

## 基于信号共轭循环平稳特性的算法研究<sup>1</sup>

陈 辉 王永良 皮兴宇

(空军雷达学院重点实验室 武汉 430010)

**摘 要:** 该文在深入研究共轭循环平稳算法内在联系的基础上, 提出了一类基于信号共轭循环相关特性的预处理算法 (HAM, MHAM, IHAM)。这些预处理算法充分利用了共轭循环相关数据矩阵是 Hankel 矩阵的先验信息, 通过 Hankel 预处理来提高算法在低信噪比时的信号到达角估计性能。最后通过计算机仿真实验证实算法的有效性。

**关键词:** 阵列信号处理, DOA, 循环平稳

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2004)02-0213-07

## The Pre-processing Method Based on Signal Conjugate Cyclostationary

Chen Hui Wang Yong-liang Pi Xing-yu

(Key Research Lab, Radar Academy, Wuhan 430010, China)

**Abstract** This paper researches the relation of conjugate cyclostationary methods, and proposes a kind of pre-processing method of conjugate cyclic correlation. These methods make use of the information of the matrix of conjugate cyclic correlation is Hankel matrix. Therefore, pre-processing of Hankel Approximation Method (HAM) is proposed to cope with the low signal-noise ratio (SNR) situations. These methods can improve the performance of Direction-Of-Arrival (DOA), and its effectiveness are illustrated by the simulation results.

**Key words** Antenna array, Direction-Of-Arrival (DOA), Cyclostationary

### 1 引言

超分辨率空间谱估计问题一直是阵列信号处理领域内的一个研究热点, 由于其优良的超分辨率性能而被广泛应用于雷达、通信、声纳等领域。现有大多数 DOA 估计算法大多没有利用信号本身的特性, 而是直接利用各阵元间接接收信号的时间差来估计信号的到达角。随着对 DOA 估计的深入研究, 人们发现利用信号的特殊性质可以改善 DOA 估计的性能, 如信号的周期性、循环平稳性、盲高斯性等。信号的循环平稳特性最早是由 Gardner 和 Schell 等人引入到信号的 DOA 估计中, 其研究发现循环平稳性是大多数人造信号具有的普遍统计特性, 只有相同循环频率的信号之间有可能循环相关, 不同循环频率的信号循环互相关为零。正是基于循环平稳的上述特性, 人们提出了很多的基于循环平稳的 DOA 估计算法, 如循环 MUSIC(CM)<sup>[1,2]</sup>、共轭循环 MUSIC(CCM)<sup>[1,2]</sup>、循环旋转不变子空间 (Cyclic-ESPRIT)<sup>[1]</sup>、谱相关子空间拟合 (SC-SSF)<sup>[3]</sup>、广义谱相关子空间拟合 (GSC-SSF)<sup>[4]</sup> 等。利用循环平稳特性的特征结构类算法与常规的特征类算法相比, 其主要优点在于算法具有较强的噪声抑制能力和较高的分辨率<sup>[5]</sup> (特别是不同循环频率的两个或几个空间角度很近的信号), 可以实现信号的分选。当然, 利用信号的循环平稳存在一些缺点: 算法的运算量相对比较大, 对于同一循环频率的几个信号的估计性

<sup>1</sup> 2002-07-09 收到, 2002-10-17 改回

国家自然科学基金 (No:60272086)、高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划 (TRAPOYT) 资助课题

