

## 一种新的多天线系统中的快速广义球形解码算法

刘超 杨宗凯 何建华  
(华中科技大学电子与信息系 武汉 430074)

**摘要:** 该文提出了一种新的广义球形解码算法。与常规球形解码算法相比,它能够处理多输入多输出系统(MIMO)中发送天线 $M$ 多于接收天线 $N$ 的情形,并且其解码速度远大于已有的广义球形解码算法。其基本思想是将 $M$ 维的传输信号矢量分成 $N-1$ 和 $M-N+1$ 维的子矢量 $x_a$ 和 $x_b$ ,通过一些简单地变换,就可以使用一个常规球形解码器来选取合适的 $x_b$ ,然后再利用另一个常规球形解码器来获得 $x_a$ ,从而得到整个传输信号矢量。仿真结果表明,这种新的快速广义球形解码算法(命名为双层球形解码算法)比现有的广义球形解码算法具有更低的复杂度。

**关键字:** 无线通信, 广义球形解码算法, 双层球形解码算法, 多输入多输出系统

**中图分类号:** TN929.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1009-5896(2005)07-1114-04

## A New Fast Generalized Sphere Decoding Algorithm in MIMO Systems

Liu Chao    Yang Zong-kai    He Jian-hua

(Department of Electronics and Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract** A new generalized sphere decoding algorithm is proposed for underdetermined MIMO systems with fewer receive antennas  $N$  than transmit antennas  $M$ . The proposed algorithm is significantly faster than the existing generalized sphere decoding algorithms. The basic idea is to partition the transmitted signal vector into two subvectors  $x_a$  and  $x_b$  with  $N-1$  and  $M-N+1$  elements respectively. After some simple transformations, an outer layer Sphere Decoder (SD) can be used to choose proper  $x_b$  and then use an inner layer SD to decide  $x_a$ , thus the whole transmitted signal vector is obtained. Simulation results show that Double Layer Sphere Decoding (DLSD) has far less complexity than the existing Generalized Sphere Decoding (GSDs).

**Key words** Wireless communications, Generalized sphere decoding algorithm, Double layer sphere decoding algorithm, MIMO

### 1 引言

近年来,随着人们对高速无线数据和多媒体业务的迫切需求,多天线系统逐渐成为人们研究的热点,它具有极大的信道容量和很高的频谱利用效率<sup>[1-3]</sup>。然而,在这种新的高速多输入多输出(MIMO)通信系统中,传统的最大似然解码算法由于复杂度太高而不再适用,取而代之的是具有多项式级复杂度的球形解码算法<sup>[4-6]</sup>。但是,常规球形解码算法不能适用于发送天线多于接收天线的场合。基于此,文献[7]提出了一种广义球形解码器(Generalized Sphere Decoder,以下简称GSD1),但是它的复杂度随着发送和接收天线之间差值的增加而呈指数增长。最近,一种基于分组思想的广义球形解码器<sup>[8]</sup>(GSD2)从一定程度上降低了复杂度。但是为了达到较好的解码效果,必须增加分组的深度,并且对于任何一种分组

深度,其复杂度仍然随着收发天线差值的增加而逐渐趋近于GSD1。本文提出了一种新的快速广义球形解码算法,这种算法不仅进一步降低了多天线系统中解码的复杂度,而且在思想上是常规球形解码算法的一种扩展,因而简单且易于实现。

全文安排如下:第2节介绍MIMO系统模型和已有的广义球形解码算法;第3节提出新的广义球形解码算法,即双层球形解码算法,并在该节末尾对其进行推广;仿真结果与讨论在第4节;第5节对全文进行小结。

### 2 多输入多输出系统和已有的广义球形解码算法

由于任何线性复数多天线系统都可以转换为等价的实系统模型<sup>[2]</sup>,为方便起见,本文只讨论实系统模型。考虑一个有 $M$ 根发送天线和 $N$ 根接收天线的MIMO系统。假设在

