

## 瞬时频率和时频分布<sup>1</sup>

金 梁 殷勤业 姚敏立

(西安交通大学电信学院信息工程研究所 西安 710049)

**摘 要** 本文首先介绍了瞬时频率 (IF) 的概念和 IF 的传统计算方法——解析信号法, 然后从联合时频分析的角度讨论了 IF 的物理含义及其与时频分布之间的联系, 指出二维时频分布的任务之一是对 IF 进行估计, 并且通过对几种时频分布估计性能的比较说明分布形式的选择对估计效果有较大影响。最后, 本文提出并初步论证了自适应旋转投影分解法 (AOP) 计算 IF 的有效性。

**关键词** 瞬时频率, 时频分布, 自适应信号处理

**中图分类号** TN911.7

### 1 引 言

无论在理论研究或是在工程实践中, “频率”无疑是个极其重要的物理量。对于正弦周期信号来说, 频率定义为信号周期的倒数, 其值是恒定的, 物理含义也是显而易见的。然而我们通常遇到的信号其频谱特性往往是时变的。1936年 Armstrong<sup>[1]</sup>发现在通信中对正弦信号进行频率调制可有效地抑制噪声, 人们随之开始了对调频信号中“频率”这一物理量的研究。Carson<sup>[2]</sup>推广了频率的定义, 使之成为随时间变化的函数。他们提出瞬时频率 (Instantaneous Frequency, 即 IF) 的概念, 认为频率应为相位角在  $t$  时刻的变化率。实际上, 人们在日常生活中每天都在感受着瞬时频率的存在, 如色彩的变化、音调的高低等, 它描述了一般信号 (通常是时变、非平稳信号) 的局部性质, 在通信、地球物理勘探、雷达、声纳、生物医电和机械故障诊断等各个领域都有着广泛的应用。近年来, 随着时频分析理论的发展, 人们开始尝试从新的角度来理解瞬时频率的物理本质<sup>[3,4]</sup> 并对其进行估计。本文将就此作一些介绍和讨论。下文中设信号  $s(t)$  的频谱为  $S(\omega)$ , 并假定信号总能量已归一化, 即

$$E = \int |S(\omega)|^2 d\omega = \int |s(t)|^2 dt = 1. \quad (1)$$

### 2 瞬时频率和解析信号

如果我们将信号  $s(t)$  用幅度和相位表示, 即

$$s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (2)$$

则瞬时频率 IF 定义为

$$\omega_i = \varphi'(t). \quad (3)$$

<sup>1</sup> 1997-06-05 收到, 1998-01-04 定稿  
国家教委跨世纪优秀人才基金、国防重点实验室基金资助

我们可以从信号能量密度分布的角度加以验证。由 (1) 式, 如果将信号的功率谱密度  $|S(\omega)|^2$  看作是信号在各频率点上的能量分布, 则信号频率的全局均值即能量在频率轴上的集聚中心为

$$\langle \omega \rangle = \int \omega |S(\omega)|^2 d\omega = \int s^*(t) W s(t) dt = \int \varphi'(t) |s(t)|^2 dt, \quad (4)$$

其中  $W = j(d/dt)$  为频率算子, 详见文献 [5]。从时间角度看,  $|s(t)|^2$  为信号在各时间点上的能量分布, 则平均频率  $\langle \omega \rangle$  亦可认为是所有时刻上瞬时频率  $\omega_i(t)$  的全局均值, 即

$$\langle \omega \rangle = \int \omega_i(t) |s(t)|^2 dt. \quad (5)$$

比较 (4)、(5) 式, 显然

$$\omega_i(t) = \varphi'(t). \quad (6)$$

上式意味着要得到 IF 首先要将信号表示为 (2) 式的形式, 即将实信号映射为复信号。这种映射并不唯一, Gabor<sup>[6]</sup> 提出的解析信号法是常用的一种, 解析信号表示为

$$z(t) = s(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t')}{t-t'} dt', \quad (7)$$

然而在许多场合下用解析信号计算 IF 其结果令人困惑。首先, 有时信号频谱是有限个离散的线状谱, 而 IF 却可能是连续的; 其次, 解析信号的 IF 可能不是频谱中存在的谱线; 第三, 带限信号的 IF 有可能出现在带外; 最后, 尽管解析信号本身不存在负频率上的谱, 其 IF 却可能是负的。这些异常情况可由图 1 中的例子说明。设  $A_1$ 、 $A_2$  为常数,  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ , 考虑信号  $x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$  的解析信号:

$$s(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} = A e^{j\omega t}. \quad (8)$$