能要比常规特征类算法差。循环相关算法与共轭循环相关算法具有相同之处，即大多数循环相关算法可以直接推广到共轭相关算法中去。

本文则在深入研究信号共轭循环平稳特性的基础上，总结了各种共轭循环算法之间的内在关系，最后在分析共轭循环数据矩阵的基础上提出了 Hankel 近似算法 (HAM)、修正的 Hankel 近似算法 (MHAM) 及迭代的 Hankel 近似算法 (IHAM) 等 3 种基于 Hankel 矩阵的修正算法。算法充分利用共轭循环矩阵的 Hankel 特性来改善低信噪比时的 DOA 估计性能，与 CCM 算法相比，本文的预处理算法有较低的估计方差、较高的成功估计概率和低信噪比情况下较低的估计偏差。本文的结构组成如下：第 2 节为信号的共轭循环平稳特性；第 3 节为典型的共轭循环平稳算法之间的关系；第 4 节为本文提出的新算法；文章的最后通过大量的计算机仿真来验证算法的可行性，并给出相关结论。

## 2 信号的共轭循环平稳

对于一个随机过程，如果存在一个循环频率，其共轭循环自相关函数<sup>[3,6]</sup>：

$$\hat{R}_{xx^*}^{\alpha}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\alpha t} dt \quad (1)$$

不等于零，则我们称  $x(t)$  具有共轭循环平稳特性。同样，对于二个随机过程  $x(t)$  和  $y(t)$ ，则它们的共轭循环互相关函数为

$$R_{xy^*}^{\alpha}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\pi\alpha t} dt \quad (2)$$

从上述的定义中可知当  $\alpha = 0$  时，式 (2) 定义的共轭循环自相关函数就是平稳信号的共轭相关函数，如果  $R_{xx^*}^0(\tau)$  或  $R_{xy^*}^0(\tau)$  存在，而对任意不为零的  $\alpha$  有  $R_{xx^*}^{\alpha}(\tau) = 0$  或  $R_{xy^*}^{\alpha}(\tau) = 0$ ，则信号为平稳信号；但至少有一个非零的  $\alpha$  有  $R_{xx^*}^{\alpha}(\tau) \neq 0$  或  $R_{xy^*}^{\alpha}(\tau) \neq 0$ ，信号才是共轭循环平稳信号，且对应的  $\alpha$  就是其循环频率。对于离散序列而言，我们通常采用下式来计算共轭循环互相关函数<sup>[6]</sup>：

$$R_{xy^*}^{\alpha}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\tau} x(n+\tau)y(n)e^{-j2\pi\alpha n}, \quad \tau \geq 0 \quad (3a)$$

$$R_{xy^*}^{\alpha}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\tau}^{N-1} x(n+\tau)y(n)e^{-j2\pi\alpha n}, \quad \tau < 0 \quad (3b)$$

由文献 [1] 中的阵列模型可知，假设空间阵列为  $M$  个阵元，间距为  $d$  的等距均匀线阵，入射的空间窄带信号有  $N$  个，方向为  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ ，则第  $i$  个阵元上的接收数据为

$$x_i = \sum_{n=1}^N s_n(t - \tau_{in}) + n_i(t) \quad (4)$$

其中  $\tau_{in}$  表示第  $n$  个信号入射到第  $i$  阵元上相对参考阵元的延迟， $\tau_{in} = (i-1)d \sin \theta_n / c$ ， $c$  为光速。

由共轭循环互相关的定义 (并假设信号是循环独立的) 及阵元接收数据可得第  $p$  个阵元和第  $q$  个阵元上接收数据的循环互相关函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{x_p x_q^*}^\alpha(\tau) &\approx \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_{s_n s_n^*}^\alpha(\tau) e^{-j\pi\alpha(\tau_{pn} + \tau_{qn})} e^{-j2\pi f_0(\tau_{pn} + \tau_{qn})} \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_{s_n s_n^*}^\alpha(\tau) e^{-j\pi(2f_0 + \alpha)(p+q-2)\tau_n} \end{aligned} \quad (5)$$

上式的推导过程中利用了文献 [3] 定理 1 的性质, 如果共轭循环互相关直接套用下式信号窄带假设:

$$s_i(t - \tau_{pk}) = s_i(t - (p-1)\tau_k) \approx s_i(t) e^{-j\omega_0(p-1)\tau_k} \quad (6)$$

