

无平方根定标 Givens 旋转算法脉动阵实现的有限字长分析¹

熊 军 廖桂生 吴顺君

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 最小二乘 (LS) 是许多实时自适应信号处理问题的核心。本文针对无平方根的定标 Givens 旋转方法, 分析了用脉动 (Systolic) 阵实现时各处理单元和内部传递参数的动态范围, 并确定了保证算法正确实现所需的字长下界。计算机仿真结果表明, 这样选取字长是合适的, 所得的算法也是稳定的。

关键词 线性最小二乘问题, 自适应信号处理, 脉动阵

中图分类号 TN911.7

1 引 言

最小二乘 (LS) 是许多实时自适应信号处理问题的核心。这些问题包括: 自适应滤波、系统辨识、自适应波束形成等等。为达到高吞吐量和速度以满足实时信号处理的要求, 就必须对递归 LS(RLS) 以及约束递归 LS(CRLS) 算法进行有效实现。在实现 RLS 算法的各种技术中, 基于系数矩阵 QR 分解 (Quadrature-Triangular Decomposition, QRD) 的方法不仅因为其数值稳定性好, 更重要的是适合于用脉动阵实现并行处理而引人关注。

利用脉动阵实现 QRD-RLS 算法最早由 McWhirter^[1] 提出。之后, 人们又陆续提出了不少的算法和结构。就目前的技术而言, 算法中包含的一些复杂运算会使得上述实现变得十分困难。比方说平方根运算, 它要在 VLSI 芯片上占据较大的面积或用较多的时钟周期才能完成。因此, 尽可能地减少甚至完全消除这类复杂运算是人们希望达到的目标。文献 [2] 给出了一类无平方根的 QRD-RLS 算法。所有已知的无平方根旋转算法可归入这一类, 称之为“ μv ”类算法。根据 μ 和 v 参数选择的不同, 算法具有不同的形式。本文的无平方根定标 Givens 旋转算法是其中的一个特例^[3]。之所以讨论这种算法是由于定标系数的引入而使得其脉动阵实现是稳定的。

在 QRD-RLS 算法中, 动态范围是需要考虑的一个很重要的问题。知道了动态范围, 我们才能确定保证算法正确实现所需的字长 (每个字的位数)。字长对于硬件实现的复杂性和速度有很大的影响。从硬件实现的角度来看, 字长越短, 复杂性越低; 另一方面, 字长越长, 算法中的各个量越不容易溢出。应在保证算法正确实现的前提下选择尽可能短的字长。文献 [4] 利用有限字长对脉动阵和格型结构的 QRD-RLS 算法进行了计算机仿真。文献 [5] 首次提出准稳态模型, 并利用它对算法的动态范围进行了理论分析。

本文针对无平方根定标 Givens 旋转算法, 给出了其脉动阵实现结构, 并基于准稳态模型分析了脉动阵中各处理单元和内部传递参数的动态范围, 由此建立了保证算法正确实现所需的字长下界。计算机仿真验证了理论分析结果。

¹ 1995-06-14 收到, 1995-12-17 定稿
国防军事电子预研基金资助课题

2 无平方根定标 Givens 旋转算法及其脉动阵结构

2.1 算法描述

为便于分析有限字长效应, 本节先介绍无平方根定标 Givens 旋转算法及其脉动阵实现结构。我们来考虑无平方根 μv 类算法最佳残余计算的脉动阵实现。应该指出, 所谓最佳残余可用数学式说明如下: 对于超定线性方程组 $AW = b$, 因方程无解退而求其最小二乘解 W , 则残余 (e) 等于 $\|AW - b\|^2$ 。在实际信号处理中, 残余有实际物理意义, 如自适应波束形成, 残余实际上是波束形成器的输出功率。最佳残余计算的脉动阵实现通常分成两类, 一类是显式计算权系数 W (即线性方程组的最小二乘解), 然后计算残余量; 另一类是无需显式计算权系数, 直接给出残余量。本文主要针对后者分析脉动阵实际实现中有限字长问题。将不难看出, 所得结论也适合于前者。时刻 n 数据矩阵 $X(n)$ 的 QR 分解的递归形式表示如下:

