

用 Coifman 区间尺度函数求解电磁场积分方程¹

魏兴昌 梁昌洪

(西安电子科技大学 601 实验室 西安 710071)

摘要 该文采用 Coifman 区间尺度函数作为矩量法中的展开函数和权函数, 求解电磁场积分方程. 利用 Coifman 尺度函数的消失矩特性, 减少计算矩阵元素的双重积分次数, 同时对两个具有不同积分核的方程, 提出了不同的消失矩近似方法.

关键词 Coifman 区间尺度函数, 矩量法 (MM), 电场积分方程 (EFIE), Pocklington 方程

中图分类号 O441

1 引言

矩量法 (MM) 把算子方程离散化, 是求解电磁场积分方程的一个有效方法. MM 中权函数的选取通常有点选配和 Galerkin 法两种, Galerkin 法的最大优点是收敛快, 但其缺点是求内积运算使积分变得复杂, 显著增加了计算阻抗矩阵的时间. Coifman 区间尺度函数具有消失矩和支集有限的特性, 可以大大减少计算矩阵元素时所需的双重积分数量. 本文用 Coifman 区间尺度函数加速 Galerkin 法中矩阵元素的填充, 同时, 对于二维和三维问题中的不同积分核, 说明了消失矩近似的不同范围.

2 Coifman 区间尺度函数

标准的小波和尺度函数定义在整个实轴上, 而电磁场积分方程中需要求解的未知函数是在有限区域内的, 为此需要采用区间小波和尺度函数^[1,2].

阶数为 $L = 2N$ 的 Coifman 小波, 其尺度函数 $\varphi(x)$ 支集为 $[-2N, 4N - 1]$, 小波函数 $\psi(x)$ 支集为 $[1 - 3N, 3N]$, 它们具有如下的消失矩性质:

$$\int \varphi(x) \cdot dx = 1 \tag{1}$$

$$\int x^p \varphi(x) \cdot dx = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 2N - 1 \tag{2}$$

$$\int x^p \psi(x) \cdot dx = 0, \quad p = 0, 2, \dots, 2N - 1 \tag{3}$$

$\varphi(x)$ 在 L^2 范数条件下表现出对平滑函数的采样特性, 这一点是 $\psi(x)$ 和其它小波的尺度函数所不具有的, 利用这一特性可以对内积运算进行简化. 下面简要讨论 $[0, 1]$ 上 Coifman 区间尺度函数的构造.

$\varphi(x)$ 的二进制伸缩、平移定义为 $\varphi_{j,k}(x) \equiv 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, $\{\varphi_{j,k}(x) | j, k \in Z\}$ 是正交归一的. 由 $\varphi_{j,k}(x)$ 可以构造 $[0, 1]$ 区间左、右端点的边界基如下:

$$\chi_{j,L}^\alpha(x) \equiv \sum_{k=-4N+2}^{2N} k^\alpha \cdot \varphi_{j,k}(x)|_{[0,1]}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2N - 1 \tag{4}$$

$$\chi_{j,R}^\alpha(x) \equiv \sum_{k=2^j-4N+1}^{2^j+2N-1} k^\alpha \cdot \varphi_{j,k}(x)|_{[0,1]}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 2N - 1 \tag{5}$$

¹ 2000-05-10 收到, 2002-03-28 定稿
国家自然科学基金资助项目 (69871021)

这里下标 L, R 代表左, 右. 然后分别对 $\{\chi_{j,L}^\alpha\}, \{\chi_{j,R}^\alpha\}$ 正交归一化, 文献 [2] 提出了一种矩阵 Cholesky 分解的正交化方法, 但在实际计算中发现对于不同的 α , $\chi_{j,L}^\alpha$ 和 $\chi_{j,R}^\alpha$ 的数值相差很大, 矩阵分解的方法由于矩阵的奇异性而无法进行, 本文中仍用 Gram-Schmidt 方法对 $\{\chi_{j,L}^\alpha\}, \{\chi_{j,R}^\alpha\}$ 正交归一化. 最终, 得到了支集在 $[0, 1]$ 上的一组正交归一基, 共有 $M = 2^j - 2N$ 个:

$$\phi_{j,k} = \begin{cases} \chi_{j,L}^{k-1}, & k = 1, \dots, 2N \\ \varphi_{j,k}, & k = 2N + 1, \dots, 2^j - 4N \\ \chi_{j,R}^{k-2^j+4N-1}, & k = 2^j - 4N + 1, \dots, 2^j - 2N \end{cases} \quad (6)$$

令 $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}\}$, 可以证明 V_j 形成了 $L^2[0, 1]$ 的一个多分辨率分析.