则  $x_p(t)$  和  $x_q(t)$  的共轭循环互相关可以简化为

$$\mathbf{R}_{x_p x_q^*}^\alpha(\tau) \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_{s_n s_n^*}^\alpha(\tau) e^{-j2\pi f_0(p+q-2)\tau_n} \quad (7)$$

显然, 当  $f_0 \gg \alpha$  时, 式 (5) 与式 (7) 近似相等, 但无论采用哪个等式它们的区别就是指数项的频率不同, 所以它们都可以归结为下式:

$$\mathbf{R}_{x_p x_q^*}^\alpha(\tau) \approx \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_{s_n s_n^*}^\alpha(\tau) e^{-j2\pi f(p+q-2)\tau_n} = r^\alpha(p+q-2, \tau) \quad (8)$$

当  $f = f_0$  时上式就是式 (7), 当  $f = f_0 + \alpha/2$  时上式就是式 (5)。

### 3 共轭循环平稳算法

由式 (8) 可知, 如果我们用  $\mathbf{R}_{x_p x_q^*}^\alpha(\tau)$  定义如下一个 ( $p$  和  $q$ ) 与  $\tau$  的组合列矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^\alpha(\tau) &= [\mathbf{R}_{x_1 x_1}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{x_1 x_2}^\alpha(\tau), \dots, \mathbf{R}_{x_1 x_M}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{x_2 x_1}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{x_2 x_2}^\alpha(\tau), \dots, \mathbf{R}_{x_2 x_M}^\alpha(\tau), \\ &\quad \dots, \mathbf{R}_{x_M x_1}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{x_M x_2}^\alpha(\tau), \dots, \mathbf{R}_{x_M x_M}^\alpha(\tau)]^T \end{aligned} \quad (9)$$

则上式可以进一步简化为

$$\mathbf{R}_1^\alpha(\tau) = \mathbf{A}_1^\alpha \mathbf{R}_s^\alpha(\tau) \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_1^\alpha = [\mathbf{a}_1^\alpha(\theta_1), \mathbf{a}_1^\alpha(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_1^\alpha(\theta_N)]$$

$$\mathbf{a}_1^\alpha(\theta) = [1, e^{-j2\pi f[1+1-2]\tau_n}, \dots, e^{-j2\pi f[M+M-2]\tau_n}]^T = \mathbf{a}_0^\alpha(\theta) \otimes \mathbf{a}_0^\alpha(\theta)$$

$$\mathbf{R}_s^\alpha(\tau) = [\mathbf{R}_{s_1 s_1}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{s_2 s_2}^\alpha(\tau), \dots, \mathbf{R}_{s_N s_N}^\alpha(\tau)]^T$$

$$\mathbf{a}_0^\alpha(\theta, f) = [1, e^{-j2\pi f\tau_n}, e^{-j2\pi f2\tau_n}, \dots, e^{-j2\pi f(M-1)\tau_n}]^T$$

其中 “ $\otimes$ ” 表示 Kronecker 积。

显然, 当  $f = f_0 + \alpha/2$  时, 式 (10) 就是 GSC-SSF<sup>[4]</sup> 算法的共轭循环形式。如果式 (9) 中我们只取  $p = q$  的项, 则有

$$\mathbf{R}_2^\alpha(\tau) = [\mathbf{R}_{x_1 x_1}^\alpha(\tau), \mathbf{R}_{x_2 x_2}^\alpha(\tau), \dots, \mathbf{R}_{x_M x_M}^\alpha(\tau)]^T \quad (11)$$