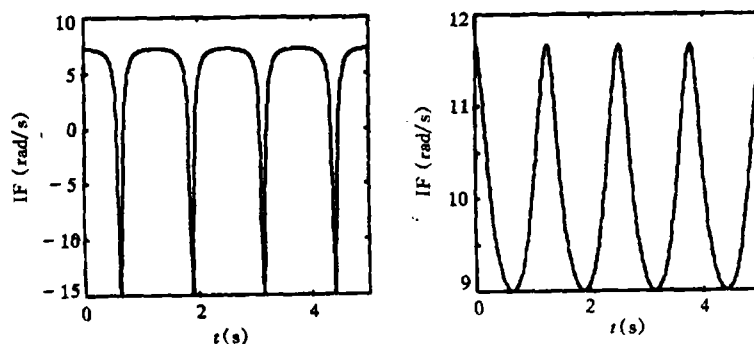


图 1 解析信号法得到的 IF

令  $\omega_1 = 5$ ,  $\omega_2 = 10$ , 取  $A_1 = 0.8$ ,  $A_2 = 1$  和  $A_1 = -4$ ,  $A_2 = 1$  分别得到如图 1(a)、1(b) 的结果。图 1(a) 中尽管  $s(t)$  解析而 IF 却出现了负值; 1(b) 中 IF 是连续的并超出了带外。两种情况下 IF 均出现了信号频谱中不存在的频率分量。这些情况是由于多分量信号的相位不具有可加性, 但我们不能就此断言其结果不代表正确的瞬时频率, 只能说这种 IF 与人们直观感觉不太一致, 或者说某些情况下人们需要或偏爱更符合直观感受的 IF。

### 3 瞬时频率和时频分布

顾名思义, 瞬时频率用来表征信号在局部时间点上的瞬态频率特性, 整个持续期上的瞬时频率反映了信号频率的时变规律. 而信号频谱  $S(\omega)$  或信号波形  $s(t)$  只反映信号能量分布的一维情况, 无法描述信号的时变特性. 信号的时域与频域特性是相互联系、互相制约的, 不应被机械地割裂开来. 为此人们提出了联合时频分布的概念<sup>[3]</sup>, 即同时在时间和频率上描述信号, 认为信号的能量分布于二维时频平面上, 在时刻  $t$ 、频率  $\omega$  上的能量密度为  $P(t, \omega)$ ,

$$E = \iint P(t, \omega) d\omega dt = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (9)$$

$$\int P(t, \omega) d\omega = P_1(t) = |s(t)|^2, \quad \int P(t, \omega) dt = P_2(\omega) = |S(\omega)|^2, \quad (10)$$

其中 (10) 式称为边界条件. 由于这种方法既能精细刻划信号的瞬时频谱, 又能充分适用于时变信号, 因此用它来分析信号的瞬时频率应有助于更深刻地理解瞬时频率的物理意义. 事实上, 估计信号的瞬时频率是二维时频分布的重要任务之一, 对于一个合理的时频分布其能量峰脊应出现在瞬时频率迹线附近.

将  $P(t, \omega)$  看作关于  $t$ 、 $\omega$  的二维联合分布, 则有

$$P(\omega|t) = P(t, \omega)/P_1(t), \quad \langle \omega \rangle_t = \int \omega P(\omega|t) d\omega, \quad (11)$$

其中  $P(\omega|t)$  为  $t$  时刻的条件分布密度,  $\langle \omega \rangle_t$  为频率在  $t$  时刻的条件均值. 用  $P(t, \omega)$  计算频率的全局均值  $\langle \omega \rangle$ , 有

$$\langle \omega \rangle = \iint \omega P(\omega|t) P_1(t) dt d\omega = \int \langle \omega \rangle_t P_1(t) dt = \int \langle \omega \rangle_t |s(t)|^2 dt. \quad (12)$$

比较 (12) 和 (5) 式, 有

$$\omega_i(t) = \varphi'(t) = \langle \omega \rangle_t, \quad (13)$$

即某时刻的瞬时频率为频率在该时刻的条件均值. 因此, 从时频分析的角度我们可以认识到, 信号在每个时刻  $t$  上对应的频率分量通常并不是单一的, 而是由许多服从分布  $P(\omega|t)$  的许多分量构成. 瞬时频率是这些分量共同作用的结果, 即为它们对能量密度的加权平均. 这可以在一定程度上解释上节解析信号出现的异常情况.