每对收发天线之间的信道衰落系数是相互统计独立的,输入的数据流被分成  $M$  个子数据流分别在各自特定的天线上发送。在每个时刻接收到的信号为:  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 。其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T \in I_q^M$  表示发送信号矢量,其每个元素都选自  $q$ -PAM 信号星座,即  $x_i \in I_q = \{\text{奇整数}j | -q+1 \leq j \leq q-1\}$ 。 $\mathbf{n}$  为一个  $N \times 1$  的实加性白高斯噪声矢量,其每个元素相互独立,均值为 0,方差为  $\sigma^2$ 。 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  为一个随机的信道矩阵模型,  $N < M$  并且  $\text{rank}(\mathbf{H}) = N$ 。 $\mathbf{H}$  中的每个元素  $H_{ij}$  为均值为 0,方差为 1 的独立同分布高斯随机变量。假设通过发送训练序列或者其它信道估计方法,  $\mathbf{H}$  可以被接收方准确地估计。 $\mathbf{x}$  的最大似然估计值  $\hat{\mathbf{x}}$  为使得  $\mathbf{y}$  与  $\mathbf{H}\mathbf{x}$  之间欧氏距离最小的矢量点:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in I_q^M} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 = \arg \min_{\mathbf{x} \in I_q^M} \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})\|^2 \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  为通过对  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^T\mathbf{H}$  进行广义 Cholesky 分解<sup>[7]</sup>得到的上三角矩阵,且满足  $\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{H}^T\mathbf{H}$ 。我们将  $\mathbf{F}$  写成  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{F}_2 \in \mathbb{R}^{N \times (M-N)}$ 。令  $\mathbf{x}_G$  和  $\mathbf{x}_{\bar{G}}$  分别代表矢量  $\mathbf{x}$  的前  $N$  个和后  $M-N$  个元素,则式(1)可以写成:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}\| &= \min_{\mathbf{x}_{\bar{G}} \in I_q^{M-N}} \left( \min_{\mathbf{x}_G \in I_q^N} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\rho} - \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_{\bar{G}} - \mathbf{F}_1 \mathbf{x}_G \right\|^2 \right) \\ &= \min_{\mathbf{x}_{\bar{G}} \in I_q^{M-N}} \left( \min_{\mathbf{x}_G \in I_q^N} \left\| \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{F}_1 \mathbf{x}_G \right\|^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\bar{\boldsymbol{\rho}} = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] \boldsymbol{\rho} - \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_{\bar{G}}$ 。

GSD1 首先任意选取一个具体的  $\mathbf{x}_{\bar{G}}$  值,然后利用常规球形解码器来求解式(2),从而得到发送信号矢量  $\mathbf{x}$ 。对于每个可能的  $\mathbf{x}_{\bar{G}}$  都必须运行一次球形解码算法,最后从中找出使得式(1)最小的  $\hat{\mathbf{x}}$  作为  $\mathbf{x}$  的最大似然解。容易看出这种算法的复杂度随着  $M-N$  的增加而呈指数增长。当  $M-N$  很大或者采用高速信号星座时, GSD1 很难实用化。

GSD2 从一定程度上降低了复杂度。它采用分组的思想,首先将所有可能的  $\mathbf{x}$  值按照一定的标准分成若干组,然后对它们进行条件检查,不符合一定条件的组被丢弃,从而减少需要运行常规球形解码算法的次数。然而,为了进一步降低解码的复杂度,必须增加分组的深度。即使深度较大,其复杂度也会随着  $M-N$  的增大而逐渐逼近 GSD1。

本文提出了一种称为双层球形解码算法(以下简称 DLSD)的新型广义球形解码算法,它不仅极大地降低复杂度,而且具有最大似然解码的性能。同时,作为常规解码算法的一种自然扩展,简单且易于实现。

### 3 双层球形解码算法

为简单起见,我们首先考虑 2-PAM 星座,其中信号矢量  $\mathbf{x}$  的每个元素的可能取值为  $\pm 1$ 。在本节末,我们将会把该双层球形解码算法推广到更一般的信号星座。

首先我们将式(2)重写为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})\|^2 &= \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=i}^M F_{ij}(\rho_j - x_j) \right|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \left| \sum_{j=i}^M F_{ij}(\rho_j - x_j) \right|^2 \\ &\quad + \left| \sum_{j=N}^M F_{Nj}(\rho_j - x_j) \right|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

如果  $\|\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})\|^2$  小于一个事先定义的平方化的球形搜索半径  $C$ , 则可以得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=N}^M F_{Nj}(\rho_j - x_j) \right|^2 \leq \|\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})\|^2 \leq C \Rightarrow -\sqrt{C} \leq \sum_{j=N}^M F_{Nj}(\rho_j - x_j) \\ \leq \sqrt{C} \Rightarrow \sum_{j=N}^M F_{Nj}\rho_j - \sqrt{C} \leq \sum_{j=N}^M F_{Nj}x_j \leq \sum_{j=N}^M F_{Nj}\rho_j + \sqrt{C} \end{aligned} \quad (4)$$

