第11卷 第1期
1989 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 11, No. 1
Jan., 1989

位相屏模型中菲涅耳近似的讨论*

逯 贵 祯
(北京广播学院广播研究所,北京)

摘要 本文讨论了位相屏模型中的菲涅耳近似。在 $k \gg \kappa$ 的条件下，严格地推导了相关函数的结果。并且得到了 Rino 结果成立的近似条件。这个条件是 $|\nabla R_{\Delta N_e}|/R_{\Delta N_e} \ll 1$。

关键词 电离层散射;幂次方位相屏模型,随机媒质

1. 引言

随着卫星通讯的发展，电波通过电离层传播的问题越来越引起重视. 电磁波通过电离层传播时,由于电离层中的电子密度起伏,引起接收点处的电波产生闪烁现象. 研究闪烁现象一方面可以提高通讯质量,一方面又可以了解电离层的结构. 在早期的研究中,通常将电离层中电子密度的起伏用高斯谱描述. 采用高斯谱在理论上比较方便，但经常与实际情况不符. 为此,引入了更加符合实际的幂谱. Rino 等人利用幂谱的位相屏模型讨论了电波通过电离层的实验结果. 在位相屏模型中,电离层使得电波的相位发生变化,而根据电波通过电离层后的相位变化公式，可以得到谱密度函数的表达式. 利用谱密度函数的表达式可求得相关函数以及闪烁指数. 这些公式可以用来计算电离层的结构和解释实验结果. 在 Rino 的理论表达式中，用到了菲涅耳近似等. 本文对其中的一些近似进行了讨论,得出了理论适用的条件,并对 Rino 结果中的推导做了一些纠正.

2. 公式推导

在研究随机性问题中,经常要利用各阶统计特征,而二阶矩则是一个非常重要的统计特征量. 对电离层中电子密度起伏的二阶矩许多人进行了研究. Rino 等人利用位相屏模型也讨论了电波通过电离层后的二阶统计矩. 如果用 $\delta u_1(\boldsymbol{r})$ 表示电子密度起伏引起的扰动波场,二阶矩 $R_{\delta u_1} = \langle \delta u_1(\boldsymbol{\rho}, z)\delta u_1^*(\boldsymbol{\rho}^*, z')\rangle$. 那么,可以推导出:

$$R_{\delta u_1}(\Delta\boldsymbol{\rho}, z, \Delta z) = r_e^2\lambda^2\cos^2\theta_s\Delta L\int_{-\Delta L}^{\Delta L}\left(1-\frac{|\eta|}{\Delta L}\right)d\eta.$$

$$\iint_{\boldsymbol{\kappa}}\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa},\eta)\exp\{-i[\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}+G(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)(\eta-\Delta z)]\}/$$

$$[g(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)]^2\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2} \tag{1}$$

在上式中，z 表示传播方向的坐标，$\boldsymbol{\rho}$ 表示垂直于 z 方向的坐标向量，λ 是波长 ΔL 表示电离层的厚度，$\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}, \eta)$ 是电子密度起伏的二维谱密度.

上式是一个严格的结果. 为了在实际上应用，Rino 等人对 $G(\boldsymbol{\kappa})$ 和 $g(\boldsymbol{\kappa})$ 的形式

* 1987 年 8 月 15 日收到，1988 年 3 月 5 日修改定稿.

作了菲涅耳近似。在此，我们先给出 $g(\boldsymbol{\kappa})$ 和 $G(\boldsymbol{\kappa})$ 的表示式。

$$g(\boldsymbol{\kappa}) = \left(1 - \frac{\kappa^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

$$G(\boldsymbol{\kappa}) = k\cos\theta - kg(\boldsymbol{\kappa}) \tag{3}$$

式中，κ 是二维傅里叶变换的波数，$k = 2Z/\lambda$。

Rino 对 $G(\boldsymbol{\kappa})$ 和 $g(\boldsymbol{\kappa})$ 做了菲涅耳近似。在 $k \gg \kappa$ 的条件下，可以得到：

$$G(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T) \approx \tan\theta\boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{a}_T + \{\kappa^2 + \tan\theta(\boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{a}_T)^2\}/2k\cos\theta \tag{4}$$

$$g(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T) \approx \cos\theta \tag{5}$$