则在  $f = f_0 + \alpha/2$  时, 上式可以进一步简化为

$$\mathbf{R}_2^\alpha(\tau) = \mathbf{A}_2^\alpha \mathbf{R}_s^\alpha(\tau) \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2^\alpha &= [\mathbf{a}_2^\alpha(\theta_1), \mathbf{a}_2^\alpha(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_2^\alpha(\theta_N)] \\ \mathbf{a}_2^\alpha(\theta) &= [1, e^{-j2\pi(2f_0+\alpha)\tau_n}, \dots, e^{-j2\pi(2f_0+\alpha)(M-1)\tau_n}]^T = \mathbf{a}_0^\alpha(\theta, 2f_0 + \alpha) \end{aligned}$$

显然上式即是文献 [3] 中 SC-SSF 算法的共轭循环表达形式。

如果我们用  $\mathbf{R}_{x_p x_q}^\alpha(\tau)$  定义如下一个矩阵  $\mathbf{R}_3(p, q)$ , 且令  $f = f_0$  则有

$$\mathbf{R}_3(\tau) = \mathbf{A}_3^\alpha \mathbf{R}_s^\alpha(\tau) (\mathbf{A}_3^\alpha)^H \quad (13)$$

式中  $\mathbf{R}_s^\alpha(\tau)$  为一矩阵, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3^\alpha &= [\mathbf{a}_3^\alpha(\theta_1), \mathbf{a}_3^\alpha(\theta_2), \dots, \mathbf{a}_3^\alpha(\theta_N)] \\ \mathbf{a}_3^\alpha(\theta) &= [1, e^{-j2\pi f \tau_n}, \dots, e^{-j2\pi f (M-1)\tau_n}]^T = \mathbf{a}_0^\alpha(\theta, f_0) \end{aligned}$$

则如果对式 (13) 中的各离散点取平均, 则可以得到上式就是文献 [1, 2] 中的共轭循环 MUSIC 算法 (CCM)。

以上的分析表明, 典型的共轭循环相关算法之间存在如图 1 所示的关系:

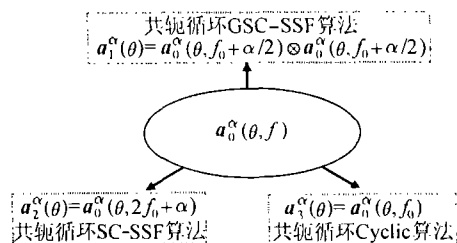


图 1 共轭循环算法之间的关系

#### 4 Hankel 类修正算法

由上一节的 CCM 算法可知, 式 (13) 就是由  $\mathbf{R}_{x_p x_q}^\alpha(\tau)$ , 按行变量 ( $p$  或  $q$ ) 和列变量 ( $q$  或  $p$ ) 组成的, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3(\tau) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x_1 x_1}^\alpha(\tau) & \cdots & \mathbf{R}_{x_1 x_{M-1}}^\alpha(\tau) & \mathbf{R}_{x_1 x_M}^\alpha(\tau) \\ \mathbf{R}_{x_2 x_1}^\alpha(\tau) & \cdots & \mathbf{R}_{x_2 x_{M-1}}^\alpha(\tau) & \mathbf{R}_{x_2 x_M}^\alpha(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_{x_M x_1}^\alpha(\tau) & \cdots & \mathbf{R}_{x_M x_{M-1}}^\alpha(\tau) & \mathbf{R}_{x_M x_M}^\alpha(\tau) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^\alpha(0, \tau) & \cdots & r^\alpha(M-2, \tau) & r^\alpha(M-1, \tau) \\ r^\alpha(1, \tau) & \cdots & r^\alpha(M-1, \tau) & r^\alpha(M, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r^\alpha(M-1, \tau) & \cdots & r^\alpha(2M-3, \tau) & r^\alpha(2M-2, \tau) \end{bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

上式充分说明, 在理想情况下共轭循环算法形成的数据矩阵具有标准的 Hankel 矩阵形式, 而且上式对于  $f = f_0$  或  $f = f_0 + \alpha/2$  时均成立。但对于低信噪比及当阵元存在幅相误差时这种 Hankel 矩阵的形式往往会被破坏, 从而造成算法的估计性能下降。正是基于理想情况下数据矩阵具有 Hankel 矩阵形式这个先验信息, 我们提出利用通过 Hankel 预处理使得矩阵接近真实的数据协方差阵, 即

$$\min_{\mathbf{R}_H \in \mathcal{S}_H} |\mathbf{R}_H - \mathbf{R}(\alpha)| \quad (15)$$

