

电磁波对导体绕射问题的渐近解*

盖秉政

(哈尔滨工业大学)

提 要

本文应用萨温 (Г. Н. Савин) 扰动形式的映射函数处理电磁波绕射导体的二维问题。提出了渐近求解这一问题的一般方法及相应的渐近公式,特别是基于圆柱形导体的渐近,文中给出了“0”级及“1”级渐近解的具体算式。

一、引 言

在文献[1]中我们提出了求解电磁波绕射完全导体二维问题的一般方法,通常它归结为对无穷代数方程组的求解。然而在许多情况下,我们可以不必解这样的无穷方程组,而将问题化为一系列早已熟知的问题的求解上。例如对于接近椭圆柱的导体,可化为一系列椭圆柱导体的求解;对于接近圆柱的导体,可化为一系列圆柱导体的求解,而椭圆柱导体的解可用马蒂厄(Mathieu)函数表示,圆柱导体的解可用贝塞尔(Bessel)函数表示,这些解是早已充分研究过的了。

二、基本关系

E 波问题

总波场:
$$E_z = E_z^i + E_z^{i**}; \quad (1)$$

波方程:
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \mathcal{Q}'(\eta) \overline{\mathcal{Q}'(\eta)} E_z = 0; \quad (2)$$

边界条件:
$$E_z|_{\text{壁}} = 0; \quad (3)$$

辐射条件:
$$\left. \begin{aligned} E_z^i &= O(|\eta|^{-1/2}), \\ \frac{\partial E_z^i}{\partial |\eta|} + ikE_z^i &= o(|\eta|^{-1/2}); \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

电流分布:
$$I_z = \frac{i}{\mu\omega|\eta||\mathcal{Q}(\eta)|} \left(\eta \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + \bar{\eta} \frac{\partial E_z}{\partial \bar{\eta}} \right). \quad (5)$$

H 波问题

总波场:
$$H_z = H_z^i + H_z^i; \quad (6)$$

* 1984年10月11日收到,1984年12月27日修改定稿。

** 为简单起见,本文把文献[1]中的“*”全部去掉。

$$\text{波方程: } \frac{\partial^2 H_z}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 Q(\eta) \overline{Q(\eta)} H_z = 0; \quad (7)$$

$$\text{边界条件: } \left(\eta \frac{\partial H_z}{\partial \eta} + \bar{\eta} \frac{\partial H_z}{\partial \bar{\eta}} \right) \Big|_{\text{边}} = 0; \quad (8)$$

$$\text{辐射条件: } \left. \begin{aligned} H_z &= o(|\eta|^{-1/2}), \\ \frac{\partial H_z}{\partial |\eta|} + ikH_z &= o(|\eta|^{-1/2}); \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{电流分布: } I_z = H_z; \quad (10)$$

式中 E_z^i, H_z^i 分别为 E 波及 H 波的人射波场; E_z^s, H_z^s 分别为 E 波及 H 波的散射波场; $k = \frac{\omega}{c}$, ω 为电磁波的圆频率; c 为介质中的电磁波速; $Q(\eta)$ 为映射函数; μ 为介质的磁率; $\eta = \rho e^{i\theta}$ 为映射平面坐标 (ρ 为矢径, θ 为极角); I_z, I_z 分别为 E 波及 H 波入射时导体表面上的电流分布。

三、渐近边界条件

引入萨温形式的扰动映射函数^[2]:

$$Q(\eta) = \Pi(\eta)(1 + \varepsilon E(\eta)), \quad (11)$$

它把取决于 $Q(\eta)$ 的任意形柱状导体转化为由 $\Pi(\eta)$ 描述的标准形柱状导体(例如椭圆柱导体,圆柱导体等),其中 ε 是个小参数。令

$$E_z = E_{z0} + \varepsilon E_{z1} + \varepsilon^2 E_{z2} + \dots, \quad (12)$$

把(12)式代入(3)式,并使等式两边 ε 的同次幂的系数相等,则有:

$$E_{z0}|_{\text{边}} = 0, E_{z1}|_{\text{边}} = 0, E_{z2}|_{\text{边}} = 0, \dots \quad (13)$$

(13)式即是 E 波问题的渐近边界条件。

四、解的渐近表示

散射波场可表示为:

$$E_z^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(1)}(k|Q(\eta)|) \left(\frac{Q(\eta)}{|Q(\eta)|} \right)^n, \quad (14)$$