式中 $\hat{a}_T$ 是与 z 垂直的平面上的单位向量；$\boldsymbol{k}_T$ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 在此平面上的投影分量；θ 是入射角。(4)式和(5)式代入(1)式

$$R_{\delta u_1}(\Delta\boldsymbol{\rho}, z, \Delta z) = r_e^2\lambda^2\cos^2\theta_s\Delta L\sec^2\theta\int_{-\Delta L}^{\Delta L}\left(1 - \frac{|\eta|}{\Delta L}\right)d\eta\cdot$$
$$\iint_{\kappa}\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}, \eta)\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\Delta\boldsymbol{\rho} + \tan\theta(\eta - \Delta z)\hat{a}_T\}\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2} \tag{6}$$

Rino 的推导到这一步的近似还是正确的。但是，在往后的推导中，Rino 利用了下列公式：

$$\iint_{\kappa}\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}\cdot\eta)\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot(\Delta\boldsymbol{\rho} + \tan\theta(\eta - \Delta z)\hat{a}_T\}\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2}$$
$$= R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho} + \tan\theta(\eta - \Delta z)\hat{a}_T, \eta) \tag{7}$$

在(7)式中，对 $\boldsymbol{\kappa}$ 的积分是整个 $\boldsymbol{\kappa}$ 空间，因而 Rino 忽略了菲涅耳近似中 $k \gg \kappa$ 的条件，所以，他的推导应是不成立的。以下，我们推导在 $k \gg \kappa$ 条件下的公式。

回到(1)式，我们有：

$$R_{\delta u_1}(\Delta\boldsymbol{\rho}, z, \Delta z) = r_e^2\lambda^2\cos^2\theta_s\Delta L\int_{-\Delta L}^{\Delta L}\left(1 - \frac{|\eta|}{\Delta L}\right)\iint_{\kappa}\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}, \eta)\cdot$$
$$\exp\{-i[\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho} + G(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T)(\eta - \Delta z)]\}/$$
$$[g(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T)]^2\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2}d\eta$$
$$= r_e^2\lambda^2\cos^2\theta_s\Delta L\int_{-\Delta L}^{\Delta L}\left(1 - \frac{|\eta|}{\Delta L}\right)I(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta)d\eta \tag{8}$$

在上式中，

$$I(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \iint_{\kappa}\phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}, \eta)\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho} + G(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T)(\eta - \Delta z)\}/$$
$$[g(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T)]^2\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2} \tag{9}$$

如果我们令：

$$f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \iint_{\kappa}\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}\exp\{-iG(\boldsymbol{k}_T + \boldsymbol{\kappa})(\eta - \Delta z)\}/$$
$$[g(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T)]^2\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2} \tag{10}$$

则有：

$$I(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \iint_{\kappa} \phi_{\Delta N_e}(\boldsymbol{\kappa}, \eta)\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}\exp\{-iG(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)(\eta-\Delta z)\}/$$

$$[g(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)]^2 \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2}$$

$$= \iint_{\Delta\rho'} R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \eta) f(\Delta\boldsymbol{\rho}' - \Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) d\Delta\boldsymbol{\rho}'$$

$$= R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) * f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) \quad (11)$$

(11)式的卷积是对 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 积分的.