这里  $\mathcal{S}_H$  是 Hankel 矩阵集。下面介绍几种 Hankel 预处理方法:

#### 4.1 Hankel 近似方法 (HAM)

HAM 方法的实质, 就是对数据矩阵  $\mathbf{R}(\alpha)$  的反对角线上的元素进行平均。可归结为如下两式:

$$\hat{r}_H(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{r}_{i(n+2-i)}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (16a)$$

$$\hat{r}_H(n) = \frac{1}{2M-n-1} \sum_{i=n-M+2}^M \hat{r}_{i(n+2-i)}, \quad M < n \leq 2M-2 \quad (16b)$$

其中  $M$  为阵元数,  $\hat{r}_{ij}$  为  $\mathbf{R}(\alpha)$  的元素。而  $\hat{\mathbf{R}}_H$  的元素  $\hat{r}_{Hij} = \hat{r}_H(|i-j|)$ 。

#### 4.2 修正的 Hankel 方法 (MHAM)

修正的 MAHM1 方法的思想, 就是对数据矩阵  $\mathbf{R}(\alpha)$  反对角线上的元素相位进行平均, 而幅度不变, 即

$$\hat{\varphi}_H(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{\varphi}_{i(n+2-i)}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (17a)$$

$$\hat{\varphi}_H(n) = \frac{1}{2M-n-1} \sum_{i=n-M+2}^M \hat{\varphi}_{i(n+2-i)}, \quad M < n \leq 2M-2 \quad (17b)$$

式中的  $\hat{\varphi}_{ij}$  为数据矩阵  $\mathbf{R}(\alpha)$  第  $i$  行  $j$  列元素相位。

修正的 MAHM2 方法的思想, 就是对数据矩阵  $\mathbf{R}(\alpha)$  反对角线上的元素幅度进行平均, 而相位不变。

#### 4.3 迭代的 Hankel(IHAM) 方法

迭代过程如下:

$$\hat{\mathbf{R}}_H^{(i+1)} = H[\hat{\mathbf{R}}_E^{(i)}], \quad \hat{\mathbf{R}}_E^{(i+1)} = \overline{E}[\hat{\mathbf{R}}_H^{(i+1)}] \quad (18a)$$

$H[\ ]$  表示 Hankel 化, 而  $\hat{\mathbf{R}}_E$  表示如下:

$$\hat{\mathbf{R}}_E = \overline{E}[\mathbf{R}] = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H + \lambda_{av} \sum_{m=M+1}^N \mathbf{e}_m \mathbf{e}_m^H \quad (18b)$$

$\lambda_{av}$  表示小特征值的平均, 初始值为  $\hat{\mathbf{R}}_E^0 = \hat{\mathbf{R}}(\alpha)$ 。当然迭代过程中的某一步可以是 HAM 或 MHAM 算法中的一种。

## 5 仿真分析

本节我们通过计算机仿真实验来验证 HAM, MHAM(实验中只采用 MHAM1 算法) 算法的预处理性能, 算法预处理之后, 采用式 (13) 或式 (14) 所示的共轭循环平稳 MUSIC 算法 (CCM)。实验针对 8 阵元均匀线阵, 阵元间距为半波长, 数据快拍数 500, 实验中有 2 个具有相同循环频率的信号, 信号入射方向为  $20^\circ$  和  $30^\circ$ , 每个数据进行 100 次的独立实验。