它满足波方程(2)及辐射条件(4)式。式中 $H_n^{(1)}$ 是第一类 n 阶汉克尔(Hankel)函数; c_n 是待定常数,它们将由导体表面上的边界条件确定。令

$$c_n = c_{n0} + \varepsilon c_{n1} + \varepsilon^2 c_{n2} + \dots, \quad (15)$$

把(11), (15)式代入(14)式,得 E_z^s 的各级渐近解为:

$$\left. \begin{aligned} E_{z0}^s &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n0} V_0^s \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ E_{z1}^s &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{n1} V_0^s + c_{n0} V_1^s) \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ E_{z2}^s &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{n2} V_0^s + c_{n1} V_1^s + c_{n0} V_2^s) \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} V_0^i &= f_0[H_n^{(1)}(k|\Pi(\eta)|)], \\ V_1^i &= f_1[H_{n-1}^{(1)}(k|\Pi(\eta)|), H_n^{(1)}(k|\Pi(\eta)|)], \\ V_2^i &= f_2[H_{n-2}^{(1)}(k|\Pi(\eta)|), H_{n-1}^{(1)}(k|\Pi(\eta)|), H_n^{(1)}(k|\Pi(\eta)|)], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

而 f_0, f_1, f_2, \dots 表示如下函数:

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= x, \\ f_1(x, y) &= \frac{1}{2} k|\Pi(\eta)|(\mathcal{E}(\eta) + \overline{\mathcal{E}(\eta)})x - n\mathcal{E}(\eta)y, \\ f_2(x, y, z) &= \frac{1}{2} k|\Pi(\eta)| \left\{ \frac{1}{2} k|\Pi(\eta)|(\mathcal{E}(\eta) + \overline{\mathcal{E}(\eta)})x \right. \\ &\quad + \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right)\mathcal{E}^2(\eta) + \left(1 - \frac{3}{2}n\right)\overline{\mathcal{E}^2(\eta)} + 2(n-2)x \right. \\ &\quad \times |\mathcal{E}(\eta)|^2 \Big] y + \frac{1}{k|\Pi(\eta)|} \left[-(1+n^2)\mathcal{E}^2(\eta) + (n-1) \right. \\ &\quad \times \overline{\mathcal{E}^2(\eta)} + \left. \left. \left(\frac{3}{2} - n(n+3)\right)|\mathcal{E}(\eta)|^2 \right] z \right\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

对入射波场, 我们取

$$\begin{aligned} E_z^i &= E_0 e^{ik|\mathcal{Q}(\eta)|\cos(\theta-\xi)} \\ &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k|\mathcal{Q}(\eta)|) e^{-in\xi} \left(\frac{\mathcal{Q}(\eta)}{|\mathcal{Q}(\eta)|} \right)^n, \end{aligned} \quad (19)$$

它表示来波攻角为 ξ 的 E 波, 它亦满足稳态波方程 (2). 式中 J_n 为 n 阶贝塞尔函数, E_0 为入射 E 波的振幅.

(19) 式的各级渐近函数为:

$$\left. \begin{aligned} E_{z_0}^i &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\xi} V_0^i \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ E_{z_1}^i &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\xi} V_1^i \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ E_{z_2}^i &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\xi} V_2^i \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} V_0^i &= f_0[J_n(k|\Pi(\eta)|)], \\ V_1^i &= f_1[J_{n-1}(k|\Pi(\eta)|), J_n(k|\Pi(\eta)|)], \\ V_2^i &= f_2[J_{n-2}(k|\Pi(\eta)|), J_{n-1}(k|\Pi(\eta)|), J_n(k|\Pi(\eta)|)], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

从 (16), (20) 式我们得到总的各级渐近波场为:

$$\left. \begin{aligned}
 E_{z0} &= E_{z0}^i + E_{z0}^r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n E_0 e^{-in\xi} V_0^i + e_{n0} V_0^r] \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\
 E_{z1} &= E_{z1}^i + E_{z1}^r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n E_0 e^{-in\xi} V_1^i + e_{n1} V_0^r + e_{n0} V_1^r] \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\
 E_{z2} &= E_{z2}^i + E_{z2}^r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n E_0 e^{-in\xi} V_2^i + e_{n2} V_0^r + e_{n1} V_1^r + e_{n0} V_2^r] \left(\frac{\Pi(\eta)}{|\Pi(\eta)|} \right)^n, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (22)$$