下面给出 $f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta)$ 的表达式. 将(4)式,(5)式代入(10)式:

$$f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = k^2\exp\{-ik\cos\theta(\eta-\Delta z)\}$$

$$\cdot \iint_{\kappa} \exp\{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}\exp\{i[k^2-(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)^2]^{\frac{1}{2}}(\eta-\Delta z\}/$$

$$[k^2-(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T)^2] \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{(2Z)^2}$$

$$= k^2\exp\{-ik\cos\theta(\eta-\Delta z) + i\boldsymbol{k}_T\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}$$

$$\cdot \iint_{\kappa'} \exp\{-i\boldsymbol{\kappa}'\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}\exp\{i(k^2-\kappa'^2)^{\frac{1}{2}}(\eta-\Delta z)\}/(k^2-\kappa'^2) \frac{d\boldsymbol{\kappa}'}{(2Z)^2} \quad (12)$$

在上式中,我们做了变换:

$$\boldsymbol{\kappa}' = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{k}_T \quad (12)$$

在 $k \gg \kappa$ 的条件下,取:

$$G(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T) \approx \boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{a}_T\tan\theta$$

$$g(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{k}_T) \approx \cos\theta$$

所以,

$$f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \frac{1}{\cos^2\theta}\iint_{\kappa'} \exp\{-i\boldsymbol{\kappa}'\cdot\Delta\boldsymbol{\rho}\}\exp\{-i\boldsymbol{\kappa}'\cdot\hat{a}_T\tan\theta(\eta-\Delta z)\} \frac{d\boldsymbol{\kappa}'}{(2Z)^2} \quad (14)$$

由于 κ 很小,因而(14)式的积分应从 0 到 κ, 即:

$$f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\sin(\kappa_x\Delta\rho_{sx})}{\pi\Delta\rho_{sx}}\cdot\frac{\sin(\kappa_y\Delta\rho_{sy})}{\pi\Delta\rho_{sy}} \quad (15)$$

$$\Delta\boldsymbol{\rho}_s = \Delta\boldsymbol{\rho} + \hat{a}_T\tan\theta(\eta-\Delta z)$$

由此可见,只有在 $k\to\infty$, $\kappa_x, \kappa_y\to\infty$, $k\gg\kappa$ 的条件下,

$$f(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, \eta) = \frac{1}{\cos^2\theta}\delta(\Delta\boldsymbol{\rho} + \hat{a}_T\tan\theta(\eta-\Delta z)) \quad (16)$$

把(16)式代入(11)式就得到 Rino 的结果. 但是,在一般情况下,非涅耳近似不允许 κ_x, $\kappa_y\to\infty$. 所以在 $k\gg\kappa$ 的条件下,结果应是(15)式,从而

$$I(\Delta\boldsymbol{\rho}', \Delta z, \eta) = \iint_{\Delta\rho'} R_{W_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \Delta z, \eta) f(\Delta\boldsymbol{\rho}' - \Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta) d\Delta\boldsymbol{\rho}'$$

$$= R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s)\Delta z, \eta) \iint_{\Delta\rho'} \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \Delta z, \eta)}{R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \Delta z, \eta)}$$

$$\cdot \frac{\sin\left[\kappa_x(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sx})\right]}{\pi(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sy})} \cdot \frac{\sin\left[\kappa_y(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})\right]}{\pi(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})} \cdot d\Delta\boldsymbol{\rho}' \tag{17}$$

令

$$F = \iint_{\Delta\rho'} \frac{R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \Delta z, \eta)}{R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \Delta z, \eta)} \cdot \frac{\sin\left[\kappa_x(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sx})\right]}{\pi(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sx})} \cdot \frac{\sin\left[\kappa_y(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})\right]}{\pi(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})} d\Delta\boldsymbol{\rho}' \tag{18}$$

这样，

$$R_{\delta u_1}(\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta z, z) = r_e^2\lambda^2\cos^2\theta_s\Delta L\sec^2\theta\int_{-\Delta L}^{\Delta L}\left(1 - \frac{|\eta|}{\Delta L}\right) \cdot R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta)F(\eta)d\eta \tag{19}$$

将(19)式的结果与 Rino (1977) 的结果相比，可以看到，多出一项 $F(\eta)$，而这一项正是考虑了 κ 有限的情况下得到的．如果使 $\kappa\to\infty$，$F(\eta)=1$ 这时回到 Rino 的结果．

