循环谱密度的两通道最大熵谱估计 [1]

王成毅　　王宏禹

(大连理工大学电子与信息工程学院　大连　116024)

摘　要　对周期平稳随机过程的循环谱密度的估计，过去主要采用时域平均周期图法和频域平滑周期图法，但当短数据时，上述方法的分辨率很低，方差很大。本文提出了循环谱密度的两通道最大熵谱估计，该方法不仅具有很高的分辨率，而且估计的方差也很小，具有较好的估计性能。

关键词　周期平稳随机过程，循环谱密度，谱估计，多通道，最大熵谱估计

中图号　TN911.7

1　引　言

近年来，W. A. Gardner 等人 [1,2] 发展了谱相关理论，该理论在各个领域得到了广泛的应用。自相关函数和功率谱密度是随机过程的两个十分重要的研究对象；相应地，周期平稳随机过程主要研究循环自相关函数和循环谱密度。对循环谱密度的估计主要采用文献 [3] 中的方法：时域平均周期图法和频域平滑周期图法。当数据量比较小时，上述方法的分辨率极低，方差很大。作为现代谱估计的最大熵法有其明显的优点，多通道最大熵谱估计可以用来估计自谱和互谱。本文提出将两通道最大熵谱估计应用于循环谱密度的估计，该方法在短数据情况下，仍具有较好的估计结果。

2　谱相关理论

所谓周期平稳随机过程是指它的均值和自相关函数是时间 t 的周期函数。对于自相关函数

$$R_x(t+\tau/2,t-\tau/2)=E[x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)], \tag{1}$$

它是变量 t 的周期函数，从而可得傅里叶级数形式：

$$R_x(t+\tau/2,t-\tau/2)=\sum_{\alpha}R_x^{\alpha}(\tau)\exp(i2\pi\alpha t), \tag{2}$$

其中

$$R_x^{\alpha}(\tau)=\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{Z}\int_{-Z/2}^{Z/2}R_x(t+\tau/2,t-\tau/2)\exp(-i2\pi\alpha t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

当 $x(t)$ 为周期遍历随机过程时，有

$$\begin{aligned}R_x^{\alpha}(\tau)&=\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{Z}\int_{-Z/2}^{Z/2}x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)\exp(-i2\pi\alpha t)\mathrm{d}t\\&=\langle x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)\exp(-i2\pi\alpha t)\rangle.\end{aligned} \tag{4}$$

[1] 1997-11-14 收到，1998-10-16 定稿
国家自然科学基金资助项目

$R_x^\alpha(\tau)$ 称为循环自相关函数．当 $\alpha=0$ 时，便是通常的自相关函数．可见一个周期平稳随机过程，必存在一个循环频率 α，使 $R_x^\alpha(\tau)$ 不等于零，而对于一般的平稳随机过程，对所有非零 α, $R_x^\alpha(\tau)$ 为零． $R_x^\alpha(\tau)$ 的傅里叶变换为

$$S_x^\alpha(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x^\alpha(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

称为循环谱密度，也称为谱相关函数．当 $\alpha=0$ 时，便是通常的功率谱密度．

谱相关函数也可以表示成以下两信号间的常规互谱密度：

$$U(t)=x(t)\exp(-i\pi\alpha t),\quad V(t)=x(t)\exp(+i\pi\alpha t), \tag{6}$$

则上述两个随机过程的自相关函数的时间平均为

$$<R_U>(\tau)=\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{Z}\int_{-Z/2}^{Z/2}E\{U(t+\tau/2)U^*(t-\tau/2)\}\mathrm{d}t=<R_x>(\tau)\exp(-i\pi\alpha\tau), \tag{7a}$$

$$<R_V>(\tau)=<R_x>(\tau)\exp(+i\pi\alpha\tau), \tag{7b}$$

并且， $U(t)$ 和 $V(t)$ 的互相关函数的时间平均为

$$<R_{UV}>(\tau)=\lim_{Z\to\infty}\frac{1}{Z}\int_{-Z/2}^{Z/2}E\{U(t+\tau/2)V^*(t-\tau/2)\}\mathrm{d}t=R_x^\alpha(\tau). \tag{8}$$

