

# 一类离散 Hopfield 网络吸引状态的特征分析<sup>1</sup>

张军英 许进 保铮

(西安电子科技大学雷达信号处理国防重点实验室 西安 710071)

**摘要** 该文首先讨论了超立方体图所对应的连接矩阵的特征向量, 进而深入系统地分析了以  $n$  维超立方体为大规模局域连接模型的离散 Hopfield 网络的吸引特性之一, 稳定吸引状态的位置、数量及其分布。研究表明, 网络连接矩阵的特征向量及其拼接向量均为网络的吸引子或吸引环, 且其在网络状态空间中具有均匀对称的分布格局。

**关键词** 离散 Hopfield 网络, 特征向量,  $n$  维超立方体, 吸引子 / 吸引环

**中图分类号** TN-052

## 1 引言

超立方体是计算机科学、编码与密码学、遗传算法以及整个离散数学等学科的理论基础之一, 同样地也是离散型神经网络研究的基础<sup>[1]</sup>。按照文献 [2], 生物大脑的基本结构可以用一种高度局域连接的网络来近似, 而超立方体是具有这样结构的典型形式之一, 其规范的几何结构将有效地简化对问题的分析。可以认为, 人们对信息的联想记忆、处理、编码、识别等就是在这样结构及其变形结构的模拟大脑神经网络中完成的。

本文系统地讨论了以  $n$  维超立方体为大规模局域连接模型的离散 Hopfield 网络的吸引特性, 包括网络的吸引子 / 环的位置, 结构和吸引域大小等, 然后讨论一般的离散 Hopfield 网络具有与其相同的吸引子 / 环的条件及吸引子 / 环的吸引结构和吸引半径等, 为我们进一步理解和模拟生物大脑做必要的准备, 为更有效地分析和设计网络奠定了必要的理论基础, 同时, 本文的结论可望应用于自动控制, 自动分类和通信密码等领域。

本文讨论  $n$  维超立方体网络的吸引子 / 环的位置、数量及其分布, 为此, 本文首先讨论了  $n$  维超立方体图所对应的连接矩阵的特征向量, 在此基础上, 证明了这些特征向量及其拼接向量几乎全为网络的吸引子 / 环, 它们在网络状态空间中是均匀对称分布的, 并且平均一个神经元可以记忆  $2^n$  个样本。在本文的后续论文中, 我们则进一步讨论这类网络的吸引结构和吸引半径, 进而讨论更为一般的离散 Hopfield 网络的吸引特性。

本文的安排如下: 第 2 节讨论超立方体图的特征分析, 第 3 节讨论  $n$  维超立方体结构的离散 Hopfield 网络 (称为  $A_n$  网) 的吸引子 / 环位置, 第 4 节讨论  $A_n$  网络的吸引子 / 环在网络状态空间中的分布情况, 第 5 节给出结论。

## 2 超立方体图的特征分析

为讨论以  $n$  维超立方体为结构的离散 Hopfield 网络的最基本的吸引特性之一——吸引子 / 环的位置, 首先, 我们对超立方体进行特征分析。一个图  $G(V, E)$ , 若  $V = B^n = \{0, 1\}^n, E = \{(v_i, v_j) : d_H(v_i, v_j) = 1, v_i, v_j \in V\}$  (其中  $d_H(v_i, v_j)$  表示  $v_i, v_j$  之间的 Hamming 距离), 则称  $G$

<sup>1</sup> 1999-10-15 收到, 2000-04-29 定稿

国家自然科学基金项目 (No.60071026) 和国家部级科技预研跨行业基金项目 (No.00J1.4.4.DZ0106) 资助

为一个  $n$  维超立方体, 简记为  $B_n$  或  $B^n$ , 为表示方便, 将  $B^n$  用图的形式表示出来, 称为  $n$  维超立方体图 (图 1 示出了 4 维超立方体图  $B^4$ ), 其  $2^n \times 2^n$  的连接矩阵  $A_n$  可以通过下式迭代获得

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_n &= \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & A_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因  $n$  维超立方体图  $B^n$  与其连接矩阵  $A_n$  一一对应, 今后我们将不加区别地将  $n$  维超立方体图用  $B^n$  或  $A_n$  表示。