$$\begin{bmatrix} K(n-1)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0^T & K_q(n)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \bar{R}(n-1) & \beta \bar{u}(n-1) \\ \bar{X}(t_n) & \bar{y}(t_n) \end{bmatrix} \xrightarrow{T(n)} \begin{bmatrix} K(n)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0^T & K_q(n+1)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}(n) & \bar{u}(n) \\ 0^T & b_{p+1}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $T(n)$ 是 $(p+1) \times (p+1)$ 的正交矩阵, 它完成 p 次 Givens 旋转。在经过第 i 次旋转 ($1 < i \leq p$) 之后, 可以得到

$$K'_i = [K_i \beta^2 a_{ii}^2 + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)^2}] / \mu_i^2, \quad (2)$$

$$K_q^{(i)} = \frac{K_i K_q^{(i-1)}}{v_i^2 (K_i \beta^2 a_{ii}^2 + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)^2})} = \frac{K_i K_q^{(i-1)}}{\mu_i^2 v_i^2 K'_i}, \quad (3)$$

$$a'_{ii} = \mu_i, \quad (4)$$

$$a'_{ij} = (1/\mu_i K'_i) [K_i \beta^2 a_{ii} a_{ij} + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)} b_j^{(i-1)}], \quad (5)$$

$$b_j^{(i)} = v_i \beta [-b_i^{(i-1)} a_{ij} + a_{ii} b_j^{(i-1)}], \quad (6)$$

$$C_i = (\beta a_{ii} / \mu_i) \sqrt{K_i / K'_i}. \quad (7)$$

由此可得 QRD-RLS 算法的最佳残余为

$$e_{\text{RLS}}(t_n) = - \left(\prod_{i=1}^p \frac{\beta a_{ii} K_i}{\mu_i^2 v_i K'_i} \right) \sqrt{K_q} b_{p+1}^{(p)}, \quad (8)$$

其中 K_q 是可自由选取的初始值, 当它取为 1 时, 则在 (8) 式中可完全避免平方根运算。

对于上述无平方根 μv 类算法, μ 和 v 参数的不同选择对应不同的算法形式, 取

$$\mu_i = 2^{\rho_i} (K_i \beta^2 a_{ii}^2 + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)^2}), \quad v_i = 2^{\tau_i}. \quad (9)$$

此时, 该算法称为无平方根定标 Givens 旋转算法^[3]。这一算法由于定标系数的引入而使得其脉动阵实现具有稳定性的特点。

2.2 算法的脉动阵结构

图 1 是基于定标无平方根 Givens 旋转计算最佳残余的脉动阵。在此脉动阵中, 边界单元 (1 号单元) 用以计算 (2)-(4) 式, 各内部传递参数 $\bar{c}_i, \bar{s}_i, \hat{c}_i, \hat{s}_i, \rho_i, \tau_i$ 以及部分积 $e_i =$

