患者的序列 CT/MRI 断层图像, 并利用治疗计划系统软件对外轮廓以及组织器官轮廓进行提取、跟踪。获得这些轮廓的目的是为了进行三维表面重建、剂量分布计算。

一般情况下, 这些轮廓是由大量的坐标点序列组成, 每一个坐标点对  $\{x(i), y(i)\}$  表示一个像素的位置。在对患者做计划时, 需要 10~50 层的 CT 或 MRI 断层图像, 每一层有若干个轮廓, 通常一个外轮廓需要 1000 个左右的像素组成, 大量的数据需要传输与储存, 因此有必要进行数据的压缩, 同时要求有较好的保形性。文献 [5,6] 采用 Fourier 描述子表示方法, 对此进行了研究。

图 1 是对患者头部 CT 断层成像后, 经过轮廓提取与跟踪得到的轮廓, CT 图像采用  $320 \times 320$  分辨率, 得到的轮廓共 625 个像素点, 如果将  $x$ ,  $y$  坐标分开描述, 则可得到如图 2 所示的曲线。

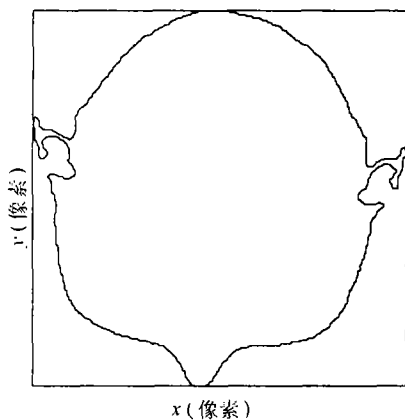


图 1 原轮廓

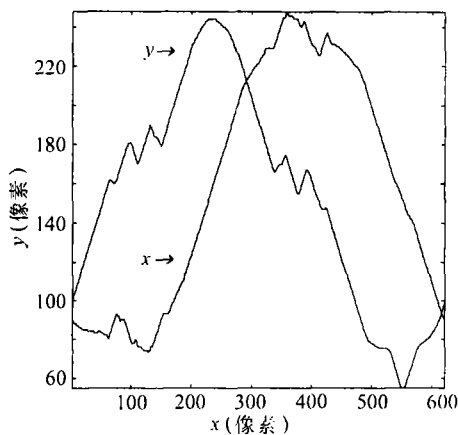


图 2 原轮廓坐标分解

采用周期小波描述子, 对图 2 的  $x$ ,  $y$  坐标序列进行小波分解重建, 经过 3 级分解重建后得到相应的小波低频系数序列 CAX3 和 CAY3 (见图 3)。重新将  $x$ ,  $y$  坐标序列合成, 就得到如图 4 所示的重建轮廓。

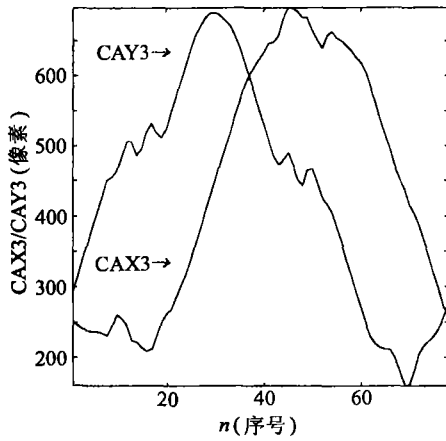


图 3 三次分解后近似部分重建 (坐标分解)

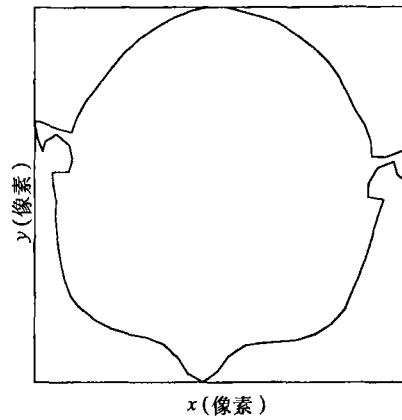


图 4 三次分解重建轮廓 (79 点)