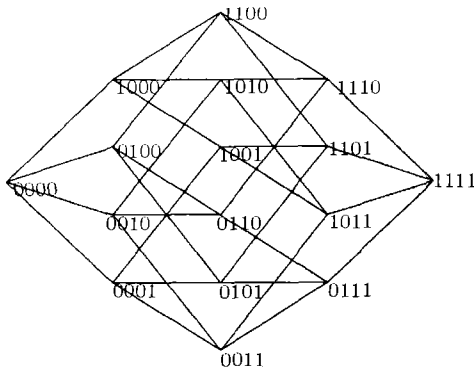


图 1 一个 4 维超立方体图  $B^4$

对于图  $G$  的连接矩阵  $A$ ,  $A$  的全体不同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  及其所对应的重数  $m_1, m_2, \dots, m_t$  称为图  $G$  的谱<sup>[3]</sup>, 记作  $S_p(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_t \\ m_1 & m_2 & \dots & m_t \end{pmatrix}$ , 文献 [4] 运用 Cayley 图的谱 (特征值) 来研究 Boole 函数的 Walsh 变换, 本文则运用超立方体图的谱来研究离散 Hopfield 网络的吸引特性。对于  $B^n$  的连接矩阵  $A_n$ , 我们有如下引理:

引理 1<sup>[1]</sup>  $A_n$  的特征值  $\lambda_n$  可以用下式迭代获得:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= 0 \\ \lambda_n &= \lambda_{n-1} \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

引理 2<sup>[1]</sup>  $A_n$  共有  $n + 1$  个不同的特征值:

$$\lambda = -n + 2t, \quad t = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

其重数为  $C_n^t$  (从  $n$  个元素中取  $t$  个元素的组合数)。

按照引理 2,  $A_n$  的谱正好构成了杨辉三角形, 表 1 给出了  $n$  维超立方体  $A_n (n \leq 9)$  的谱, 其中顶行给出的是特征值, 表中给出的是相应特征值的重数。

表 1  $n$  维超立方体图的谱 ( $n \leq 9$ )

	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B$									1		1								
$B^2$								1		2		1							
$B^3$							1		3		3		1						
$B^4$						1		4		6		4		1					
$B^5$					1		5		10		10		5		1				
$B^6$				1		6		15		20		15		6		1			
$B^7$			1		7		21		35		35		21		7		1		
$B^8$		1		8		28		56		70		56		28		8		1	
$B^9$	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

定理 1  $A_n$  的特征值为  $\lambda_n = \lambda_{n-1} \pm 1$  的特征向量可用下式迭代获得

$$\left. \begin{aligned} P_0(0) &= 1 \\ P_n(\lambda_{n-1} + 1) &= \begin{bmatrix} P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \\ P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \end{bmatrix}; P_n(\lambda_{n-1} - 1) = \begin{bmatrix} P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \\ -P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $P_{n-1}(\lambda_{n-1})$  为  $A_{n-1}$  的特征值为  $\lambda_{n-1}$  的特征向量.

证明 因  $\lambda_{n-1} \pm 1$  为  $A_n$  的特征值, 记其特征向量为  $P_n$ , 则

$$\left[ (\lambda_{n-1} \pm 1)I - \begin{pmatrix} A_{n-1} & I \\ I & A_{n-1} \end{pmatrix} \right] P_n = 0 \quad (5)$$

若记  $P_n$  由两部分组成, 即  $P_n = \begin{pmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \end{pmatrix}$ , 其中  $P_{n1}, P_{n2}$  均为  $2^{n-1}$  维向量, 则 (5) 式可表示为

$$\left. \begin{aligned} [(\lambda_{n-1} \pm 1)I - A_{n-1}] P_{n1} &= P_{n2} \\ [(\lambda_{n-1} \pm 1)I - A_{n-1}] P_{n2} &= P_{n1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) 式实际上对  $P_{n1} = P_{n2}$  和  $P_{n1} = -P_{n2}$  均成立, 以下分别讨论, 并记  $\lambda_{n-1}^+ = \lambda_{n-1} + 1, \lambda_{n-1}^- = \lambda_{n-1} - 1$ .

(1) 当  $P_{n1} = P_{n2}$  时, 由 (6) 式可得

$$(\lambda_{n-1}I - A_{n-1})P_{n1} = P_{n1} \mp P_{n1} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^+ \\ 2P_{n1}, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^- \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} (\lambda_{n-1}I - A_{n-1})P_{n1} = 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^+ \\ [(\lambda_{n-1} - 2)I - A_{n-1}]P_{n1} = 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^- \end{cases}$$

故  $P_{n1}(\lambda_{n-1}^+)$  是  $A_{n-1}$  的特征值  $\lambda_{n-1}$  的特征向量  $P_{n-1}(\lambda_{n-1})$ :  $P_{n1}(\lambda_{n-1}^+) = P_{n-1}(\lambda_{n-1})$ ;

