

注入锁相分频器*

黄成方

(西南电子技术研究所, 成都)

摘要 注入锁相分频器可在较低输入信噪比下工作, 这是其他分频电路不能比拟的优点。本文对注入锁相分频器作了以下工作: (1) 给出了输入信号含附加噪声时注入锁相分频器的通用相位方程和等效模型; (2) 研究了无噪声条件下调相信号通过注锁分频器的特性及分频器的同步带宽; (3) 讨论了输入附加噪声对注锁分频器特性的影响。注锁放大器是本文中 $n = 1$ 的特例, 本文的结果也适用于注入锁相放大器。

关键词 注入锁相分频器; 同步带宽; 调相信号; 附加噪声

一、引言

注入锁相振荡器用作相关放大器、滤波器和分频器, 已在无线电各个领域中得到日益广泛的应用。与普通锁相环一样, 它保持了输入信号和输出信号相位相关, 能实现频率跟踪并在很多地方可取代锁相环。注入锁相振荡器以特有的简单、经济性引起了人们极大兴趣。多年来, 特别是近十多年来许多学者^[1-4]对它用作相关放大器和滤波器性能进行了研究。但是, 人们对注入锁相分频器分析甚少。迄今为止还没有看到含有附加噪声时注锁分频器的论文发表。实验表明, 注入锁相分频器可在较低输入信噪比下工作, 这是其他分频电路不能比拟的。本文对注入锁相分频器进行了分析, 作了以下工作: (1) 给出了输入信号含有附加噪声时注入锁相分频器的通用相位方程和等效模型; (2) 用迭代法研究了无噪声情况下调相信号通过注锁分频器的特性; (3) 用统计线性化方法研究了输入噪声对注锁分频器特性的影响。

二、相位方程

设注入锁相分频器的输入信号和被锁定的输出信号分别为

$$S(t) = u_0 \cos [Pt + \theta_i(t)]$$

$$r(t) = A_0 \cos [\omega_0 t - \theta(t)]$$

式中 $\theta_i(t)$ 和 $\theta(t)$ 分别为分频器输入信号和输出信号的相位调制分量, u_0 和 P 分别为输入信号振幅和频率, A_0 和 ω_0 为注锁振荡器自由振荡振幅和频率。当 $P \approx n\omega_0$ (n 为正整数), 振荡器将发生同步, 注锁振荡器工作在分频状态。输入信号具有相位调制分量

* 1987年10月4日收到, 1988年4月19日修改定稿。

$\theta_i(t)$ 时,文献[5]中注入锁相分频器无噪声相位方程可重新写为

$$\frac{d\theta_e}{dt} = \Delta\omega_n - nKu_o \sin\theta_e + \frac{d\theta_i}{dt} \quad (1)$$

式中 $\Delta\omega_n = P - n\omega_o$ 为输入信号与振荡器自由振荡信号的等效起始频差, $\theta_e = \theta_i - n\theta$ 为振荡器输入和输出信号的等效相位差, n 为分频次数,用文献[5]中符号表示 $K = K_n/(nu_o)$, 其值与振荡器注锁模式、输入信号电平以及电路参数有关. $n = 1$, 为注锁相关放大器,若振荡器使用品质因素为 Q 的单调谐回路,则 $K = \omega_o/(2QA_o)$.

当输入含有附加噪声,附加噪声是均值为零、中心频率为 P 、单边谱密度为 N_o 的窄带高斯随机过程时,注入锁相分频器相位方程如下

$$\frac{d\theta_e}{dt} = \Delta\omega_n - K_n \sin\theta_e + K_n \frac{1}{u_o} N_1(t) + \frac{d\theta_i}{dt} \quad (2)$$

式中 $K_n = nKu_o$, $N_1(t)$ 为等效噪声,当 P 远大于输入带宽时, $N_1(t)$ 可视为白色高斯过程,单边噪声谱密度为 $2N_o$. 由(2)式可导出图1所示的注入锁相分频器等效相位模型. 图中 S 是微分算子. 当 $n = 1$ 时, $\Delta\omega = P - \omega_o$, $\theta_e = \theta_i - \theta$, (2)式成为注入锁相放大器方程.