3 电磁场积分方程的求解

下面用 Coifman 区间尺度函数 $\phi_{j,k}$ 作为展开基和权函数, 求解积分方程

$$\int f(x')K(x, x')dx' = g(x) \quad (7)$$

其中 x, x' 可以归一化在 $[0, 1]$ 区间上. 本文分别计算了二维圆柱散射的电场积分方程 (EFIE)^[3] 和对称阵子辐射的 Pocklington 方程^[4], 它们的积分核 $K(x, x')$ 分别含有柱汉开尔函数 $H_0^{(2)}(kR)$ 和自由空间的格林函数 $e^{-jkR}/(4\pi R)$, 其中 R 为场点到源点的距离. 在计算阻抗矩阵元素 z_{mn} 时, 利用 $\varphi_{j,k}$ 的消失矩可以化双重积分为单重积分或不积分. 消失矩的近似包括下面 3 种情况 (已考虑了阻抗矩阵的对称性):

$$z_{mn} = \iint K(x, x')\varphi_{j,m}(x)\varphi_{j,n}(x')dx'dx \approx 2^{-j}K\left(\frac{m}{2^j}, \frac{n}{2^j}\right) \quad (8)$$

$$z_{mn} = \iint K(x, x')\varphi_{j,m}(x)\chi_{j,R}^{n-2^j+4N-1}(x')dx'dx \approx \int 2^{-j/2}K\left(\frac{m}{2^j}, x'\right)\chi_{j,R}^{n-2^j+4N-1}(x')dx \quad (9)$$

$$z_{mn} = \iint K(x, x')\chi_{j,L}^{m-1}(x)\varphi_{j,n}(x')dx'dx \approx \int 2^{-j/2}K\left(x, \frac{n}{2^j}\right)\chi_{j,L}^{m-1}(x)dx \quad (10)$$

对于不同奇异性的积分核, 我们采用不同的消失矩近似方法: 对于二维 EFIE, 除 $m = n$ 的自阻抗元素 z_{mn} 外, 都可以应用 (8), (9), (10) 式的近似; 对于 Pocklington 方程, 由于其积分核奇异性强, 要除去双重积分中两个积分区域重叠的 z_{mn} , 才可以应用 (8), (9), (10) 式的近似. 它们的阻抗矩阵的形式如图 1 所示, 其中, 取 $j = 6, N = 2$, 黑色代表双重积分, 灰色代表单重积分, 其余为不积分.

由图 1 可见, 两者总共所需的双重积分数分别减到原来的 $(M + 4L^2 - 2L)/M^2 \approx 1/M$, $[3M(2L - 1) - 5L^2 + 7L - 2]/M^2 \approx (6L - 3)/M$, 其中矩阵的维数是 M . 尽管 Pocklington 方程的积分核奇异性很强, 采用消失矩近似后, 在保证误差不大的情况下, 仍可以有效减少双重积分的次数, 这一点在后面的算例中可以看到. 而且, 二维 EFIE 比 Pocklington 方程更能有效减少双重积分的次数, 这对于加速阻抗矩阵的填充是很有意义的.

4 计算结果

我们采用上面的方法, 计算了 TM 情况下二维理想导电圆柱散射和对称阵子的辐射, Coifman 区间尺度函数取 $j = 6, L = 4$, 生成的阻抗矩阵都是 60×60 .

圆柱散射体的 EFIE 为

$$\frac{k\eta}{4} \int_c J_s(\mathbf{r}')H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)dl' = E^i(\mathbf{r}) \quad (11)$$

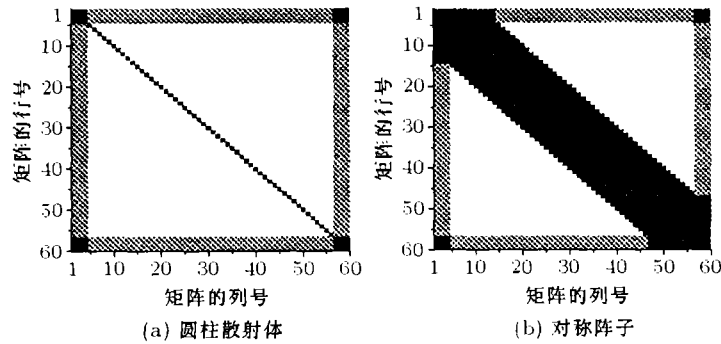


图 1 阻抗矩阵的形式

其中 $J_s(\mathbf{r}')$ 为待求感应电流, $E^i(\mathbf{r})$ 为入射电场, 散射体和入射波如图 2 所示. 图 2 比较了由脉冲基 (圆柱分为 128 段)、点选配求出的感应电流 $J_s(\mathbf{r}')$ 和雷达散射截面 (σ) 与 Coifman 区间尺度函数求出的结果. 由图可见, 两种方法的结果很吻合.