(2) 当  $P_{n1} = -P_{n2}$  时, 由 (6) 式可得

$$(\lambda_{n-1}I - A_{n-1})P_{n1} = -P_{n1} \mp P_{n1} = \begin{cases} -2P_{n1}, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^+ \\ 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^- \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} [(\lambda_{n-1} + 2)I - A_{n-1}]P_{n1} = 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^+ \\ (\lambda_{n-1}I - A_{n-1})P_{n1} = 0, & \text{当 } \lambda_n = \lambda_{n-1}^- \end{cases}$$

故  $P_{n1}(\lambda_{n-1}^-)$  是  $A_{n-1}$  的特征值  $\lambda_{n-1}$  的特征向量  $P_{n-1}(\lambda_{n-1})$ :  $P_{n1}(\lambda_{n-1}^-) = P_{n-1}(\lambda_{n-1})$ .

综合上述 (1) 和 (2) 式即得出本定理中的迭代式, 并注意到  $A_1$  的特征值  $\lambda_1 = -1, 1$  的特征向量分别为  $P_1(-1) = [1 \ -1]^T, P_1(1) = [1 \ 1]^T$ , 它们可由  $P_0(0) = 1$  通过迭代获得.

证毕

由于  $A_n$  是实对称矩阵, 由高等代数知识<sup>[5]</sup> 知, 不同特征值对应的特征向量一定正交; 又由 (4) 式知相同特征值  $\lambda_n$  的特征向量  $P_a = \begin{bmatrix} P_{n-1}(\lambda_n - 1) \\ P_{n-1}(\lambda_n - 1) \end{bmatrix}$  和  $P_b = \begin{bmatrix} P_{n-1}(\lambda_n + 1) \\ -P_{n-1}(\lambda_n + 1) \end{bmatrix}$ , 有

$\langle P_a, P_b \rangle = P_a^T P_b = 0$ , 即  $P_a$  和  $P_b$  正交, 故  $A_n$  的特征向量构成了  $2^n$  维空间  $R^{2^n}$  中的正交基, 这个基正好就是 Walsh 基。

### 3 $A_n$ 网的吸引子和吸引环

一个连接矩阵为  $n \times n$  的  $A$  的离散 Hopfield 网络  $H(A, \theta)$ , 它的运行方程为

$$X(k+1) = \text{sgn}(AX(k) + \theta), \quad \text{其中 } \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其中  $X$  称为网络的状态, 在本文中常常就称为向量。当  $\text{sgn}(AX + \theta) = X$  时, 称  $X$  为网络  $H$  的吸引子; 当  $\text{sgn}(AX + \theta) = Y; \text{sgn}(AY + \theta) = X$  时, 称  $(X, Y)$  为  $H$  的长度为 2 的吸引环。特别地, 当  $\text{sgn}(A(\pm X) + \theta) = \mp X$  时, 称  $(X, -X)$  为自补吸引环, 简记为  $\pm X$ , 并称  $-X$  为  $X$  的补。网络的吸引子 / 环统称为网络的稳定吸引状态。本文中记分量全为 1 的状态 (列向量) 为  $e$ , 即  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。

现将以  $n$  维超立方体  $B^n$  的邻接矩阵  $A_n$  为连接矩阵的离散 Hopfield 网记为  $H(A_n, 0)$ , 简称为  $A_n$  网, 超立方体的每一个顶点对应网络的一个神经元,  $A_n$  网是共有  $2^n$  个神经元的大规模局域连接且具有高度几何对称结构的神经网络, 其  $A_n$  的实对称性质使得网络只能或者收敛于吸引子或者收敛于长度为 2 的吸引环 (简称为吸引环) [6]。本节我们讨论  $A_n$  网络吸引子 / 环的位置。

设  $A_n$  的特征值  $\lambda$  对应的特征向量为  $P$ , 并注意到  $P$  的各个分量均为  $\pm 1$ , 有

$$\left. \begin{aligned} A_n P &= \lambda P \\ \text{sgn}(\pm P) &= \pm P \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

可以证明以下定理:

**定理 2** (1) 若  $P$  为  $A_n$  的特征值  $\lambda \geq 1$  的特征向量, 则  $\pm P$  为  $A_n$  网的吸引子; (2) 若  $P$  为  $A_n$  的特征值  $\lambda \leq -1$  的特征向量, 则  $\pm P$  为  $A_n$  网的吸引环; (3) 若  $P$  为  $A_n$  的特征值  $\lambda = 0$  的特征向量, 则  $P$  经一步即收敛到网络的吸引子  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。