因此，随机过程 $x(t)$ 的循环自相关函数就是 $x(t)$ 的频移信号之间的互相关函数的时间平均．由于谱密度与自相关函数互为傅里叶变换对，则由 (7) 式可得 (5) 式定义的随机过程的谱密度的时间平均为

$$<S_U>(f)=<S_x>(f+\alpha/2),\quad <S_V>(f)=<S_x>(f-\alpha/2), \tag{9}$$

由 (8) 式可得互谱密度的时间平均为

$$<S_{UV}>(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x^\alpha(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)\mathrm{d}\tau=S_x^\alpha(f). \tag{10}$$

文献 [3] 给出了周期平稳随机过程的循环谱密度的经典估计方法：时域平均周期图法和频域平滑周期图法．首先由观测数据计算出二阶循环周期图，然后对循环周期图进行时域平均或者频域平滑．为了得到较高的分辨率和较小的估计方差，这些方法需要有足够长的观测数据；在短数据情况下，估计的效果很不理想．为此，本文提出了循环谱密度的两通道最大熵谱估计法．

3 循环谱密度的两通道最大熵谱估计

由 (10) 式知，循环谱密度为两个频移分量间的常规互谱密度．多通道最大熵谱估计法可以用来估计功率谱密度和互谱密度，而且特别适用于短数据情况．取通道数为 2，得到两通道最大熵谱估计法．因此，可以利用两通道最大熵谱估计法来估计出周期平稳随机信号的两个频移分量间的常规互谱密度，从而得到循环谱密度的估计值．

多通道最大熵谱估计 [4,5] 即多通道 AR 模型参数法，是对观测到的多元时间序列建立 AR 模型，进而估计出模型参数，同时得到各个时间序列的自谱估计和它们之间的互谱估计.

m 通道 p 阶 AR 模型用矩阵差分方程描述为

$$X(t) = -\sum_{k=1}^{p} A_k^H X(t-k) + W(t), \tag{11}$$

其中 $X(t)$ 、 $W(t)$ 为 $m \times 1$ 的向量， A_k 为 $m \times m$ 的矩阵， $W(t)$ 为白噪声向量，“ H ”表示共轭转置。

假设 $W(t)$ 的均方值为最小的，则 (11) 式中 A_k 的选取，应使得 $E\{W^H(t)W(t)\}$ 为最小。将 (11) 式带入并且最小化，得到下列的多元 Yule-Walker 方程：

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_p \\ R_{-1} & R_0 & \cdots & R_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{-p} & R_{-p+1} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

其中

$$R_k = E\{X(t+k)X^H(t)\}, \quad P = E\{W(t)W^H(t)\}. \tag{13}$$

求解 (12) 式，即可得到 p 个矩阵系数 A_k 。

文献 [4] 中给出了多通道 AR 模型参数估计的最小二乘估计法和解 Yule-Walker 方程估计法。对于计算速度要求较高的场合，文献 [4] 也给出了 Levinson 递推算法。文献 [5] 给出了多通道最大熵谱估计的 Burg 递推算法。

多通道 AR 模型的适用性准则较多采用的是阿卡依克最终预测误差 (FPE) 准则：

$$\mathrm{FPE}(p) = \det(P)[(N+1+mp)/(N-1-mp)]^p, \tag{14}$$

其中 N 为观测数据长度， $\det(\cdot)$ 为求矩阵的行列式。

估计出多通道 AR 模型的系数后，可由下式得到功率谱密度 $S(f)$($m \times m$ 的矩阵)：

$$S(f) = [F^{-1}(f)]^H P[F^{-1}(f)], \tag{15}$$

其中

$$F(f) = I + A_1 \exp(-i2\pi f) + \cdots + A_p \exp(-i2\pi pf). \tag{16}$$

I 为 $m \times m$ 的单位阵。从而，可以得到各个时间序列的自谱估计和它们之间的互谱估计.