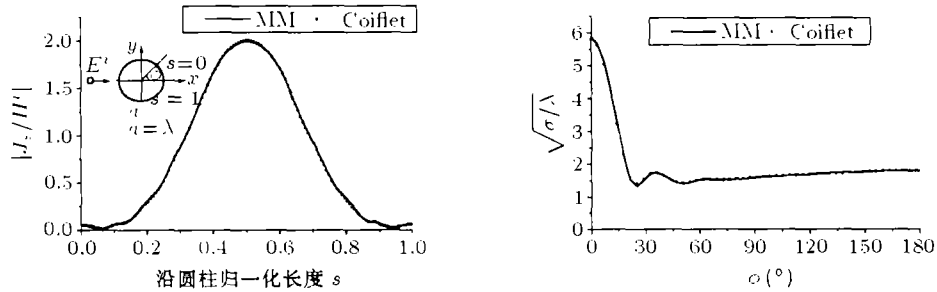


图 2 圆柱散射体的感应电流和雷达散射截面

对称阵子的 Pocklington 方程为

$$-\frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \int_{-l/2}^{l/2} J(z') [(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + k^2 R^2 a^2] \frac{e^{-jkR}}{R^5} dz' = E^i(z) \quad (12)$$

其中 $J(z')$ 为待求辐射电流, $E^i(z)$ 为 δ 电压激励源, 即 $E^i(z) = \delta(z)$, a 为对称阵子的半径, 散射体和入射波如图 3 所示. 图 3 比较了采用脉冲函数的 Galerkin 法 (对称阵子分为 127 段) 与采用 Coifman 区间尺度函数的 Galerkin 法求出的电流和归一化功率方向图, 由图 3 可见, 两种方法的误差很小. 另外需要说明的是, 由于 Pocklington 方程的积分核奇异性很强, 若采用与圆柱散射体一样的消失矩近似方法, 则会产生较大误差, 如图 4 所示. 这说明对于不同的积分核, 应采用不同的消失矩近似方法.

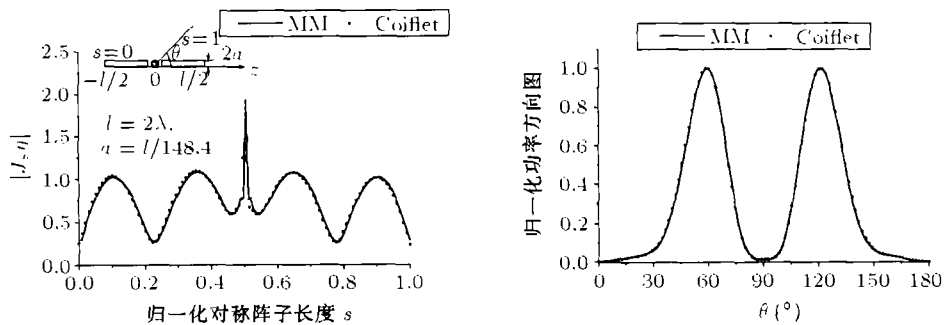


图 3 对称阵子的辐射电流和归一化功率方向图

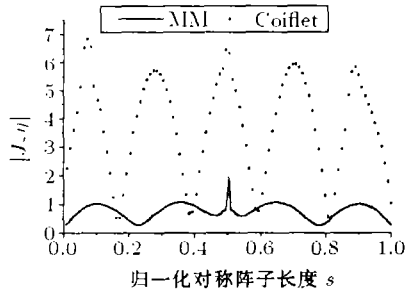


图 4 采用与圆柱散射体一样的消失矩近似方法时, 对称阵子的辐射电流

5 结论

本文用 Coifman 区间尺度函数求解二维和三维的电磁场积分方程, 利用 Coifman 尺度函数的消失矩特性减少双重积分的数量。同时对于二维和三维问题的不同积分核, 提出了不同的消失矩近似方法, 对这一方法的进一步研究对于加快 Galerkin 法的阻抗矩阵填充是很有意义的。

参 考 文 献

- [1] L. L. Schumaker, G. Webb, Recent Advances in Wavelet Analysis, Boston, Academic Press, 1994, 241-251.
- [2] Guangwen Pan, M. V. Toupikov, B. K. Gilbert, On the use of coifman intervallic wavelets in the method of moments for fast construction of wavelets sparsified matrices, IEEE Trans. on AP, 1999, AP-47(7), 1189-1200.
- [3] 哈林顿, 著, 王尔杰, 等译, 计算电磁学中的矩量法, 北京, 国防工业出版社, 1981, 49-55.
- [4] 刘其中, 宫德明, 天线的计算机辅助设计, 西安, 西安电子科技大学出版社, 1988, 86-120.

ON THE USE OF COIFMAN INTERVALLIC SCALING FUNCTIONS IN THE SOLUTION OF ELECTROMAGNETIC FIELD INTEGRAL EQUATION

Wei Xingchang Liang Changhong

(Lab. 601., Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract In this paper, Coifman intervallic scaling functions are used as basis and testing functions in the moment method solution of electromagnetic field integral equation. The number of numerical integral is reduced with the help of the vanishing moment of Coifman scaling functions. Two methods of vanishing moment approximating are proposed for integral equations with different kernels.

Key words Coifman intervallic scaling functions, Moment method, Electromagnetic field integral equation, Pocklington equation

魏兴昌: 男, 1972 年生, 博士生, 主要研究兴趣为计算微波与计算电磁学。

梁昌洪: 男, 1943 年生, 西安电子科技大学校长, 教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE Senior Member, 研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、近代数据处理、电磁散射与逆散射。