**证明** (1) 对于  $\lambda \geq 1$ , 按照 (7) 式, 易得  $\text{sgn}(A_n(\pm P)) = \pm P$ , 因此  $\pm P$  是  $A_n$  的吸引子。(2) 对于  $\lambda \leq -1$ , 按照 (7) 式, 易得  $\text{sgn}(A_n(\pm P)) = \mp P$ , 因此  $\pm P$  是  $A_n$  的吸引环。(3) 对于  $\lambda = 0$ , 则有  $\text{sgn}(A_n P) = \text{sgn}(\lambda P) = [1, 1, \dots, 1]^T = e$ , 又  $\text{sgn}(A_n e) = \text{sgn}(ne) = e$ 。

证毕

由于  $A_n$  的特征向量是  $A_{n-1}$  特征向量的拼接向量, 以下我们讨论拼接向量是否是  $A_n$  网的吸引子 / 环。

**定理 3** 对于  $A_{n-1}$ , 若其特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量分别为  $P_1, P_2$ , 并称  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \pm P_2 \end{bmatrix}$  为  $P_1$  和  $P_2$  的拼接向量, 则

- (1)  $\lambda_1 \geq 2, \lambda_2 \geq 2$  时,  $\pm P$  为  $A_n$  网的吸引子 (共 4 个);
- (2)  $\lambda_1 \leq -2, \lambda_2 \leq -2$  时,  $\pm P$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 2 个);

(3)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  且  $P_1 \neq P_2$  时,  $(\pm P, \pm \begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix})$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 4 个);  
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  且  $P_1 = P_2$  时,  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  的吸引子 (共 2 个),  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  的吸引环 (共 1 个);

(4)  $\lambda_1 \geq 2, \lambda_2 \leq -2$  时,  $(P, \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix})$  为  $A_n$  的吸引环 (共 2 个);

(5)  $\lambda_1 \geq 2, \lambda_2 = 0$  时,  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  的吸引子 (共 2 个);

(6)  $\lambda_1 \leq -2, \lambda_2 = 0$  时,  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  的吸引环 (共 1 个)。

**证明** 因  $P_1, P_2$  分别为  $A_{n-1}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量, 故

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) &= \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & A_{n-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ \pm P_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 \pm P_2 \\ \pm \lambda_2 P_2 + P_1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

注意到  $P_1, P_2$  的各个分量只取 +1 或 -1, 从而当  $|\lambda_1|, |\lambda_2| \geq 2$  时, 上式中的前面一项起主要作用, 我们有

(1) 当  $\lambda_1 \geq 2, \lambda_2 \geq 2$  时, (8) 式可写为  $\operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn}(\pm P) = \pm P$ , 故此时  $\pm P$  为  $A_n$  的吸引子 (共 4 个);

(2) 当  $\lambda_1 \leq -2, \lambda_2 \leq -2$  时, (8) 式可写为  $\operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn}(\mp P) = \mp P$ , 故此时  $\pm P$  为  $A_n$  的吸引环 (共 2 个);

(3) 当  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  时, (8) 式可写为

$$\operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn} \left( \pm \begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix} \right) = \pm \begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

记  $\begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix} = P'$ , 有

$$\operatorname{sgn}(A_n(\pm P')) = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} A_{n-1} & I \\ I & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ \pm P_2 \end{bmatrix} \right\} = \pm P$$

因此, 当  $P_1 \neq P_2$  时,  $(\pm P, \pm P')$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 2 个); 当  $P_1 = P_2$  时,  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  网的吸引子 (共 2 个),  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 1 个)。

(4) 当  $\lambda_1 \geq 2, \lambda_2 \leq -2$  时, (8) 式可写为

$$\operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix} \right\} = \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix}$$

而

$$\operatorname{sgn} \left\{ A_n \left( \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix} \right) \right\} = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 \mp P_2 \\ \mp \lambda_2 P_2 + P_1 \end{bmatrix} \right\} = \pm P$$

又因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  使得  $P_1 \neq P_2$ , 故这时  $\left( P, \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix} \right)$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 2 个)。

$$(5) \lambda_1 \geq 2, \lambda_2 = 0 \text{ 时, (8) 式可写成 } \operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \right\} = \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \text{ 而}$$

$$\operatorname{sgn} \left\{ A_n \left( \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \right) \right\} = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} \lambda_1 P_1 + P_1 \\ \lambda_1 P_1 + P_1 \end{bmatrix} \right\} = \pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