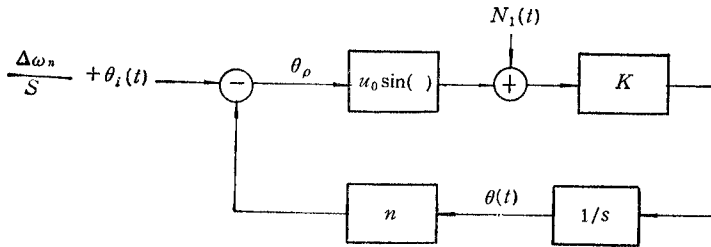


图1 注锁分频器等效模型

三、无噪声性能

本节将分析无噪声时注锁分频器的同步带宽以及相位调制信号通过注锁分频器的特性.

1. 同步带宽

当输入信号为正弦调相时,相位调制分量为 $\theta_i = m \sin \Omega t$, 其中 m 为调制指数, Ω 为调制频率. 这时,分频器的瞬时相位差可表示为

$$\theta_e = \varphi_o + M \sin(\Omega t + \phi)$$

其中 φ_o 为起始频差产生的稳态相差,第二项为剩余调制误差. 将 θ_i 和 θ_e 代入(1)式,利用谐波平衡法得

$$\Delta\omega_n = K_n J_0(M) \sin \varphi_o \quad (3)$$

式中 $J_0(M)$ 为零阶贝塞尔函数值. 由于最大 $|\sin \varphi_o| = 1$, 则得无噪声注锁分频器同步带 $\Delta\omega_s$ 为

$$\Delta\omega_s = 2K_n J_0(M) \quad (4)$$

相位调制分量降低了分频器的同步带, 剩余调制误差 M 愈大, 同步带下降愈多。当输入信号为纯载波时, 分频器同步带为 $2K_n$ 。

2. 相位调制分量

利用迭代法解 (1) 式, 则得

$$\begin{aligned} \sin \theta_c(t) = & \Delta\omega_n/K_n + \theta'_i(t)/K_n - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i(t) + \frac{1}{K_n^3} \theta'''_i(t) - \frac{1}{K_n^4} \theta''''_i(t) \\ & - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{K_n} \Delta\omega_n + \frac{1}{K_n} \theta'_i(t) - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i(t) \right]^3 \end{aligned} \quad (5)$$

因为

$$\theta'_i(t - 1/K_n) = \theta'_i(t) - \frac{1}{K_n} \theta''_i(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{K_n^2} \theta'''_i(t) - \frac{1}{6} \frac{1}{K_n^3} \theta''''_i(t) + \dots$$

当 $K_n \gg \Delta\omega_n$ 时,

$$\begin{aligned} \sin \theta_c \approx \theta_c = & \Delta\omega_n/K_n + \frac{1}{K_n} \theta'_i \left(t - \frac{1}{K_n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega_n}{K_n} \right) \left(\frac{1}{K_n} \theta'_i - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i \right)^2 \\ & - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{K_n} \theta'_i - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i \right)^3 \end{aligned} \quad (6)$$

式中第一项 $\varphi_0 = \Delta\omega_n/K_n$ 为稳态相差。

分频器输出信号瞬时相位如下

$$\theta(t) = \int \frac{K_n}{n} \sin \theta_c dt$$

将 (6) 式代入上式, 分频器的相位调制分量为

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{1}{n} \theta_i \left(t - \frac{1}{K_n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\omega_n}{n} \right) \int \left(\frac{1}{K_n} \theta'_i - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i \right)^2 dt \\ & - \frac{K_n}{6n} \int \left(\frac{1}{K_n} \theta'_i - \frac{1}{K_n^2} \theta''_i(t) \right)^3 dt \end{aligned} \quad (7)$$

式中第一项为分频器输出的相位调制分量, 第二、三项分别为分频器产生的二次和三次非线性失真。由此可知:

(1) 调制信号经过 n 次分频后, 调制指数减小为输入调制指数的 $1/n$, 且产生了 $1/K_n$ 秒延迟, 延迟时间与分频次数无关, 只与 K_n 有关;