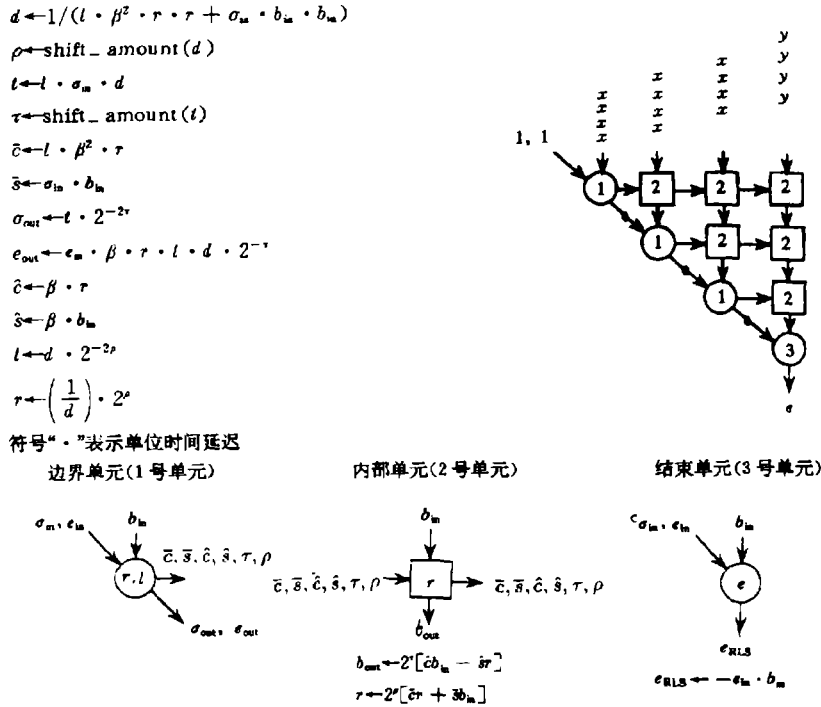


图 1 基于定标无平方根 Givens 旋转计算最佳残余的脉动阵

$\prod_{j=1}^i (\beta a_{jj} \frac{K_j \cdot d_j}{v_j})$; 内部单元(2号单元)用以计算(5)–(6)式; 结束单元(3号单元)用以计算(8)式。

上面给出了实现无平方根定标 Givens 旋转算法的三角脉动阵结构, 它不同于文献 [3] 中给出的线性脉动结构。与文献 [6] 中的无平方根无除法定标的 $K\lambda$ 算法比较, 它省略了 $g_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$ 的计算, 而将 g_i 与 e_i 进行合并计算, 保证了 e_i 的有界性 (后面可证明: $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_i| < \sqrt{2}$), 而文献 [6] 中的 e_i, g_i 在阵的阶数 p 较大时, 会使得算法的动态范围较大, 从而增加所需的字长, 不利于 VLSI 实现。因此, 在进行了本文中的上述改进后, 不仅有利于后面所进行的算法稳定性分析, 而且可减少一个内部传递参数 g_i , 降低了硬件复杂程度。

3 算法的动态范围、字长下界以及稳定性分析

3.1 准稳态模型

文献 [5] 中研究了基于标准 Givens 旋转的 QRD-RLS 算法的动态范围。并首次提出了准稳态模型: 当遗忘因子 β 趋近于 1 时, 各边界单元的正弦、余弦参数相等, 且与该单元所处位置以及输入数据的统计量无关。此时有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) \approx \lim_{k \rightarrow \infty} E(c(k)) \approx \beta, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s(k) \approx \lim_{k \rightarrow \infty} E(s(k)) \approx \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (10)$$

上述结果为后面进一步研究 QRD-RLS 脉动算法的其它特性提供了有力的工具。

3.2 算法的动态范围、字长下界以及稳定性分析

假定输入到脉动阵各列的信号样本间彼此不相关 (对于许多信号处理情况, 这一假设通常是合理的), 且均值为 0, 方差为 σ_x^2 。

设 PE_{ij} 为脉动阵的第 (i, j) 个单元, 边界单元 PE_{11} 的方差为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{r_{11}^2(k+1)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \beta^{2i} E\{x^2(k-i)\} = \sigma_x^2 / (1 - \beta^2). \quad (11)$$

对第一行的内部单元 PE_{1j} 有

$$r_{1j}(k+1) = s(k) \cdot x_{1j}(k) + c(k)\beta r_{1j}(k).$$

又输入到脉动阵各列的信号样本间彼此不相关, 所以有

$$E[s(k)x_{1j}(k)] = 0 \quad E[c(k)x_{1j}(k)] = 0. \quad (12)$$

可推得 $r_{1j}(k+1)$ 的方差为

$$E\{r_{1j}^2(k+1)\} = \sigma_x^2 / (1 + \beta^2). \quad (13)$$

同样, 第 $(1, j)$ 个处理单元的输出 $x_{\text{out}}(k+1) = c(k)x_{1j}(k) - s(k)\beta \cdot r_{1j}(k)$ 的方差为

$$E\{x_{\text{out}}^2(k+1)\} = [2\beta^2 / (1 + \beta^2)] \sigma_x^2. \quad (14)$$

而第 i 行的输入依赖于第 $i-1$ 行的输出 ($i = 2, \dots, p$)。同样可以推得

$$E\{r_{ii}^2(k)\} = [\sigma_x^2 / (1 - \beta^2)] [2\beta^2 / (1 + \beta^2)]^{i-1}, \quad i = 1, \dots, p; \quad (15)$$

$$E\{r_{ij}^2(k)\} = [\sigma_x^2 / (1 + \beta^2)] [2\beta^2 / (1 + \beta^2)]^{i-1}, \quad j = i + 1, \dots, p. \quad (16)$$