故此时  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  网的吸引子 (共 2 个)。

$$(6) \lambda_1 \leq -2, \lambda_2 = 0 \text{ 时, (8) 式可写为 } \operatorname{sgn}(A_n(\pm P)) = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} -P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \right\} = \pm \begin{bmatrix} -P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}, \text{ 而}$$

$$\operatorname{sgn} \left\{ A_n \left( \pm \begin{bmatrix} -P_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \right) \right\} = \operatorname{sgn} \left\{ \pm \begin{bmatrix} -\lambda_1 P_1 + P_1 \\ \lambda_1 P_1 - P_1 \end{bmatrix} \right\} = \mp \begin{bmatrix} -P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

故此时  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_1 \end{bmatrix}$  为  $A_n$  网的吸引环 (共 1 个)。

证毕

从定理 2 和 3, 当  $n$  较大时, 我们不难看出:

(1) 由定理 2 知,  $A_n$  的特征向量 (除特征值为 0 的特征向量外) 均为  $A_n$  网络的吸引子 / 环, 又  $A_n$  的特征向量构成了 Walsh 基, 故这些吸引子 / 环均两两正交, 且  $A_n$  的所有大于等于 1 特征值 / 小于等于 -1 特征值所对应的特征向量及其补向量均为  $A_n$  网的吸引子 / 环。

(2) 考察网络的正交样本容量 (网络所记忆的正交样本数目)。对于  $A_n$  网, 在  $n$  为奇数时 (即网络无为 0 的特征值时), 其所有的特征向量正交且均为网络的吸引状态, 这时网络的正交样本数目为  $2^n$ 。若网络用 Hebb 规则获得连接权, 要记忆的样本相互独立, 且分量取 +1/-1 的概率为 1/2, Hopfield(1982)<sup>[7]</sup> 指出这时网络的容量仅为  $0.15N$ , 其中  $N$  为网络的神经元数目, 而文献 [8] 则指出当神经元数目为  $N = 2^k(2l - 1)$  时 ( $k, l$  均为整数), 可通过适当构造网络, 使网络记住最大正交样本数目  $2^k$ , 因此网络的记忆容量为  $N/(2l - 1)$ 。对比本文和文献 [8] 的结果, 这里网络正交样本容量为  $2^n$  正好就是文献 [8] 中  $k = n, l = 1$  的结果, 表明  $A_n$  网 ( $n$  为奇数时) 是在有相同数目神经元的网络中的获得了最大正交样本容量的网络。

(3)  $A_{n-1}$  的两特征向量的拼接向量通常也为  $A_n$  网的吸引子或吸引环, 但明显地所拼接出的不是  $A_n$  的特征向量时, 它们就不是两两正交的。因  $A_{n-1}$  的特征向量通常为  $A_{n-1}$  网的吸引子 / 环, 故  $A_{n-1}$  网络的吸引子 / 环的拼接构成了  $A_n$  网络的吸引子 / 环, 且  $A_{n-1}$  网的吸引子与吸引子的拼接构成了  $A_n$  网的吸引子,  $A_{n-1}$  网的吸引子与吸引环的拼接, 以及吸引环与吸引环的拼接均构成了  $A_n$  网的吸引环。

(4) 因  $A_{n-1}$  有  $2^{n-1}$  个特征向量, 它们的任两个的拼接通常都为  $A_n$  的吸引子 / 环, 而这样的拼接可以有 4 个 (如果对应吸引子, 则对应 4 个吸引子; 如果对应吸引环, 则对应 2 个吸引环), 并由定理 2 和定理 3, 可得  $A_n$  网络的吸引子 / 环的数目, 约为  $O(2^{n-1} \times 2^{n-1} \times 4)$  即  $O((2^n)^2)$  个吸引子 / 环 (这里, 一个吸引环占用 2 个状态, 故计其数为 2), 是  $A_n$  网神经元数目

$2^n$  的平方数量级, 表明  $A_n$  网的吸引子 / 环的数目非常多, 若将网络的记忆能力平分到每个神经元上, 相当于每个神经元记忆了  $2^n$  个样本, 且网络的吸引子仅占有所有稳定吸引状态的  $1/4$ , 其余  $3/4$  都是吸引环.  $A_n$  网的这一特性为大样本的有效记忆和联想提供了理论基础.

(5) 网络的稳定吸引状态如此之多, 最主要原因是  $A_n$  网具有非常对称的几何结构, 包括网络结构和参数的高度几何对称性, 表现在以对称的结构即超立方体结构实现网络的连接和以相同的连接权实现网络中的连接. 由此可以看到, 网络的结构和参数的对称性越好, 则网络的记忆容量将越大, 这对于我们设计大记忆容量离散 Hopfield 网络有直接的指导意义.