3. 讨论

以下我们就上述结果以及所做近似的意义进行一下讨论．然后给出 Rino 结果可以成立的条件．

首先，讨论非涅耳近似成立的条件．对于这个近似条件．要求 $k\gg\kappa$，这相当于只考虑波数很小的 κ，由于 κ 是电子密度起伏谱密度中的波数．所以 κ 很小就表明只考虑大尺度不均匀起伏对电波传播的影响．k 很大则表明考虑的是高频波．

其次，考虑在 $k\gg\kappa$ 条件下，Rino 结果可以成立的条件．由 (18) 式，将 $R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \eta)$ 在 $\Delta\boldsymbol{\rho}_s$ 附近展开：

$$R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}', \eta) = R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta) + \nabla_T R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta)\cdot(\Delta\boldsymbol{\rho}' - \Delta\boldsymbol{\rho}_s) + \cdots \tag{20}$$

上式中：

$$\nabla_T = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$F \approx 1 + \iint_{\Delta\rho'} \frac{\nabla R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \Delta z, \eta)}{R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \Delta z, \eta)}\cdot(\Delta\boldsymbol{\rho}' - \Delta\boldsymbol{\rho}_s) \cdot \frac{\sin\left[\kappa_x(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sx})\right]}{\pi(\Delta\rho_x' - \Delta\rho_{sx})} \cdot \frac{\sin\left[\kappa_y(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})\right]}{\pi(\Delta\rho_y' - \Delta\rho_{sy})} d\Delta\boldsymbol{\rho}' \tag{21}$$

从(21)式可以看到．如果 Rino 结果能够成立，就要求 $F=1$．因此，我们得到 Rino 结果成立的条件为

$$|\nabla R_{\Delta N_e}|/R_{\Delta N_e} \ll 1 \tag{22}$$

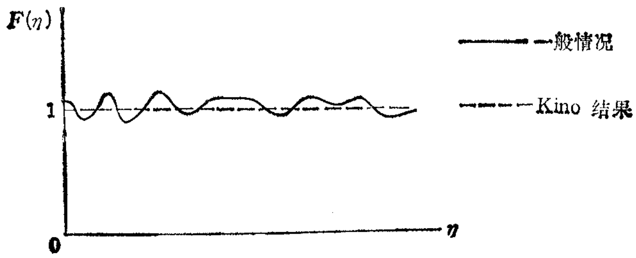

图　1

一般情况下，F 是 η 的一个很复杂的函数，它与 $|\nabla R_{\Delta N_e}|/R_{\Delta N_e}$ 的变化有关。$F(\eta)$ 的一般关系示于图 1。

从以上我们可以看到：如果我们知道了 $F(\eta)$，我们就可以了解相关函数 $|\nabla R_{\Delta N_e}|/R_{\Delta N_e}$ 的变化情况。另一方面，当 $|\nabla R_{\Delta N_e}|/R_{\Delta N_e} \ll 1$ 的条件不能满足时，Rino 结果的使用应当仔细考虑。

参考文献

[1] C. L. Rino, et al., *J. Atmos. Terr. Phys.*, 39(1977)8, 859—868.
[2] C. L. Rino, *Radio Sci.*, 14(1979)6, 1135—1145.
[3] C. L. Rino, *Radio Sci.*, 14(1979)6, 1147—1155.
[4] C. L. Rino, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 40(1978), 1011—1018.
[5] C. L. Rino, *Radio Sci.*, 15(1980)1, 41—47.

A DISCUSSION ON FRESNEL APPROXIMATION IN PHASE SCREEN MODEL

Lu Guizheng
(*Beijing Broadcast Institute, Beijing*)

Abstract The Fresnel approximation in phase screen model is discussed, and the coherence function is derived for $k \gg \kappa$. The application condition for Rino's results is obtained, and it is $|\nabla R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta)|/R_{\Delta N_e}(\Delta\boldsymbol{\rho}_s, \eta) \ll 1$.

Key words Ionospheric scintinllation; Power law phase screen model; Randon media