从(13),(22)式可以看出只要入射波场给定,则各级渐近解的系数($e_{n0}, e_{n1}, e_{n2}, \dots$)便可逐一地求解出来。

五、基于圆柱导体的渐近解

近于圆柱的导体是常见的,对它的研究将更具有实际意义。这种导体的映射函数依(11)式可具体地写为:

$$\Omega(\eta) = R\eta \left(1 + \varepsilon \frac{1}{\eta^{m+1}} \right), \tag{23}$$

式中 R, m, ε 分别为决定导体边界大小、形状以及与圆边界偏差的常数。

从(23)式,我们有:

$$\Pi(\eta) = R\eta, \quad \Xi(\eta) = \frac{1}{\eta^{m+1}}. \tag{24}$$

把(22)式代入(13)式,并注意到在边界上 $\eta = A \equiv e^{i\theta}$ 及(18)式,可得:

$$e_{nl} = c_{nl} / A, \tag{25}$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 A &= H_n^{(1)}(kR), \\
 c_{n0} &= -i^n E_0 e^{-in\xi} J_n(kR), \\
 c_{n1} &= -\frac{1}{2} kR [e_{(n-m-1)0} H_{n-m-2}^{(1)}(kR) + e_{(n+m+1)0} H_{n+m}^{(1)}(kR) \\
 &\quad - \frac{1}{2} kR E_0 [i^{(n-m-1)} e^{-i(n-m-1)\xi} J_{n-m-2}(kR) \\
 &\quad + i^{(n+m+1)} e^{-i(n+m+1)\xi} J_{n+m}(kR)] + (n+m+1) \\
 &\quad \times e_{(n+m+1)0} H_{n+m+1}^{(1)}(kR) + (n+m+1) i^{(n+m+1)} E_0 \\
 &\quad \times e^{-i(n+m+1)\xi} J_{n+m+1}(kR), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (26)$$

于是从(12)式我们得到总波场的各级渐近解为:

$$\left. \begin{aligned}
 E_z = E_{z0} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n E_0 e^{-in\xi} J_n(k|\Omega(\eta)|) + e_{n0} \\
 &\quad \times H_n^{(1)}(k|\Omega(\eta)|)] \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^n, \text{ (“0”级渐近解);} \\
 E_z = E_{z0} + \varepsilon E_{z1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n E_0 e^{-in\xi} J_n(k|\Omega(\eta)|) + (e_{n0} \\
 &\quad + \varepsilon e_{n1}) H_n^{(1)}(k|\Omega(\eta)|)] \left(\frac{\Omega(\eta)}{|\Omega(\eta)|} \right)^n, \text{ (“1”级渐近解)}
 \end{aligned} \right\} (27)$$

依(5), (27)式, 可得导体表面上的电流分布为:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{ik}{2\mu\omega|\mathcal{Q}'(\Lambda)|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ i^n E_0 e^{-in\xi} \left[\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda) J_{n-1}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n-1} - \overline{\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda)} J_{n+1}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n+1} \right] \right. \\
 &\quad + e_{n0} \left[\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda) H_{n-1}^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n-1} - \overline{\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left. H_{n+1}^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n+1} \right] \right\}, \text{ ("0" 级渐近解);} \\
 I_z &= \frac{ik}{2\mu\omega|\mathcal{Q}'(\Lambda)|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ i^n E_0 e^{-in\xi} \left(\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda) J_{n-1}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n-1} - \overline{\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda)} J_{n+1}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n+1} \right) \right. \\
 &\quad + (e_{n0} + \varepsilon e_{n1}) \left[\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda) H_{n-1}^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \overline{\Lambda \mathcal{Q}'(\Lambda)} H_{n+1}^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^{n+1} \right] \right\}, \text{ ("1" 级渐近解).}
 \end{aligned} \tag{28}$$

对于H波问题, 用与上述完全相同的步骤, 不难求得:

$$\begin{aligned}
 I_t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n H_0 e^{-in\xi} J_n(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) + h_{n0} H_n^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|)] \\
 &\quad \times \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^n, \text{ ("0" 级渐近解);} \\
 I_t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [i^n H_0 e^{-in\xi} J_n(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|) + (h_{n0} + \varepsilon h_{n1}) H_n^{(1)}(k|\mathcal{Q}(\Lambda)|)] \\
 &\quad \times \left(\frac{\mathcal{Q}(\Lambda)}{|\mathcal{Q}(\Lambda)|} \right)^n, \text{ ("1" 级渐近解);}
 \end{aligned} \tag{29}$$