(6) 实际上,  $\lambda_1 \geq 2$  且  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  且  $P_1 = P_2$  时所得出的  $A_n$  网的吸引子  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$  和吸引环  $\pm \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_1 \end{bmatrix}$  均分别为  $A_n$  的特征值  $\lambda = \lambda_1 + 1$  和  $\lambda = \lambda_1 - 1$  的特征向量, 这与定理 2 所给出的  $A_n$  的  $\lambda \geq 1/\lambda \leq -1$  所对应特征向量是  $A_n$  网的吸引子 / 环的结论一致.

#### 4 $A_n$ 网吸引子和吸引环的分布

为了讨论  $A_n$  网吸引子 / 环在网络状态空间中的分布情况, 我们讨论网络吸引子 / 环之间的距离情况. 因当  $n$  较大时  $A_n$  的特征向量及  $A_{n-1}$  的特征向量的拼接向量几乎全为  $A_n$  的吸引子 / 环, 下面我们讨论它们之间的距离情况.

**定理 4**  $A_n$  的特征向量  $P_1, P_2$  之间 ( $P_1 \neq P_2$ ) 的 Hamming 距离  $d(P_1, P_2)$  为

$$d(P_1, P_2) = \begin{cases} 2^n, & P_1 = -P_2 \\ 2^{n-1}, & P_1 \neq -P_2 \end{cases} \quad (9)$$

**证明** 当  $P_1 = -P_2$  时的结果是明显的. 下面讨论  $P_1 \neq -P_2$  的情况. 用数学归纳法证明.  $n = 1$  时,  $A_n$  只有 2 个特征值  $-1$  和  $+1$ , 它们的特征向量分别为  $P_1 = [1, -1]^T, P_2 = [+1, +1]^T$ , 有  $d(P_1, P_2) = 1 = 2^0$ , 定理成立. 设  $n$  时定理成立. 对于  $n + 1$  的情况, 有

$$P_1 = P_{n+1}(\lambda' + 1) = \begin{bmatrix} P_n(\lambda') \\ \pm P_n(\lambda') \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_{n+1}(\lambda'' + 1) = \begin{bmatrix} P_n(\lambda'') \\ \pm P_n(\lambda'') \end{bmatrix}$$

其中  $\lambda', \lambda''$  为  $A_n$  的特征值, 故有

$$d(P_1, P_2) = d(P_n(\lambda'), P_n(\lambda'')) + d(\pm P_n(\lambda'), \pm P_n(\lambda''))$$

并依据  $n$  时定理成立的假设和  $P_1 \neq P_2$ , 可得

$$d(P_1, P_2) = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-1}, & \lambda' \neq \lambda'' \\ 0 + 2^n, & \lambda' = \lambda'' \end{cases} = 2^n$$

即  $n + 1$  时定理亦成立.

证毕

**定理 5** 由  $A_{n-1}$  的特征向量  $P_1, P_2$  所构成的拼接向量  $P_a = \begin{bmatrix} P_1 \\ \pm P_2 \end{bmatrix}, P_b = \begin{bmatrix} P'_1 \\ \pm P'_2 \end{bmatrix}$

( $P_a \neq P_b$ ) 的 Hamming 距离为

$$d(P_a, P_b) = k \times 2^{n-2} \quad (10)$$

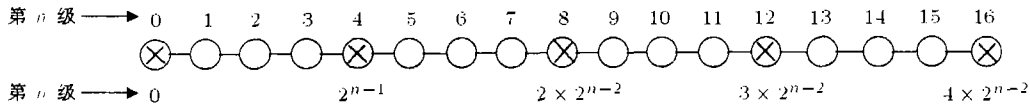


图 2  $A_n$  网络吸引子 / 吸引环在网络状态空间中的分布: 打叉的级中存在吸引子 / 吸引环

其中  $k$  仅取为 1,2,3,4。

**证明** 因  $d(P_a, P_b) = d(P_1, P'_1) + d(\pm P_2, \pm P'_2)$ , 并考虑到  $P_1, P'_1, P_2, P'_2$  都是  $A_{n-1}$  的特征向量, 由定理 4 知

$$d(P_1, P'_1) = \begin{cases} 0, & P_1 = P'_1 \\ 2^{n-2}, & P_1 \neq P'_1 \end{cases} = 2^{n-2} \times \begin{cases} 0, & P_1 = P'_1 \\ 1, & P_1 \neq P'_1 \end{cases}$$

$$d(\pm P_2, \pm P'_2) = \begin{cases} 0, & P_2 = P'_2 \text{ 且同号时} \\ 2^{n-1}, & P_2 = P'_2 \text{ 且异号时} \\ 2^{n-2}, & P_2 \neq P'_2 \end{cases} = 2^{n-2} \times \begin{cases} 0, & P_2 = P'_2 \text{ 且同号时} \\ 2, & P_2 = P'_2 \text{ 且异号时} \\ 1, & P_2 \neq P'_2 \end{cases}$$