(2) 调制信号通过注锁分频器后, 将产生非线性失真, K_n 愈大失真愈小。当 $\Delta\omega_n=0$, 分频器不产生二次失真。

输入信号为正弦调制时, 分频器瞬时相位差为

$$\begin{aligned} \theta_c \approx & \frac{\Delta\omega_n}{K_n} + ma \cos [\Omega(t - 1/K_n)] - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta\omega_n}{K_n} \right) m^2 a^2 \cos [2\Omega(t - 1/K_n)] \\ & - \frac{1}{8} m^3 a^3 \cos [3\Omega(t - 1/K_n)] \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $a = \Omega/K_n \ll 1$ 。分频器的相位调制分量为

$$\theta(t) \approx \frac{m}{n} \sin [\Omega(t - 1/K_n)] - \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta\omega_n}{K_n} \right) ma \frac{m}{n} \sin [2\Omega(t - 1/K_n)]$$

$$-\frac{1}{24} (ma)^2 \frac{m}{n} \sin [3\Omega(t - 1/K_n)] \quad (9)$$

四、有附加输入噪声性能

从图 1 可知, 等效模型中含有非线性环节 $y = u_o \sin \theta_c$, 下面我们将用统计线性化进行分析. 使用统计线性化方法必须满足以下两个条件: (1) 非线性环节的输入和输出信号必须是平稳和平稳相关的; (2) 非线性环节后应当有个低通滤波器, 使其非线性失真项衰减到可以忽略的程度.

输入信号为正弦调相时, 注锁分频器的等效瞬时相位差由三部份组成: 一部份是起始频差产生的稳态相差 φ_o , 一部份是相位调制分量产生的剩余调制误差 $M \sin(\Omega t + \phi)$, 另一部份是噪声 $N_1(t)$ 产生的随机相位误差 φ_n , 即

$$\theta_c = \varphi_o + M \sin(\Omega t + \phi) + \varphi_n \quad (10)$$

由于有谐波分量, θ_c 为非平稳过程. 但是, 鉴于 φ_n 为随机过程, 我们仍然可以把 θ_c 看作平稳随机过程, 其理由如下: 我们可以把 θ_c 看作一个随机过程的一组抽样, 其中每个抽样都是一个正弦段与随机过程 φ_n 的一个抽样之和组成. 当然每个正弦段的初始相位是任意选择的, 因此按对所有可能抽样的均方差最小的准则而构成的最佳线性近似, 可把 θ_c 看作一个相位在 $(0, 2\pi)$ 区间均匀分布的正弦信号与随机信号 φ_n 之和, 这样 θ_c 就是一个平稳过程了. 此外, 从图 1 可知, 非线性环节后有一个积分环节起着低通滤波作用, 故 (2) 式满足统计线性化求解条件.

按统计线性化方法, 设非线性环节输出信号线性近似为下式

$$y = h_o \varphi_o + h_1 M \sin(\Omega t + \phi) + h_2 \varphi_n \quad (11)$$

其中 h_o , h_1 和 h_2 由下式得出^[6]

$$\begin{aligned} h_o \varphi_o &= \frac{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)]}{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)]} \\ &= u_o J_0(M) \sin \varphi_o \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{\sigma_M^2} \frac{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)] \cdot M \sin(\Omega t + \phi)}{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)]} \\ &= \frac{2u_o}{M} J_1(M) \cos \varphi_o \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)] \cdot \varphi_n}{u_o \sin[\varphi_o + \varphi_n + M \sin(\Omega t + \phi)]} \\ &= u_o J_0(M) \cos \varphi_o \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \end{aligned} \quad (12c)$$

其中

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 \sin^2(\Omega t + \phi) d\phi = \frac{1}{2} M^2, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2 p(\varphi_n) d\varphi_n$$

从图 1 和 (11) 式, 可得统计线性化后注锁分频器等效模型如图 2 所示.

1. 稳态相差

从图 2 可知, 输入信号含有附加噪声时, 分频器稳态相差传递函数为

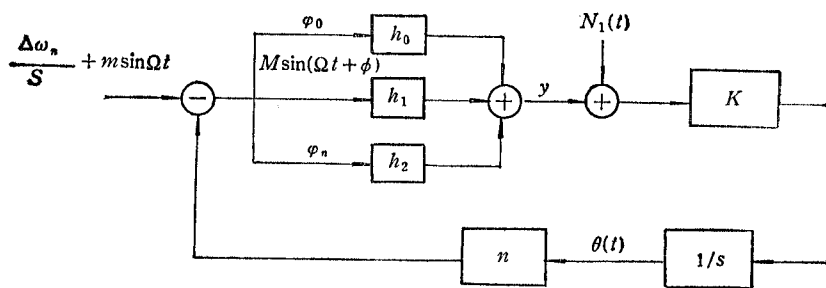


图2 统计线性化等效模型

$$\Delta\omega_n/s = \varphi_0 + \frac{1}{s} K_n J_0(M) \sin \varphi_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \quad (13)$$