实验分 2 个, 实验 1 是考虑信号源间相互独立时的 Hankel 预处理性能, 图 2(a) 为信噪比与成功概率的关系, 图 2(b) 为信噪比与估计偏差之间的关系, 图 2(c) 为信噪比与估计方差之间的关系; 实验 2 是考虑预处理算法性能与信号相关度之间的关系, 图 3 为两信号源的相关度为 0.2 时的性能比较, 其中图 3(a) 为 HAM 及 MHAM 算法估计偏差与信噪比的关系, 图 3(b) 为估计方差与信噪比的关系; 图 4 为两信号源的相关度为 0.5 时的性能比较, 其中图 4(a) 为 HAM 及 MHAM 算法估计偏差与信噪比的关系, 图 4(b) 为估计方差与信噪比的关系。

从仿真实验中可以看出, Hankel 预处理算法相对常规共轭循环处理算法具有低的估计方差、较高的成功估计概率, 在信号源完全独立时其估计偏差也比常规算法要小。但当信号源相关时, 预处理算法的估计偏差在信噪比较高时比常规算法反而差, 但在信噪比较低时其性能还是优于常规的共轭循环处理算法, 这主要是由于信号源相关时破坏了矩阵的 Hankel 特性引起的。

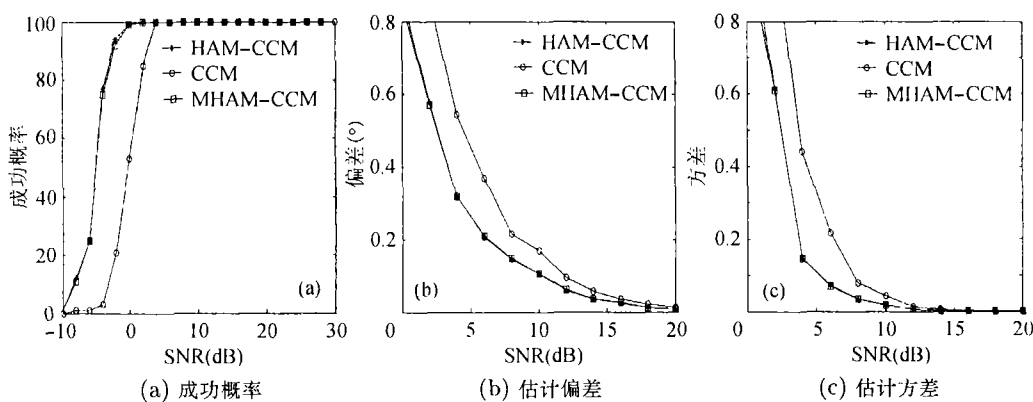


图 2 Hankel 预处理算法性能, 信号源独立

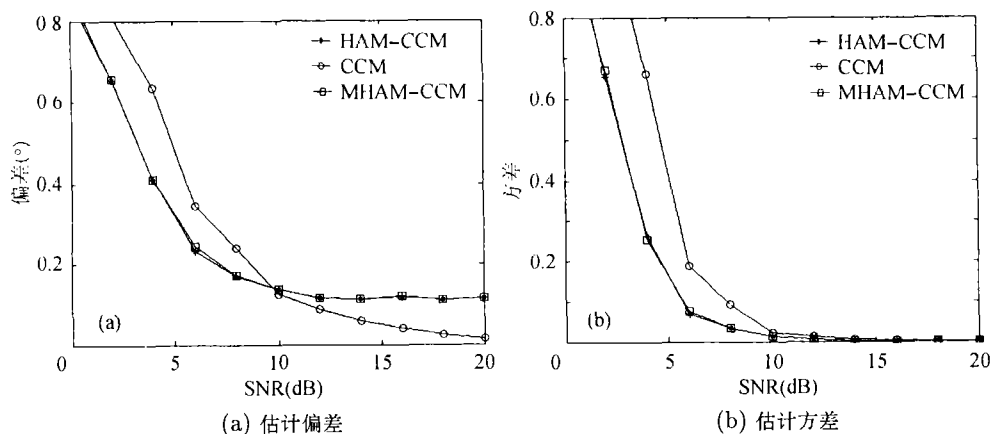


图 3 Hankel 预处理算法性能, 信号源相关系数 0.2

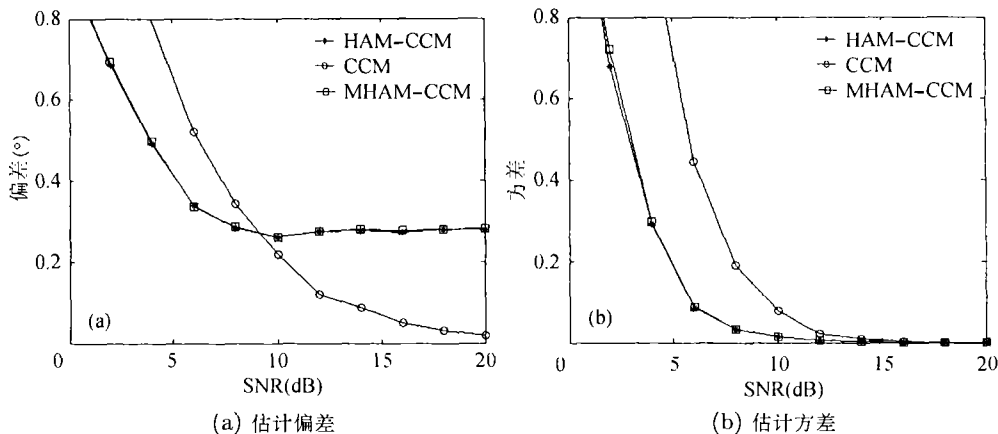


图 4 Hankel 预处理算法性能, 信号源相关系数 0.5

## 6 结论

本文首先分析了共轭循环平稳算法之间的内在联系, 其实质就是共轭循环相关数据的在特殊频率下的不同组合方式, 这个内在联系同样适用于循环平稳算法。然后在分析共轭循环相关矩阵的基础上提出了一类基于 Hankel 矩阵的预处理算法, 仿真实验证明了这类算法在低信噪比时具有较高的成功估计概率、较低的估计方差及偏差。

## 参 考 文 献

- [1] Gardner W A. Simplification of MUSIC and ESPRIT by exploitation of cyclostationarity[J]. *Proc. IEEE*, 1988, 76(7): 845-847.