为了将周期化小波描述子与 Fourier 描述子进行对比, 这里按文献 [6] 的方法, 给出 Fourier 描述子分析, 对于周期序列  $x(n)$ , 可以表示为

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(i2\pi nk/N) \tag{16}$$

其中  $X(k)$  为 Fourier 描述子,

$$X(k) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-i2\pi nk/N) \tag{17}$$

图 5 和图 6 分别是对图 1 所示的原轮廓用 Fourier 描述子进行坐标分解的曲线和重建轮廓。

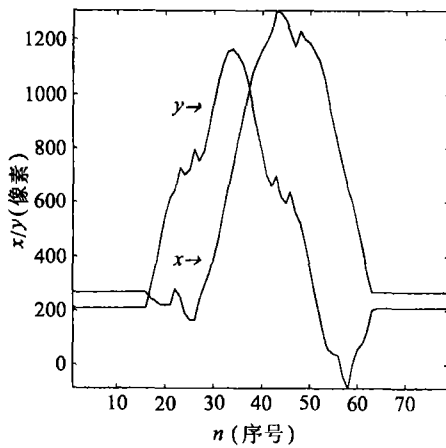


图 5 Fourier 描述子 (坐标分解)

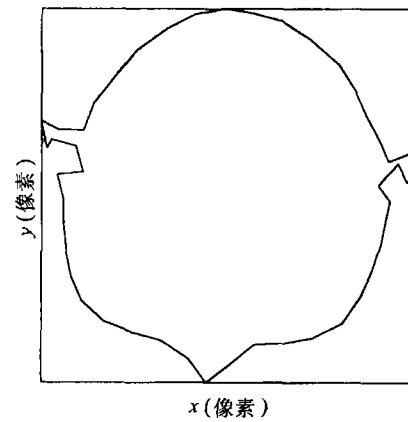


图 6 Fourier 描述子重建 (79 点)

## 4 结 束 语

本文将离散周期序列的周期化小波分析应用于数字空间的轮廓描述, 为了证实周期化小波描述子的优越性, 本文将其应用于医学 CT 图像轮廓表示, 并与 Fourier 描述子表示方法进行对比。结果表明在具有相同比特率的情况下, 序列点轮廓小波描述子具有更好的保形性, 同时实现了对轮廓数据的压缩。

## 参 考 文 献

- [1] G. Muller, C. Kloditz, J. Bones, R. Prasad, Progressive transmission of line drawings using the wavelet transform, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5 (4), 666-672.
- [2] G. C. H. Chuang, C. C. J. Kuo, Wavelet descriptor of planner curves: Theory and applications, *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5(1), 56-70.
- [3] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, PA. 1992, 333.
- [4] J. A. Gubner, Wei-Bin Chang, Wavelet transforms for discrete-time periodic signals, *Signal Processing*, 1995, 42, 167-180.
- [5] G. Starkchall, Analytic evaluation of dose calculation points for external beam radiation therapy treatment planning, *Medical Physics*, 1985, 12(4), 477-479.
- [6] E. C. Mok, A. L. Boyer, Encoding patient contours using Fourier descriptors for computer treatment planning, *Medical Physics*, 1986, 13(1), 413-415.

## WAVELET DESCRIPTOR OF CONTOURS IN DIGITAL SPACE

Qu Guihong    Zhang Dali    Yan Pingfan

*(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)*

**Abstract** To describe contours in digital space and simplify the presentation of computer graphics, a wavelet descriptor is presented, which is suitable for contours constructed with a set of points. According to the fact that contours in digital space is periodical, wavelet descriptor is defined based on wavelet analysis of discrete periodic signal. Application of the wavelet descriptor for medical image contour description is achieved. Comparing with Fourier descriptor, this work shows that the contours expressed by wavelet descriptor can make a good shape preserving, and the data for constructing the contours is compressed.

**Key words** Wavelet descriptor, Fourier descriptor, Data compression

曲桂红: 男, 1963 年生, 博士生, 研究方向为医学图像融合、图像处理、模式识别、智能系统、网络信息系统。  
张大力: 男, 1946 年生, 副教授, 研究方向为图像处理、模式识别、智能控制、网络信息系统。  
阎平凡: 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为模式识别、智能系统、网络信息系统。