需要指出的是, 人们为得到信号的时频分布提出了各种形式的  $P(t, \omega)$ , 然而到目前为止还没有一种时频分布能在各方面都满足人们的要求, 在瞬时频率方面也是如此. 时频分布不同, 得到的 IF 就不同. 事实上, 能否准确反映信号的 IF 信息也是衡量时频分布性能的标准之一. 因此, 估计 IF 的关键首先是选择合适的分布形式. 以 Cohen 类<sup>[3]</sup> 分布为例,

$$P(t, \omega) = \iiint \phi(\theta, \tau) s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j\theta t - j\omega\tau + j\theta u} du d\theta d\tau. \quad (14)$$

可以证明<sup>[3]</sup>, 只有满足

$$\phi(\theta, \tau) = 1, \quad \left. \frac{\partial \phi(\theta, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (15)$$

的二次时频分布, (13) 式才成立.

#### 4 几种常用的时频分布和 IF 估计

一般认为, 单分量信号是指在时频平面内可以用一条连续单值可逆的瞬时频率曲线来描述其调制规律的信号, 不能用一条连续可逆曲线来描述的信号就是多分量信号<sup>[3]</sup>. 对于单分量信号, 人们希望估计出的 IF 尽可能准确, 即要求时频分布的能量峰脊集中于 IF 附近; 对于多分量信号, 则通常希望得到的 IF 能反映各分量 IF 的均值并符合人们的主观感受, 从而回避由解析信号法带来的尴尬.

由于 IF 是频率对能量的加权平均, 所以对于单分量信号, 其 IF 靠近或重合于时频峰脊. 因此, 实际中往往将时频分布峰值对应的频率作为单分量信号的 IF 估计. 图 2 用最大谱峰搜索法比较了一种典型的时变信号——高斯包络调频信号  $s(t)$  的 IF 估计情况,

$$s(t) = (\pi/\alpha)^{-0.25} \exp\{-\alpha t^2 + j\omega_0 t + j\beta t^2\}. \quad (16)$$

当  $s(t)$  加高斯白噪声 (信噪比 SNR=2dB), 图 2 给出了各种分布下用最大谱峰搜索法得到的 IF 估计值 (实线) 与 IF 的实际值 (点划线) 的比较, 其中  $\alpha = 5$ ;  $\beta = 30$ ;  $\omega_0 = 10$ .

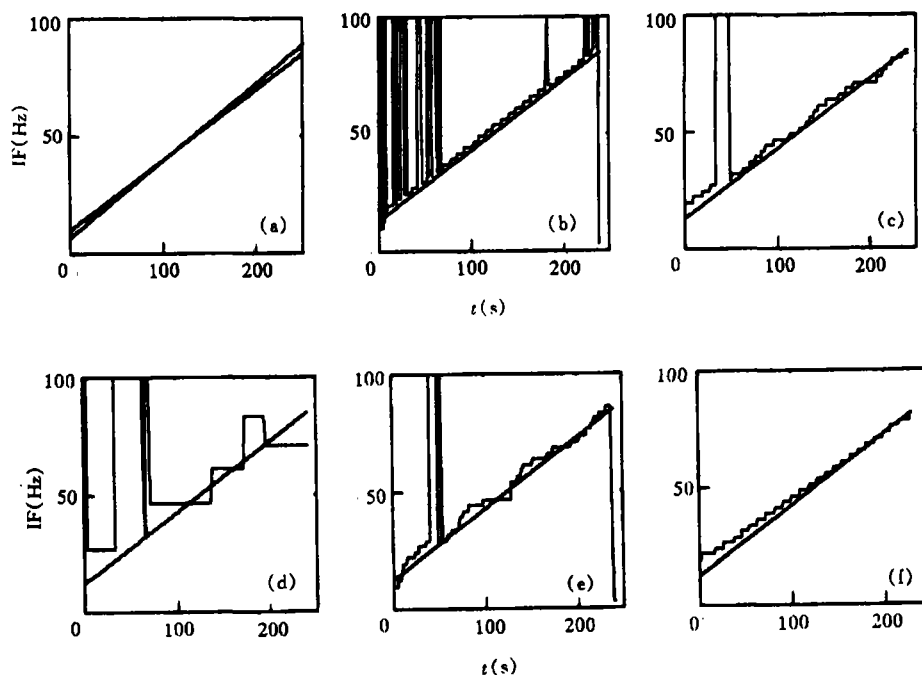


图 2 几种常见分布的 IF 估计

(a) AOP (b)Wigner (c)Spectrogram (d) Adaptive (e)Choi-Williams (f) TFDS(3阶)