- [2] Schell S V, Calabretta R A, Gardner W A, Agee B G. Cyclic MUSIC algorithms for signal-selective direction finding[C]. *Proceeding of ICASSP*, Scotland, 1989, (4): 2278-2281.
- [3] Xu G, Kailath T. Direction-of-arrival estimation via exploitation cyclostationarity—a combination of temporal and spatial processing[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, SP-40(7): 1775-1786.
- [4] 金梁, 殷勤业, 汪仪林. 广义谱相关子空间拟合 DOA 估计原理 [J]. *电子学报*, 2000, 28(1): 60-63.
- [5] Schell S V. Performance analysis of the cyclic MUSIC method of direction estimation for cyclostationary signals[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, SP-42(11): 3043-3050.
- [6] Schell S V. Asymptotic moments of estimated cyclic correlation matrices[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, SP-43(1): 173-180.

陈 辉: 男, 1974 年生, 讲师, 硕士, 已发表论文 10 多篇。主要研究领域: 超分辨谱估计、阵列信号处理。  
 王永良: 男, 1965 年生, 教授, 博士, 获全国优秀青年教师奖, 中国优秀博士后奖, 空军中青年高科技拔尖人才, 中国电子学会无线电分会委员, 已发表论文 100 余篇。曾获省部级科技进步一等奖、二等奖各一项。主要研究领域为: 雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理等。  
 皮新宇: 男, 1978 年生, 硕士生, 主要研究领域: 超分辨谱估计。