按照  $F_{Nj}$  的正负号将集合  $\{F_{Nj}\}$  分成两个子集  $\{F_{Nj}^+\}$  和  $\{F_{Nj}^-\}$ , 即  $\{F_{Nj}^+\} = \{F_{Nj}^+ | F_{Nj}^+ \in \{F_{Nj}\}, F_{Nj}^+ \geq 0\}$ ,  $\{F_{Nj}^-\} = \{F_{Nj}^- | F_{Nj}^- \in \{F_{Nj}\}, F_{Nj}^- < 0\}$  同时,定义  $B_j^+$  为集合  $\{F_{Nj}^+\}$  中下标  $j$  的集合,  $B_j^-$  为集合  $\{F_{Nj}^-\}$  中下标  $j$  的集合。这样,式(4)可以写成

$$\sum_{j=N}^M F_{Nj}\rho_j - \sqrt{C} \leq \sum_{j \in B^+} F_{Nj}^+ x_j + \sum_{j \in B^-} F_{Nj}^- x_j \leq \sum_{j=N}^M F_{Nj}\rho_j + \sqrt{C} \quad (5)$$

对于式(5)中的每一个  $x_j$ , 如果与它相乘的因子  $F_{Nj}$  属于  $\{F_{Nj}^+\}$ , 我们对它作如下变换:

$$b_j = (1 + x_j) / 2, \quad j \in B^+ \quad (6)$$

从而  $b_j \in \{0, 1\}$ ,  $x_j$  和  $b_j$  之间的映射关系为

$$x_j = 1 \Leftrightarrow b_j = 1 \text{ 和 } x_j = -1 \Leftrightarrow b_j = 0 \quad (7)$$

遵循同样的方法,对于每一个  $x_j$ , 如果与它相乘的因子  $F_{Nj}$  属于  $\{F_{Nj}^-\}$ , 我们对它作如下变换:

$$b_j = (1 - x_j) / 2, \quad j \in B^- \quad (8)$$

从而  $b_j \in \{0, 1\}$ ,  $x_j$  和  $b_j$  之间的映射关系为

$$x_j = 1 \Leftrightarrow b_j = 0 \text{ 和 } x_j = -1 \Leftrightarrow b_j = 1 \quad (9)$$

定义  $A = \sum_{j=N}^M F_{Nj}\rho_j + \sum_{j \in B^+} F_{Nj}^+ - \sum_{j \in B^-} F_{Nj}^-$ , 这样,式(5)可以写成

$$A - \sqrt{C} \leq \sum_{j \in B^+} 2F_{Nj}^+ b_j - \sum_{j \in B^-} 2F_{Nj}^- b_j \leq A + \sqrt{C} \quad (10)$$

令  $a_j = 2|F_{Nj}|$ ,  $j = N, N+1, \dots, M$ , 将  $a_j$  代入式(10)中得到

$$A - \sqrt{C} \leq \sum_{j=N}^M a_j b_j \leq A + \sqrt{C} \quad (11)$$

我们进一步用  $u_j$  代替  $a_j b_j$ , 则式(11)可以变为

$$A - \sqrt{C} \leq \sum_{j=N}^M u_j \leq A + \sqrt{C} \quad (12)$$

其中  $u_j \geq 0$ 。当  $a_j > 0$  时, 有  $u_j = \begin{cases} 0, & b_j = 0 \\ a_j, & b_j = 1 \end{cases}$ ; 当  $a_j = 0$  时无

法确定  $b_j$  的值, 在这种情况下, 我们可以同时测试  $b_j$  的两个可能值。幸运的是, 由于  $H$  的随机性,  $a_j = 0$  的情况很少发生。为了便于表述, 以下假设  $a_j > 0$ 。不难发现式(12)正好是常规球形解码器所能解决的问题。从  $u_M$  开始反向求解, 可以得到

$$u_M \in \{0, a_M\} \cap \left[ A - \sqrt{C} - \sum_{j=N}^{M-1} a_j, A + \sqrt{C} \right]$$

$$u_{M-1} \in \{0, a_{M-1}\} \cap \left[ A - \sqrt{C} - u_M - \sum_{j=N}^{M-2} a_j, A + \sqrt{C} - u_M \right]$$