从图中可以看出, 二次时频分布如 Wigner 分布、Choi-Williams 分布等, 由于该类分布固有的交叉项的存在, 可能将噪声的影响在时频平面上弥散化, 加剧了噪声的干扰, 所以在信噪比较差的情况下用这些分布估计 IF 效果不佳; 由于双线性变换往往在信号中心点的频率分辨率最高, 两端分辨率最低, 所以信号两端的 IF 在加噪时往往极不稳健, 见图 2(b),

2(e). 时频分布序列 (TFDS)<sup>[7]</sup> 由于用阶数控制交叉项的影响, 它在 IF 估计中的抗噪性能强于上述分布, 如图 2(f). 短时谱 (Spectrogram) 由于不满足 (13) 式, 所以对 IF 的估计是有偏的, 偏差与窗的参数有关. 图 2(c) 中加的是 64 点 Gauss 窗. 自适应分布 (Adaptive Distribution)<sup>[7]</sup> 的基函数由于没有线性调频项, 匹配信号时自由度受到限制, 对于类似图 2 的信号匹配效果不佳, 其 IF 估计呈阶梯状, 误差较大 (图 2(d)).

自适应旋转投影分解法 (AOP 法) 是一种基于空间基分解的线性方法<sup>[8]</sup>. 它将信号分解为下列形式:

$$s(t) = \sum_n c_n g_n(t) = \sum_n s_n(t), \quad (17)$$

其中基函数  $g_n(t)$  为高斯包络的线性调频信号:

$$g_n(t) = (\pi\sigma_n^2)^{-0.25} \exp\left[-(t-t_n)^2/(2\sigma_n^2) + j\omega_n(t-t_n) + j\alpha_n(t-t_n)^2\right]; \quad (18)$$

基函数的瞬时频率为

$$\varphi'_n(t) = \omega_n + 2\alpha_n t; \quad (19)$$

定义 AOP 时频分布为

$$\text{AOP}_s(t, \omega) = \sum_n \text{WD}_n(t, \omega); \quad (20)$$

其中  $\text{WD}_n(t, \omega)$  为分量  $s_n(t)$  的 Wigner 分布.

AOP 法的基函数能较好地相当广泛的非平稳信号进行匹配, 而且基函数形式简单, 对其 IF 的研究比较成熟, 并可以保证 IF 曲线与时频能量峰脊重合, 因而估计是无偏的 (见表 1). 另外, AOP 法是按能量匹配的顺序分解信号, 有用信号的能量在时频平面上较为集中, 且大部分信号的局部波形多少具有一些高斯调频信号的特征, 所以很容易被匹配出来; 而噪声能量往往散布于时频平面, 其波形随机性很大, 因此较难匹配. 因而用 AOP 法估计的 IF 对噪声不敏感, 如图 2(a). 表 1 给出 256 点信号加噪与不加噪的 IF 平均估计误差.

表 1 几种时频分布估计 IF 的平均误差统计

	AOP	Wigner	短时谱	Adaptive	C-W	TFDS(3 阶)
无噪声	$8 \times 10^{-5}$	6.54	6.72	52.3	8.7	10.15
SNR=2dB	5.2	$2.2 \times 10^3$	$2.4 \times 10^3$	$6.48 \times 10^3$	$1.66 \times 10^3$	15.48

对于多分量信号, 从 (12) 式可得 AOP 法估计的 IF 为

$$\omega_i(t) = \frac{\int \omega \text{AOP}_s(t, \omega) d\omega}{\int \text{AOP}_s(t, \omega) d\omega} = \frac{\sum_n |s_n(t)|^2 \varphi'_n(t)}{\sum_n |s_n(t)|^2}. \quad (21)$$

上式清楚地表明了信号的 IF 与其各分量 IF 之间的联系. 可以看出, 前者是后者对瞬时能量密度的加权平均, 这与上节讨论的结果完全一致, 所以 (21) 式的物理意义十分明确. 此外, 由此估计多分量信号的 IF 可保证为正值且不会超出带外, 与解析信号法相比更符合人们的直观感受, 应用范围更宽. 以 (8) 式表示的信号为例, 图 3 给出了用 AOP 计算 IF 与 Wigner 分布计算 IF 的比较. 由于 (13) 式的约束, 后者的结果与图 1 解析信号的结果并无区别.