其中同号或异号均针对  $\pm P_2$  和  $\pm P'_2$  前的符号而言。考虑到上述情况的各种组合, 以及  $P_a \neq P_b$  的情况, 可得  $d(P_a, P_b) = k \times 2^{n-2}$ , 其中  $k = 1, 2, 3$ , 并注意到明显地有当  $P_b = -P_a$  时  $d(P_a, P_b) = 2^n = 4 \times 2^{n-2}$ 。证毕

由定理 3 知, 针对特定的  $\lambda_1, \lambda_2$ , 网络的吸引子 / 环可能在状态  $\begin{bmatrix} P_1 \\ \pm P_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm P_2 \\ P_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 \\ \mp P_2 \end{bmatrix}$  上, 并由定理 4 和 5, 不难得到, 网络吸引子 / 环上状态之间的 Hamming 距离为  $k2^{n-2}, k = 1, 2, 3, 4$ 。

对于  $A_n$  网络, 其所有可能状态的集合即构成了  $2^n$  维超立方体的顶点集合, 如果对该超立方体用级表示, 其中第  $i$  级是顶点坐标  $(v_1, v_2, \dots, v_{2^n})$  中有  $i$  个 1 即  $\sum_{j=1}^{2^n} v_j = i$  的顶点集合, 则网络状态图共有  $2^n + 1$  个级, 即第  $0, 1, 2, \dots, 2^n$  级, 其中第  $i$  级中的顶点总数为  $C_n^i$  ( $n$  中取  $i$  的组合数), 两个不同级上顶点之间的 Hamming 距离就是它们所处级的级差值。图 2 示出了  $n = 4$  时的  $A_4$  网络的状态集合的示意图。第 0 和  $2^n$  级分别只有一个状态  $-e$  和  $e$ , 均为  $A_n$  网的吸引子, 而网络的其余吸引子 / 环距  $-e$  吸引子的距离为  $k \times 2^{n-2}, k = 1, 2, 3, 4$ , 即它们均匀地分布在第  $k \times 2^{n-2}$  级上,  $k = 1, 2, 3, 4$ 。实际上, 吸引子  $e$  就是第  $4 \times 2^{n-2}$  级上的稳定状态。实际上, 第  $4 \times 2^{n-2}$  级的吸引子是  $A_{n-1}$  网的吸引子  $e$  与  $e$  的拼界向量, 第  $3 \times 2^{n-2}$  级上的吸引子 / 环是  $A_{n-1}$  网的非  $e$  特征向量与  $+e$  的拼界向量, 第  $2 \times 2^{n-2}$  级上的吸引子 / 环是  $A_{n-1}$  网的非  $e$  特征向量与非  $e$  特征向量的拼界向量, 第  $1 \times 2^{n-2}$  级的吸引子 / 环是  $A_{n-1}$  网的非  $e$  特征向量与  $-e$  的拼界向量。在图 2 中打  $\times$  的级中存在着  $A_4$  网络的吸引子 / 环。

由定理 2 和 3 知绝大多数  $A_n$  的特征向量及  $A_{n-1}$  特征向量的拼界向量均构成了  $A_n$  网的吸引子 / 环, 并由定理 4 和 5 知,  $A_n$  网的吸引子在网络状态空间中分布的间隔是非常对称和均匀的, 从而可以看到网络本身的对称性 (网络结构) 和均匀性 (网络参数) 带来的是网络稳定吸引状态在状态空间中的对称和均匀分布, 这一性质应该是对称均匀网络的基本性质之一。实际上, 在我们的后续论文<sup>[9]</sup>中将会看到, 吸引子 / 环的均匀对称性并不一定要求网络的均匀对称性。



## 5 结 论

本文通过讨论超立方体图的特征值和特征向量, 详细讨论了以超立方体为结构的离散 Hopfield 网络的吸引特性——吸引子 / 环的位置、数量及其分布, 得出了以下结论:

(1)  $n$  维超立方体图的所有特征值对应的特征向量构成了正交的 Walsh 基;