对于元素  $u_i$  有

$$u_i \in \{0, a_i\} \cap \left[ A - \sqrt{C} - \sum_{j=i+1}^M u_j - \sum_{j=N}^{i-1} a_j, A + \sqrt{C} - \sum_{j=i+1}^M u_j \right]$$

于是, 我们可以使用一个外层常规球形解码器来搜索得到可能的  $u_j$  值,  $N < j < M$ , 然后恢复  $b_j$  值, 根据映射式(7)和式(9), 得到的  $b_j$  值可以进一步求出矢量  $\mathbf{x}_b = (x_N, x_{N+1}, \dots, x_M)^T$ 。我们接着从矩阵  $F$  中定义下面的子块:

$$\begin{aligned} F'_1 &\in \mathbb{R}^{N-1 \times N-1}, & F'_1 &= F(i, j), & 1 \leq i, j \leq N-1 \\ F'_2 &\in \mathbb{R}^{N-1 \times M-N+1}, & F'_2 &= F(i, j+N-1), \\ & & & & 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq M-N+1 \end{aligned}$$

令接收信号矢量  $\rho' = [F'_1, F'_2] \rho - F'_2 \mathbf{x}_b$ , 新的平方化的球形搜索半径设为  $C' = C - \left| \sum_{j=N}^M F_{Nj} (\rho_j - x_j) \right|^2$ , 则由式(3)可以推出如

下的不等式:

$$\| \rho' - F'_1 \mathbf{x}_a \| \leq C' \tag{13}$$

其中  $\mathbf{x}_a = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})^T$ 。该不等式恰好可以用常规球形解码器来求解。与前面的外层球形解码器相对应, 我们称之为内层球形解码器。如果内层球形解码器成功地找到一个  $\mathbf{x}_a$  的解,  $C$  则修改为当前找到的最小距离, 同时相应的点被存储为最优解。式(12)中的上下限被修改, 然后外层解码器在新的上下限条件下从式(12)开始再次运行。

如果在检查或丢弃掉所有可能的  $\mathbf{x}_a$  以后仍然没有找到合理的点, 则  $C$  乘以一定的系数, 然后从式(12)开始重新检查所有的  $\mathbf{x}_a$ 。如果所有的  $\mathbf{x}_a$  被检查或丢弃后, 最优的解是非空的, 则算法结束, 同时当前的最优解即为传输信号矢量的估计值。

由上述可知, 双层球形解码的根本任务是从一个具有  $2^M$  个  $M$  维信号矢量的解空间中搜索最大似然意义上的最优解。由于解空间是确定的, 因此在搜索完整个解空间后, 总可以得到一个最优解, 并把这个最优解作为传输信号矢量的估计值。

该算法可以被扩展到  $q=2^m$  的信号星座, 其中  $q$  为正整数。将式(6)和式(8)中的变换替代为  $b_j = (q-1+x_j)/2$ ,  $N \leq j \leq M$  和  $b_j = (q-1-x_j)/2$ ,  $N \leq j \leq M$ , 从而  $0 \leq b_j \leq q-1$ ,  $N \leq j \leq M$ 。考虑  $b_j$  的二进制表示  $b_j = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i b_{i,j}$ ,  $b_{i,j} \in \{0, 1\}$ , 令  $n=(M-N+1)m$ , 定义长度为  $n$  的矢量  $\mathbf{a} = [a_N, 2a_N, \dots, 2^{m-1}a_N, \dots, a_M, 2a_M, \dots, 2^{m-1}a_M]$  和  $\mathbf{b} = [b_N, \dots, b_{m-1,N}, \dots, b_{0,M}, \dots, b_{m-1,M}]$ , 然后遵循同样的方法从式(11)开始求解。

### 4 仿真结果及讨论

我们在仿真中使用 4-QAM 星座, 信道矩阵  $H$  的分量为独立同分布的复高斯变量, 其均值为 0, 方差为 1。接收信噪比为 28dB/bit。我们将接收天线数固定为  $N_r=2$ , 然后改变传输天线  $N_t$  的数目从 4 到 9。平方化的球形搜索半径初始化为  $C=2$ 。如果在该范围内没有找到合理的点, 则  $C$  增加 2 倍后重新开始搜索。多天线系统矩阵信道假设为准静态,  $H$  在每 10 个信号发送间隔内保持稳定, 然后独立地改变。仿真中一共使用了 3000 个信道实现, 相应的实数模型包含  $2N_r$  个方程和  $2N_t$  个取值为  $\pm 1$  的整数变量。