因 $s\varphi_0 = 0$ ，且 $|\sin \varphi_0|$ 最大为 1，由上式可得噪声作用下分频器同步带宽

$$\Delta\omega_s = 2K_n J_0(M) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \quad (14)$$

其稳态相差近似为

$$\sin \varphi_0 \approx \varphi_0 = \frac{\Delta\omega_n}{K_n J_0(M)} \exp\left(\frac{1}{2} \sigma^2\right) \quad (15)$$

可见，输入信号含有附加噪声时分频器同步带宽减小了，稳态相差加大了， σ^2 愈大影响愈大。

2. 相位调制分量

从图 2 可知，分频器对正弦调制分量的传递函数为

$$\frac{\theta(s)}{\theta_i(s)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{h_1 K n}{s + h_1 K n}$$

当输入信号为正弦调相时，由上式可得分频器输出的相位调制分量为

$$\theta(t) = m_0 \sin(\Omega t - \phi_0)$$

其中

$$m_0 = \frac{\frac{2K_n}{M} J_1(M) \cos \varphi_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right)}{\sqrt{\Omega^2 + \left[\frac{2K_n}{M} J_1(M) \cos \varphi_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right)\right]^2}} \cdot \frac{m}{n}$$

和

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left[\frac{M\Omega}{2K_n J_1(M) \cos \varphi_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right)} \right]$$

当 $M \ll 1$ ， $K_n \gg \Omega$ 和 $\Delta\omega_n = 0$ 时

$$\theta(t) = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega}{K_n} \right)^2 \exp \sigma^2 \right] \frac{m}{n} \sin \Omega \left[t - \frac{1}{K_n} \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right] \quad (16)$$

与 (9) 式比较，由于输入信号含有噪声，相位调制信号经过分频器后，调制指数进一步减小，延迟时间也加大了。

同样可得,分频器的剩余调制误差为

$$M \sin(\Omega t + \phi)$$

其中

$$M^2 = \frac{\left(\frac{\Omega m}{K_n}\right)^2}{\left(\frac{\Omega}{K_n}\right)^2 + \left[\frac{2}{M} J_1(M)\right]^2 \cos^2 \varphi_o \exp(-\sigma^2)}$$

和

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2K_n J_1(M) \cos \varphi_o \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right)}{\Omega M} \right]$$

当 $K_n \gg \Omega$, $M \ll 1$ 时

$$M = \frac{m\Omega}{K_n \cos \varphi_o} \exp \frac{\sigma^2}{2}; \quad \phi = \tan^{-1} \left[\frac{K_n}{\Omega} \cos \varphi_o \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) \right] \quad (17)$$

因此,加大同步带宽 K_n , 减小起始频差 $\Delta\omega_n$, 均可降低剩余调制误差, 但输入信号的附加噪声增大了调制误差。

3. 随机相位误差

从图 2 可知,分频器输出的相位噪声谱密度为

$$\frac{1}{n} S_{\varphi_n}(\omega) = \frac{1}{(h_2 n)^2} |H(j\omega)|^2 S_{N_1}(\omega)$$

其中 $S_{N_1}(\omega) = 2N_o$ 是等效噪声的单边噪声谱密度; 等效噪声的闭环传递函数为

$$H(j\omega) = \frac{Knh_2}{j\omega + Knh_2}$$

分频器输出的随机相位方差是

$$\sigma^2 = \frac{2N_o}{(h_2 n)^2} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 df \quad (18)$$

令闭环等效噪声带宽为

$$B_L = \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 df$$

并定义分频器输入信噪比为

$$(SNR) = \frac{u_o^2/2}{N_o \cdot K_n/2}$$

将 (12c) 式代入 (18) 式, 可得

$$\sigma^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2\right) = \frac{1}{2(SNR)n^2 \cos \varphi_o J_0(M)} \quad (19)$$

由此可知,注锁分频器的随机相位误差与输入信噪比成反比,与分频次数 n^2 也成反比。此外,起始频差 $\Delta\omega_n$ 、剩余调制误差 M 都加大了分频器的相位噪声。