最佳残余 $e_{\text{RLS}}(n)$ 的上界为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{e_{\text{RLS}}^2(n)\} \leq [\sigma_x^2 / (1 + \beta^2)] [2\beta^2 / (1 + \beta)]^{p-1} \triangleq R_i^{\text{err}}. \quad (17)$$

此式表明该脉动阵为有界输入-有界输出 (BIBO) 的稳定系统, 这一结果也完全适用于 $\mu\nu$ 类 QRD-RLS 算法。(17) 式是无限精度的结果, 考虑到实际实现有限字长时, 应分析其内部各参量的稳定性。

由前面已知:

$$r'_{ij} = \sqrt{K'_i} a'_{ij}, \quad x_j^{(i)} = \sqrt{K_q^{(i)}} b_j^{(i)}, \quad (18)$$

其中 $K'_i, K_q^{(i)}$ 分别由 (2)、(3) 式给出。在定标的 Givens 旋转算法中, 取 μ_i, v_i 如 (9) 式所示。其中的 ρ_i, τ_i 取整数值, 通过适当选择, 可使移位后二进制表示的最高位位于 2^0 或 2^{-1} 上, 即可使

$$0.5 \leq K'_i < 2, \quad \text{且 } 0.5 \leq K_q^{(i)} < 2. \quad (19)$$

引入以下记号: $\text{shift-amount}(\text{非规一化值}) = \lfloor \{\log_2(\text{非规一化值}) + 1\} / 2 \rfloor$. 选择 ρ_i, τ_i 参数如下:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \text{shift-amount}[1 / (K_i \beta^2 a_{ii}^2 + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)2})], \\ \tau_i &= \text{shift-amount}[K_i k_q^{(i-1)} / (K_i \beta^2 a_{ii}^2 + K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)2})]. \end{aligned} \quad (20)$$

边界单元除计算 ρ, τ 之外, 还需计算 e_{RLS} 中用到的量 $\prod_{i=1}^p [\beta a_{ii} K_i / (\mu_i^2 v_i K_i')]$, 部分积 e_i 可写为 $e_i = \prod_{j=1}^i [\beta a_{jj} K_j / (\mu_j^2 v_j K_j')] = \prod_{j=1}^i (\beta a_{jj} K_j d_j / v_j)$, $i = 1, 2, \dots, p$, 其中 $d_j = 1 / (K_j \beta^2 a_{jj}^2 + K_q^{(j-1)} b_j^{(j-1)2})$ 为中间变量。

定理 1 第 i 行各处理单元的稳态动态范围为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{ij}(n)| \leq R_i^a \triangleq \sqrt{2} R_i^r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_j^{(i)}(n)| \leq R_i^b \triangleq \sqrt{2} R_i^x, \quad (21)$$

其中 R_i^r, R_i^x 分别为 $|r_{ij}(n)|$ 与 $|x_j^{(i)}(n)|$ 的稳态动态范围。利用 (18) 式容易证明该定理。

定理 2 第 i 行 ρ_i, τ_i 的稳态动态范围 R_i^ρ, R_i^τ 如下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\rho_i| \leq R_i^\rho \triangleq \beta_i^a + 1.5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_i| \leq R_i^\tau \triangleq \beta_i^a + 2.5, \quad (22)$$

其中 ρ_i, τ_i 可取正值或负值。

定理 3 第 i 行 e_i 的稳态动态范围 R_i^e 如下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |e_i| \leq R_i^e \triangleq \sqrt{2}. \quad (23)$$

最后, 考虑所定义的各传递参数

$$\bar{c}_i = K_i \beta^2 a_{ii}, \quad \bar{s}_i = K_q^{(i-1)} b_i^{(i-1)}, \quad \hat{c}_i = \beta a_{ii}, \quad \hat{s}_i = \beta b_i^{(i-1)}. \quad (24)$$