在同样的系统仿真条件下, 这 3 种算法搜索的解空间一样, 采用的也都是最大似然准则, 因此它们最终会找到相同的最大似然意义上的最优解, 即它们具有相同的误码特性。这 3 种算法的差别是它们采用不同的搜索策略, 因而所花费的时间也不同。因此, 我们用解码时间来比较这 3 种算法的优劣, 时间单位为秒。仿真环境采用 Intel PIII 866MHz 处理器, 使用 Matlab6.1 编程。表 1 显示的是当  $N_r=2$  和  $4 \leq N_t \leq 9$  时的 DLSD, GSD1 和 GSD2 的绝对解码时间。图 1 则给出了 DLSD 和 GSD2 相对于 GSD1 的解码时间比例。从仿真结果可以明显看出, DLSD 算法速度显著高于其他两种算法。随着发送天线数目的增多, 其优势愈加明显。GSD2 解码时间相对于 GSD1 开始呈下降趋势, 但是当发送天线数目增加到一定值时, 其相对比例逐渐上升, 并且趋近 GSD1 的复杂度。与之不同的是, 随着  $N_t$  的增加, 虽然 DLSD 解码的绝对时间有所增加, 但是其相对于 GSD1 的时间比例则持续缓慢下降。

表1 各种算法的解码时间比较 (单位: 秒)

$N_t$	4	5	6	7	8	9
DLSD	0.0232	0.0682	0.1926	0.6541	1.8045	5.7958
GSD2	0.0375	0.1062	0.3629	1.3178	5.3213	23.6529
GSD1	0.0419	0.1552	0.6218	2.5053	9.6540	40.7106

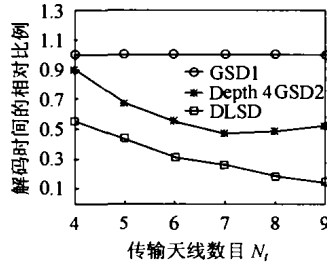


图1 GSD1, GSD2 和 DLSD 的解码时间比较

### 5 结束语

本文提出了一种新的广义球形解码算法, 我们把它命名为双层球形解码算法, 该算法在思想上是常规球形解码算法的扩展, 因而简单且易于实现。仿真结果表明它比现有的两种广义球形解码算法具有更快的速度和更低的复杂度。

### 参考文献

[1] Telatar I E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels. *Eur. Trans. Telecom*, 1999, 10(3): 585 – 595.  
 [2] Foschini G J. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-

element antennas. *Bell Labs. Tech. J.*, 1996, 1(2): 41 – 59.  
 [3] Marzetta T L, Hochwald B M. Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999, 45(1): 139 – 157.  
 [4] Damen M O, Gamal H E, Caire G. On maximum-likelihood detection and the search for the closest lattice point. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2003, 49(10): 2389 – 2402.  
 [5] Agrell E, Eriksson T, Vardy A, Zeger K. Closest point search in lattices. *IEEE Trans. Info. Theory*, 2002, 48(8): 2201 – 2214.  
 [6] Viterbo, Boutros. A universal lattice code decoder for fading channels. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 1999, 45(5): 1639 – 1642.  
 [7] Damen M O, Abed-Meraim K, Belfiore J C. Generalised sphere decoder for asymmetrical space-time communication architecture. *Electronics Letters*, 2000, 36(2): 166 – 167.  
 [8] Dayal P, Varanasi M K. A fast generalized sphere decoder for optimum decoding of under-determined MIMO systems. 41st Annual Allerton Conf. on Comm. Control, and Comput., Monticello, Italy, Oct. 2003, Vol. 3: 256 – 261.

刘超: 男, 1977年生, 博士生, 主要从事空时编解码、信道容量方面的研究。  
 杨宗凯: 男, 1963年生, 博士, 博士生导师, 主要从事现代信息网络理论及其应用和现代数字信号处理技术的研究。  
 何建华: 男, 1976年生, 博士, 副教授, 主要从事无线多媒体、宽带网络方面的研究。