式中,

$$\begin{aligned}
 h_{n1} &= N_{n1}/M; \\
 M &= \frac{1}{2} kR [H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)], \\
 N_{n0} &= -\frac{1}{2} kR i^n H_0 e^{-in\xi} [J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)], \\
 N_{n1} &= -\left\{ \frac{1}{2} i^{(n+m+1)} H_0 e^{-i(n+m+1)\xi} kR \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} kR J_{n+m-1}(kR) - m J_{n+m}(kR) \right] + \frac{1}{2} \\
 &\quad \times i^{(n-m-1)} H_0 e^{-i(n-m-1)\xi} kR [(1-n) \\
 &\quad \times J_{n-m-2}(kR) + \left(\frac{2}{kR} (n-m-1)(m+1) - \frac{1}{2} kR \right) \\
 &\quad \times J_{n-m-1}(kR)] + (n-m-1) J_{n-m}(kR) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} i^{n-m} H_0 e^{-i(n-m)\xi} k^2 R^2 J_{n-m-2}(kR) \right\}
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4} i^{(n-m-1)} H_0 e^{-i(n+m-1)\xi} k^2 R^2 J_{n+m-1}(kR) \\
 & + \frac{1}{2} h_{(n+m+1)0} kR \left[\frac{1}{2} kR H_{n+m-1}^{(1)}(kR) - m \right. \\
 & \times H_{n+m}^{(1)}(kR) \left. \right] + \frac{1}{2} h_{(n-m-1)0} kR \left[(1-n) \right. \\
 & \times H_{n-m-2}^{(1)}(kR) + \left(\frac{2}{kR} (n-m-1)(m+1) - \frac{1}{2} kR \right) \\
 & \times H_{n-m-1}^{(1)}(kR) \left. \right] + (n-m-1) H_{n-m}^{(1)}(kR) \\
 & + \frac{1}{4} h_{(n-m)0} k^2 R^2 H_{n-m-2}^{(1)}(kR) - \frac{1}{4} h_{(n+m-1)0} \\
 & \times k^2 R^2 H_{n+m-1}^{(1)}(kR) \Big\},
 \end{aligned}$$

H_0 为入射 H 波的振幅。

六、具体数值算例

为了说明上述结果的正确性,下面我们举几个具体数值例题,它们均精确到“1”级近似。

例 1 电磁波对方截面柱形导体的绕射。

此时, $R = 0.6, m = 4, \varepsilon = -\frac{1}{6}$ 。 E 波及 H 波入射时导体表面上的电流分布如图 1 及图 2 所示。

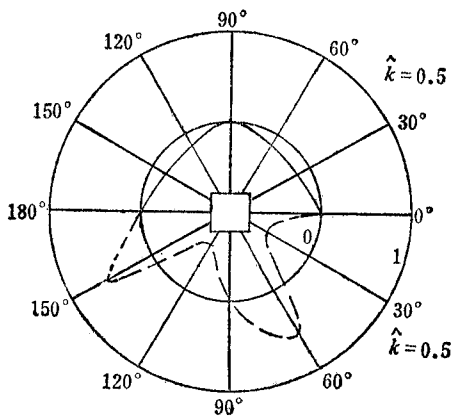


图 1 $i_s-\theta$ 图 (E 波入射时正方形截面导体表面上电流角分布的“1”级渐近解 (28) 式) (来波方向平行于正方形的边由 0° 指向 180°)

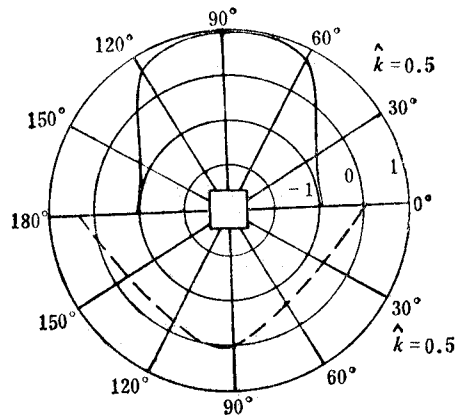


图 2 $i_s-\theta$ 图 (H 波入射时正方形截面导体表面上电流角分布的“1”级渐近解 (29) 式) (来波方向平行于正方形的边, 由 0° 指向 180°)