(2)  $n$  维超立方体结构的离散 Hopfield 网络  $A_n$  网, 其特征值 (除为 0 的特征值外) 所对应的特征向量均为网络的吸引子 / 环, 且大于 0 的特征值所对应的特征向量及其补均为网络的吸引子, 小于 0 的特征值所对应的特征向量及其补基本都为网络的吸引环;  $A_{n-1}$  网的这些吸引子 / 环的拼接所构成的状态均为  $A_n$  网的吸引子 / 环, 且  $A_{n-1}$  网的吸引子的拼接所构成的状态均为  $A_n$  网的吸引子,  $A_{n-1}$  网的吸引子与吸引环的拼接, 以及吸引环与吸引环的拼接所构成的状态均为  $A_n$  网络的吸引环;

(3)  $A_n$  网的吸引子 / 环数目非常多, 为  $O(2^{2^n})$ , 即平均地每个神经元记忆了  $2^n$  个样本 (从而网络规模越大, 每个神经元的记忆能力就越强), 且在稳定吸引状态中, 吸引子仅占  $1/4$ , 而吸引环则占到了  $3/4$ 。

(4)  $A_n$  网的吸引子 / 环在网络状态空间中的分布具有非常好的均匀对称性, 一般来说, 它们之间的距离为  $k \times 2^{n-2}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ 。

在本文所提出的对离散 Hopfield 网络的特征分析方法, 使得研究工作不受网络记忆容量为  $0.138N^{[7]}$  的限制, 我们后续的论文<sup>[9]</sup>中还将证明, 它也不受网络连接矩阵对称或反对称与否的限制, 无需设计能量函数, 对于揭示网络的吸引特性和记忆机理有重要意义。我们将在后续论文<sup>[9]</sup>中将上述结论推广到较为一般的离散 Hopfield 网络。

## 参 考 文 献

- [1] 许进, 保铮, 超立方体的谱, 工程数学学报, 1999, (4), 1-5.
- [2] 汪云九, 神经信息的编码, 97 中国神经计算大会论文集 (CCNS'97), 武汉, 1997, Vol.1, 32-37.
- [3] F. Luccio, L. Pagli, On a new Boolean function with applications, IEEE Trans. on Computers, 1999, 48(3), 296-310.
- [4] R. J. Lechner, Harmonic Analysis of Switching Functions, Recent Development in Switching Theory, Washinton: Academic Press, 1971, 122-229.
- [5] 北京大学数学系, 高等代数, 北京, 高等教育出版社, 1988 年第二版, 第五章.
- [6] 阎平凡, 黄端旭, 人工神经网络—模型, 分析与应用, 合肥, 安徽教育出版社, 1991 年, 第三章.
- [7] J. J. Hopfield, Neural networks and physical system with emergent collective computer abilities, Proc. Natl. Acad. USA, 1982, 79(3), 2554-2558.
- [8] Li Yujian, Wang Xiangdong, Chen Chuan, The maximum number of orthogonal memory patterns, Proc. of 1998 International Conference on Neural Networks and Brain(ICNN & B'98), Beijing, 1998, 79-81.
- [9] 张军英, 许进, 保铮, 一类离散 Hopfield 网络的吸引特性研究, 电子与信息学报, 2001, 23(9), 872-882.

## EIGENVECTOR ANALYSIS OF STABLE STATES FOR A KIND OF DISCRETE HOPFIELD NETWORKS

Zhang Junying    Xu Jin    Bao Zheng

(*Nat. Defense Key Lab. on Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China*)

**Abstract** The eigenvector of  $n$ -cube graph is found and then a kind of Hopfield networks with  $n$ -cube as its structure and connection situation, called  $n$ -cube network, are analysed theoretically for the attractions states/cycles and their distribution in the state space of the network. The analysis shows that the eigenvectors of the connection matrix of the network and their linkages are, in general, either the attraction states or attraction cycles of the net, and the distribution of these states/cycles is symmetric and uniform in state space of the network.

**Key words** Discrete Hopfield network, Eigenvector,  $n$ -cube, Attraction state/attraction cycle

张军英: 女, 1961年生, 教授, 博士, 中国电子学会高级会员. 目前主要从事人工神经网络、遗传算法、智能信息处理等方面的研究工作, 已发表学术论文 30 余篇, 专著一部.

许进: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 在国内外发表学术论文 40 余篇, 专著两部. 主要研究方向为电路与系统, 神经网络、图论、管理工程等.

保铮: 男, 1927年生, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, 中国电子学会会士和雷达信号处理重点实验室学术委员会主任, 研究方向为雷达信号处理与检测.