可以看出, AOP 时频谱充分利用了 Wigner 变换的优点, 摒弃了它的不足: AOP 没有 Wigner 分布的交叉项, 所以更适用于多分量信号的场合; 在 (21) 式的推导中, 用到了 Wigner

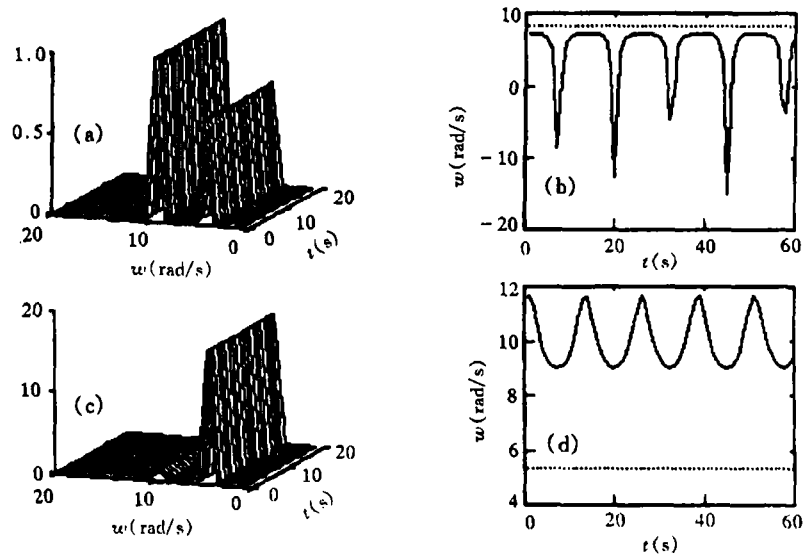


图3 多分量信号的 AOP 分布和 IF 估计  
 (a), (b) 对应于图 1(a) 的情形; (c), (d) 对应于图 1(b) 的情形; (a), (c) 为信号的 AOP 分布;  
 (b), (d) 中虚线为用 AOP 分布计算的瞬时频率, 实线为用 Wigner 分布计算的瞬时频率

分布的条件均值等于  $\varphi'_n(t)$  和满足边界条件等良好的性质。另外由于基函数的 Wigner 分布为正, 从而保证了 AOP 时频分布的非负性。

## 5 结 论

本文首先讨论了瞬时频率和解析信号的由来, 指出用解析信号法构造的 IF 有时会与人们主观感觉不符。然后从时频分布的角度分析了瞬时频率的物理含义, 并说明了从时频分布研究和估计 IF 的意义和作用。通过比较几种常见分布的 IF 估计性能, 说明了分布形式的选择对估计准确度的影响。从中发现, 对单分量信号而言, AOP 法有较强的抗噪性和准确度; 对多分量信号其 IF 的估计符合人们的主观感受, 因此 AOP 分布比较适合进行 IF 估计。

## 参 考 文 献

- [1] Armstrong E. A method of reducing distributes in radio signaling by a method of frequency-modulation. Proc. IRE, 1936, 24: 669-740.
- [2] Carson J, et al. Variable frequency electric circuit theory with application to the thoery of frequency modulation. Bell System Tech. J, 1937, 16: 513-540.
- [3] Cohen L. Time-Frequency Analysis. New York: Prentice Hall, 1995, 213-231.
- [4] Boashash B. Time-Frequency Signal Analysis. Melbourne: Longman Cheshire, 1992, 43-73.
- [5] 黄朝云, 殷勤业. 时频分析中的若干算子. 西安交通大学学报, 1996, 21(9): 28-32.
- [6] Gabor D. Theory of communication. Proc. IEE, 1946, 93(III): 429-457.
- [7] Qian S, et al. Joint Time-Frequency Analysis. New York: Prentice Hall, 1996, 187-209.

- [8] 殷勤业, 倪志芳, 钱世锜, 陈大庞. 自适应旋转投影分解法. 电子学报, 1997, 25(4): 52-58.

## INSTANTANEOUS FREQUENCY AND TIME-FREQUENCY DISTRIBUTIONS

Jin Liang    Yin Qinye    Yao Minli

(*Institute of Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049*)

**Abstract** The concept of instantaneous frequency(IF) and its traditional construct method — analytic method are introduced in this paper. Then by means of joint time-frequency analysis, the physical meaning of IF and its relation with the time-frequency distributions are also discussed. It is pointed out that one of the destinations of 2-D time-frequency distributions is to estimate the IF, and the different distribution can be of different effect. The performances of several popular distributions are compared, consequently AOP method is found to be a suitable one to estimate the IF.

**Key words** Instantaneous frequency, Time-frequency distribution, Adaptive signal processing

金 梁: 男, 1969 年生, 博士生, 研究兴趣为通信中的信号处理技术、时频分析和非平稳信号处理。  
殷勤业: 男, 1950 年生, 教授、博士生导师, 研究领域为时空谱估计、神经网络、时频分析等。  
姚敏立: 男, 1969 年生, 博士生, 研究兴趣为时空谱估计、时频分析等。