例 2 电磁波对正三角形截面柱形导体的绕射。

此时, $R = 0.4330; m = 3; \varepsilon = \frac{1}{3}$ 。 E 波入射时导体表面上的电流分布如图 3 所示。电流与波数间的关系如图 4 所示。

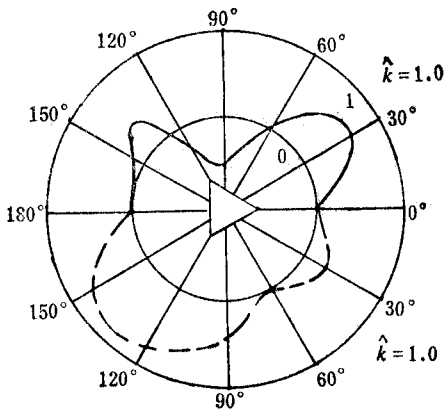


图3 $i_z-\theta$ 图 (E 波入射时正三角形截面导体表面上电流角分布“1”级渐近解(28)式)(来波方向沿正三角形的一条高线由 0° 指向 180°)

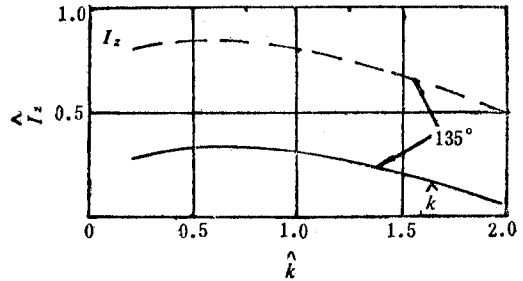


图4 $i_z-\hat{k}$ 曲线(E 波入射时正三角形截面导体表面电流与波数间关系的“1”级渐近解(28)式)。(来波方向沿正三角形的一条高线由 0° 指向 180°)

例 3 电磁波对正五边形截面柱形导体的绕射。

此时, $R = 0.5618$, $m = 5$; $\epsilon = \frac{1}{10}$. E 波入射时导体表面上的电流分布如图5所示。

示。

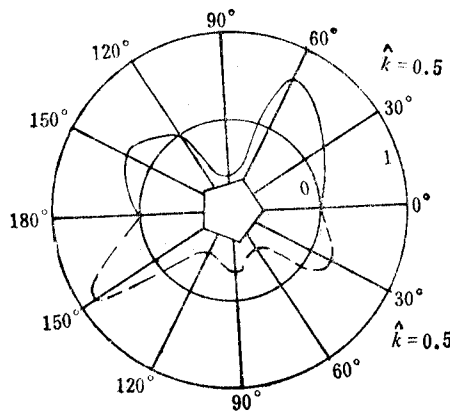


图5 $i_z-\theta$ 图 (E 波入射时正五边形截面导体表面上电流角分布的“1”级渐近解(28)式)(来波方向沿正五边形的一条高线,由 0° 指向 180°)

在以上例题的各图中,实线为 $t = 0$ 时的变化情况,虚线为 $t = T/4$ (T 为周期)时的变化情况。 $\hat{I}_z = I_z/E_0(\epsilon/\mu)^{1/2}$, $\hat{I}_i = I_i/H_0$ 为无量纲电流; $\hat{k} = kR$ 为无量纲波数。

参 考 文 献

[1] 盖秉政,电子学报,1984年,第4期,第43页。
 [2] Г. Н. Савин, Механика Твёрдого Тела, Изд. «Наука», Москва, 1966.
 [3] R. Kind and T. T. Wu, The Scattering and Diffraction of Waves, Harvard University Press, Cambridge, Ma, 1959.

**THE ASYMPTOTIC SOLUTION TO THE DIFFRACTION
PROBLEMS OF THE ELECTROMAGNETIC WAVES
BY A PERFECT CONDUCTOR**

Gai Bingzheng

(Harbin Institute of Technology)

In this paper, the two dimensional problems of the diffraction of the electromagnetic waves by a perfect conductor are discussed, using the Savin's mapping function of the perturbed form to the boundary. The general method and asymptotic formulas used to solve the problems are presented. Especially, the concrete formulas for calculating "0"-order and "1"-order asymptotic solutions are given for the cases of cylindrical conductors.