五、实验与结论

我们用文献[5]中的差分对注锁分频器进行了实验。电路自由振荡频率为 13MHz, 输入信号为正弦调相信号, 调制频率为 200 kHz, 调制指数 $m = 1$ 。我们对该电路的注锁放大模式、1/2 和 1/3 注锁分频模式进行了测试。各种模式的输出调制指数 m_o 随输入信噪比 $(SNR)^{-1}$ 变化的实测数据如图 3 所示。图中 $n = 1$ 为注锁放大数据, $n = 2$ 为 1/2 注锁分频器数据, $n = 3$ 为 1/3 注锁分频器数据。各种模式同步带宽 $\Delta\omega$, 随 $(SNR)^{-1}$ 变化的实测数据如图 4 所示, 无噪声时 $n = 1$ 的同步带为 7.8 MHz, $n = 2$ 的同步带为 5.1 MHz, $n = 3$ 的同步带为 1.9 MHz。分析与实验结果基本一致。得结论如下:

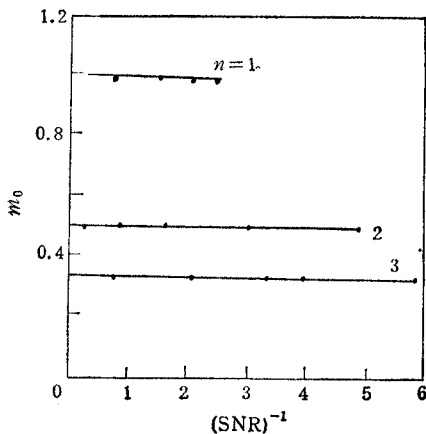


图 3

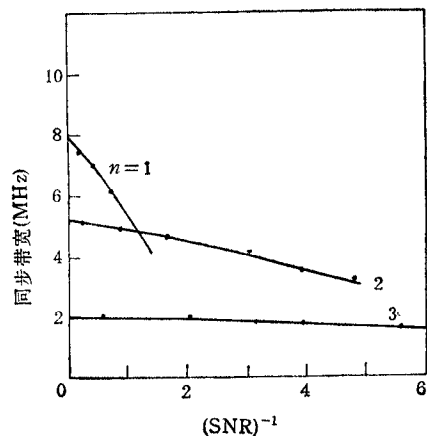


图 4

(1) 无附加噪声时,若分频器同步带宽远大于调制信号带宽,相位调制信号通过 n 次注锁分频器后,其调制指数减小为输入调制指数的 $1/n$,并产生了 $1/K_n$ 秒延迟。此外,还产生了非线性失真, K_n 愈大失真愈小。

(2) 当输入信号含附加噪声时,注锁分频器同步带宽和输出调制指数均要减小,但信号延迟时间增大了。

(3) 输入噪声产生的分频器随机相位误差与输入信噪比成反比;与分频次数的平方 n^2 也成反比。

(4) 分频器的起始频差、剩余调制误差均使分频器输出相位误差增大,降低了分频器同步带宽。

作者在撰写本文过程中得到了尤婉贞同志帮助,并经游荣华主任审阅,在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] J. Nigrin et al., *Proc. IEEE*, **60**(1972), 731—732.
- [2] B. N. Biswas, *IEEE Trans. on CT*, **CT-17** (1970), 637—639.

- [3] B. Glance, *Bell Sys. Tech. J.*, **50**(1971), 933—949.
[4] B. N. Biswas et al, *IEEE Trans, on CAS*, **CAS-27**(1980), 833—836.
[5] 黄成方, 电子学报, 1982年, 第3期, 第79—85页.
[6] A. A. Pervozvanskil, *Random Processes in Nonlinear Control System*, New York, Academic Press, 1965.

INJECTION-LOCKED DIVIDER

Huang Chengfang

(*Southwest Institute of Electronic Technology, Chengdu*)

Abstract An injection-locked divider (ILD) can provide good synchronization at lower input signal to noise ratio, which is its advantage over other types of divider. The general expression of phase equation and equivalent model are presented for the ILD with an input additive noise. In the absence of noise the performance of the phase-modulated signal through the ILD and synchronous ranges of the ILD are given. The effects of the additive noise on the ILD are discussed. The injection-locked amplifier (ILA) is only a particular case in which $n=1$, therefore the given results are applicable to the ILA.

Key words Injection-locked divider; Synchronous range; Phase-modulated signal; Additive noise