这些系数的稳态动态范围分别记为 $R_i^{\bar{c}}, R_i^{\bar{s}}, R_i^{\hat{c}}, R_i^{\hat{s}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{c}_i| &\leq R_i^{\bar{c}} \triangleq 2R_i^a, & \lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{s}_i| &\leq R_i^{\bar{s}} \triangleq 2R_i^b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{c}_i| &\leq R_i^{\hat{c}} \triangleq 2R_i^a, & \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{s}_i| &\leq R_i^{\hat{s}} \triangleq R_i^b. \end{aligned} \quad (25)$$

由上面各式可以看出, 所有的内部参数也是有界的, 所以该算法是稳定的。

通过比较可以看出, 在以上所讨论的各个量中, \bar{c}_1 具有最大动态范围。也就是说, 我们可确定算法的动态范围上界为

$$R_{\text{max}} = 2|x_{\text{max}}| / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (26)$$

相应的字长下界为

$$B_m \geq \lceil \log_2 R_{\text{max}} \rceil. \quad (27)$$

4 计算机仿真

在计算机仿真时, 采用 $[-1, 1]$ 之间分布的归一化随机数作为输入序列, 分别对用脉动阵实现的标准 QRD-RLS 算法和无平方根定标的 Givens 旋转算法进行仿真。取脉动阵的阶数 $p = 4$, 遗忘因子 $\beta = 0.998$ 。在程序中考虑了不同字长的影响, 所有各量均为定点数。为简化问题的分析, 将其小数部分固定, 只考虑整数部分字长的变化。

定义 e' 为双精度运算和整数部分字长为 i 时的最佳残余的差值

$$e' = 10 \log_{10} [|e_{\text{RLS}} - e_i| + 1E - 9], \quad (28)$$

其中 e_{RLS} 为双精度运算时的最佳残余， e_i 为字长为 i 时的最佳残余。 e' 的大小反映了不同字长对于算法影响程度的大小。

图 2 中 $err1, err2, err3$ 分别为字长取 1, 2, 3 时的误差差值。可见字长越短，该差值越大。此时输出的最佳残余更加偏离理想值。字长为 3 时， $err3$ 为 $-90dB$ 。此时不发生溢出，取 3 位字长与双精度运算时的输出最佳残余完全相同。也就是此时的字长下界可保证算法的正确操作。

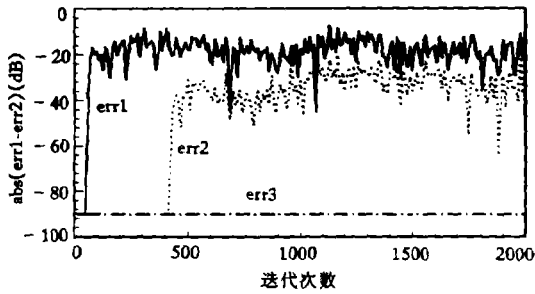


图 2 标准 Givens 旋转不同字长与理想情况下最佳残余的差值比较

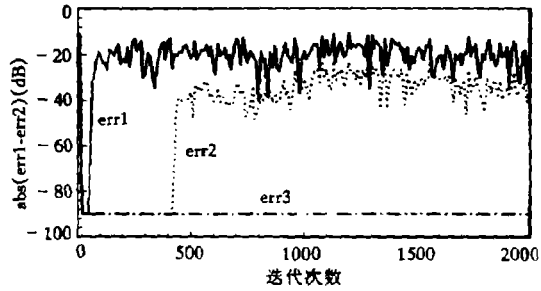


图 3 无平方根定标 Givens 旋转不同字长与理想情况下最佳残余的差值

图 3 为无平方根定标 Givens 旋转算法取字长为 1, 2, 3 时，最佳残余与双精度运算时的最佳残余之差，各式的说明和结论同上。

图 4 为脉动阵中不同行的内部及边界单元的动态范围。可见，每一行的边界单元在同一行中均具有最大的动态范围。另外， R_{max} 作为算法动态范围的上界也是合适的，按照它确定的字长下界将保证算法工作的可靠性。这与理论分析结果是一致的。