利用两通道最大熵谱估计法来估计循环谱密度的步骤如下：

(1) 由 (6) 式得到 $x(t)$ 的两个频移信号 $U(t)$ 和 $V(t)$ ；

(2) 由 $U(t)$ 和 $V(t)$ 构成一个两通道的时间序列 $X(t)$ ：

$$X(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}; \tag{17}$$

(3) 建立 (11) 式的两通道 p 阶 AR 模型;

(4) 由 (14) 式确定模型的阶数 p ，估计出模型 (11) 式中的参数 A_k(2×2 的矩阵)；

(5) 根据 (15) 式计算功率谱密度，得到如下的功率谱密度：

$$S(f)=\begin{bmatrix} S_U(f) & S_{UV}(f) \\ S_{VU}(f) & S_V(f) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中， $S_U(f)$ 和 $S_V(f)$ 分别为 $U(t)$ 和 $V(t)$ 的常规功率谱密度； $S_{UV}(f)$ 和 $S_{VU}(f)$ 为 $U(t)$ 与 $V(t)$ 之间的常规互谱密度，二者互为共轭．由 (10) 式知 $S_{UV}(f)$ 即为待估计的循环谱密度．

当循环频率 α=0 时，由于两个频移信号 $U(t)$ 和 $V(t)$ 相同，此时 (11) 式的两通道 p 阶 AR 模型无解，可以采用单通道最大熵谱法来估计功率谱密度．

4 仿真实验

此处提供一个典型的仿真例子．数据长度为 512 ，首先产生一个三阶 AR 模型平稳随机信号：

$$x(n)-2.3396x(n-1)+2.1132x(n-2)-0.7203x(n-3)=e(n). \tag{19}$$

其极点为 $0.74430\pm0.5408i$ 、 0.8510 ，其理论功率谱密度在 $f=0$ 、 ±0.1 处有三个谱峰，且其带宽比较窄，这样是为了检验各种方法的分辨率．现在对上述产生的 AR 信号用 $f=0.2$ 的载频进行调幅得到一个周期平稳信号．该生成信号只在 $\alpha=0$ 和 ±0.4 处有非零的循环谱密度．

对产生的信号采用不同的估计方法进行循环谱密度的估计，由于循环谱密度关于循环频率是对称的，这里只计算 $\alpha=-0.4\sim0$ 处的循环谱密度．以下各图为循环谱密度在二维平面 (f,α) 上的幅值：图 1 为周期平稳随机信号的解 Yule-Walker 方程的两通道最大熵谱估计法，图 2 为采用伯格算法的两通道最大熵谱估计法，图 3 为 8 点频域平滑周期图法．其中两通道最大熵谱估计方法的模型阶数由 (14) 式确定为 6 ．比较上述各图可以看出：图 1 和图 2 的两通道最大熵谱估计法估计效果较好，既有较高的分辨率，又具有很小的方差；图 3 的经典循环谱密度估计方法的方差很大，在 $\alpha=-0.1$ 、 -0.2 和 -0.3 处均有较大的估计值，如果增加频域平滑点数，谱估计的分辨率将降低．