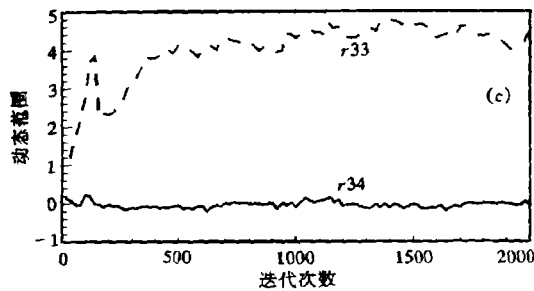
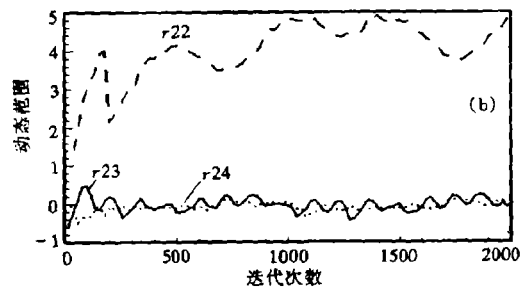
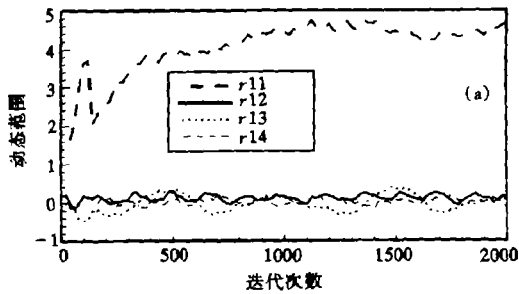


图 4 脉动阵中各处理单元的动态范围 (a) 第一行 (b) 第二行 (c) 第三行

5 结 论

本文给出了无平方根定标 Givens 旋转算法的脉动阵实现结构, 并分析了各处理单元和内部传递参数的动态范围。通过比较, 给出了保证算法正确实现所需的字长下界, 计算机仿真研究验证了这一结论。并且说明该算法是稳定的。

参 考 文 献

- [1] McWhirter J G. Recursive least-squares minimization using a systolic array, Proc. of SPIE, Vol.431, Real Time Signal Processing VI, 1983, 105-112.
- [2] Heish S F, Liu K J R, Yao K. A unified square-root-free approach for QRD-based recursive least squares estimation. IEEE Trans. on SP., 1993, SP-41(3): 1405-1409.
- [3] Barlow J L, Ipsen I C F. Scaled Givens rotations for the solution of linear least squares problems on systolic arrays. SIAM J. Sci Stat. Comput., 1987, 8(5): 716-733.
- [4] Proudler I K, McWhirter J G, Shepherd T J. The QRD-based least squares lattice algorithm: Some computer simulations using finite wordlength, Proc. IEEE ISCAS, New Orleans: May 1990, 258-261.
- [5] Liu K J R, Heish S F, Yao K, *et al.* Dynamic range, stability and fault-tolerant capability of finite-precision RLS Systolic array based on Givens rotations. IEEE Trans. on Cir. Sys., 1991, CAS-38(6): 625-636.
- [6] Frantzeskakis E N, Liu K J R. A class of square root and division free algorithms and architectures for QRD-based adaptive signal processing. IEEE Trans. on SP., 1994, SP-42(9): 2455-2469.

FINITE WORDLENGTH ANALYSIS FOR RLS SYSTOLIC ALGORITHM BASED ON THE SQUARE ROOT FREE SCALED GIVENS ROTATIONS

Xiong Jun Liao Guisheng Wu Shunjun

(Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract The least squares(LS) minimization problem constitutes the core of many real-time signal processing problems. A square root free scaled Givens rotations algorithm and its systolic architecture for the optimal RLS residual evaluation are presented in this paper. Upper bounds of the dynamic range of processing cells and the internal parameters are analyzed. Thus the wordlength can be obtained to prevent overflow and to ensure correct operations. Simulation results confirm the theoretical conclusions and the stability of the algorithm.

Key words Linear least squares minimization problem, Adaptive signal processing, Systolic array

熊 军: 男, 1968 年生, 讲师, 硕士, 从事阵列信号自适应处理和快速算法的研究.

廖桂生: 男, 1963 年生, 副教授, 从事信号和信息处理及其应用的研究.

吴顺君: 男, 1942 年生, 教授, 从事雷达系统和信号与信息处理的研究.