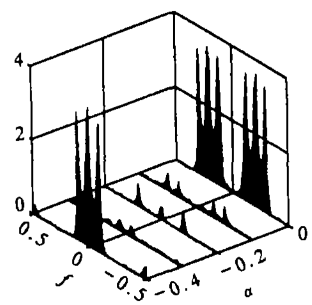

图 1

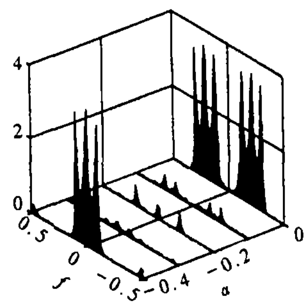

图 2

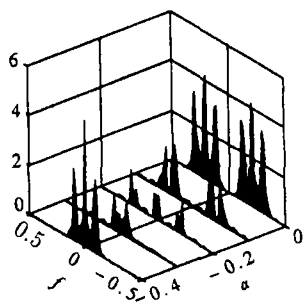

图 3

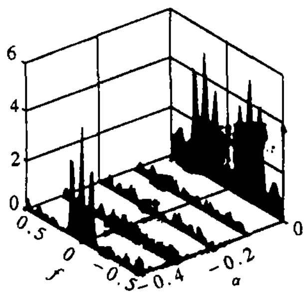

图 4

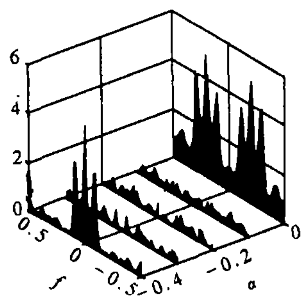

图 5

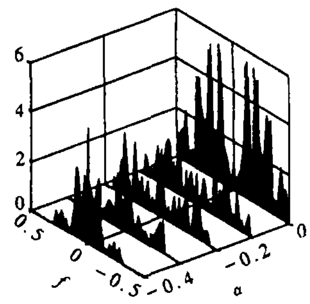

图 6

对上述信号加上一白噪声，其信噪比为 0dB，采用上述的三种方法，分别得到图 4 ~ 6。其中两通道最大熵谱估计方法的模型阶数为 10。由图可见两通道最大熵谱估计法仍有较好的估计结果。

大量的仿真实验表明，在各种数据长度和信噪比情况下，同经典循环谱密度的估计方法相比，两通道最大熵谱估计法都具有较好的估计效果。短数据高信噪比下，经典循环谱密度的估计方法不能同时得到较高的分辨率和较小的估计方差；长数据高信噪比时，两种方法都能得到较好的估计结果；长数据低信噪比下，两通道最大熵谱估计法仍有较好的估计结果。

另外，与通常意义下的谱密度的估计相比较，循环谱密度的估计要求有较长的数据长度，这是因为循环谱密度较之经典谱密度包含了更多的信息，它得到的是二维平面 (f,α) 上的估计值，因而需要更大的数据量。一般说来，要得到较好的估计结果，经典的循环谱密度估计方法需要数万的数据量，而两通道最大熵谱法则相对需要较少的数据量。

5 结 论

本文给出了一种基于两通道最大熵谱估计的循环谱密度估计方法。这种方法特别适合于短数据情况，不仅具有很高的分辨率，而且估计的方差也很小，同经典的循环谱密度估计方法相比，具有明显的优点。仿真实验结果验证了这种方法的有效性。

参 考 文 献

[1] Gardner W A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. Signal Processing [EURASIP], 1986, 11(1): 13–36.

[2] Gardner W A. Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems. Second Edition, NY: McGraw-Hill Inc, 1990, chapter 12.

[3] Gardner W A. Measurement of spectral correlation. IEEE Tans. on ASSP, 1986, ASSP-34(5): 1111–1123.

[4] 杨叔子，吴 雅，等. 时间序列分析的工程应用. 武汉：华中理工大学出版社， 1992, 12 章.

[5] Otto Neall Strand. Multichannel complex maximum entropy (autoregressive) spectral analysis. IEEE Trans. on Automatic Control, 1977, AC-22(4): 634–640.

ESTIMATION OF CYCLIC SPECTRA USING TWO-CHANNEL COMPLEX MAXIMUM ENTROPY (AUTOREGRESSIVE) SPECTRAL ANALYSIS

Wang Chengyi Wang Hongyu

(*School of Electron. and Info. Eng., Dalian University of Technology, Dalian* 116024)

Abstract The main methods for estimation of cyclic spectra for cyclostationary processes are temporally smoothed cyclic periodogram and spectrally smoothed cyclic periodogram. In case of short record length, both methods have low resolution and reliability. This paper uses two-channel complex maximum entropy (autoregressive) spectral analysis method to estimate cyclic spectra. Fine performances such as resolution and reliability can be obtained with this method.

Key words Cyclostationary process, Cyclic spectra, Spectral estimation, Multichannel, Maximum entropy spectral analysis

王成毅： 男， 1971 年生，博士生，从事非平稳随机信号分析和处理的研究.
王宏禹： 男， 1929 年生，教授，博士生导师，从事随机、时变和自适应数字信号处理理论、方法和应用研究.