第 20 卷 第 5 期
1998 年 9 月

电 子 科 学 学 刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol.20 No.5
Sept. 1998

论细胞神经网络的理论基础 [1]

廖晓昕　　王晓君　　傅予力　　沈　轶

(华中理工大学自动控制系　武汉　430074)

摘　要　本文详细讨论了由美国伯克莱加利福尼大学电子学家 L. O. Chua 教授等首创的细胞神经网络理论基础，具体指出了其存在的缺陷及所构造的能量函数用来研究稳定性失效的原因，建议了理论研究的进一步方向.

关键词　细胞神经网络，能量函数，稳定性，平衡位置

中图号　TN-052

1 引　言

1988 年，美国伯克莱加利福亚大学 L.O.Chua 等受 Hopfield 神经网络的直接影响和细胞自动机的启发，以及积他本人多年在非线性运放电路中的研究成果，首创性地提出了细胞神经网络的理论 [1] 和应用 [2]，很快就得到各方面的应用成果，并召开了多次细胞神经网络的国际会议，发表了大量的论文.

理论是应用的基础. 学习了文献 [1] 之后，发现不少问题. 在发表了文献 [3, 4] 之后并未对文献 [1] 中的缺陷作任何评论，本文本着追求理解，实事求是，互相探讨，抛砖引玉的精神，与原作者们，读者们一起讨论，商榷.

2　细胞神经网络理论 [1] 的简略复述

为方便读者，现将文献 [1] 的全部理论结果简略复述如下. 细胞神经网络状况方程:

$$C\mathrm{d}V_{x_{ij}}/\mathrm{d}t = -(1/R_x)V_{x_{ij}}(t) + \sum_{(k,l)\in N_r(i,j)} A(i,j,k,l)V_{y_{kl}}(t) + \sum_{(k,l)\in N_r(i,j)} B(i,j,k,l)V_{u_{kl}} + I \triangleq f_{ij}, \quad 1\le i\le M, \quad 1\le i\le N; \tag{1}$$

式中 $C>0, R_x>0$ ，分别表电容、电阻. $V_{x_{ij}}$ 表电压， I 表电流. $V_{u_{kl}}$ 表输入电压.

输出方程:

$$V_{y_{ij}}(t) = (1/2)(|V_{x_{ij}}(t)+1| - |V_{x_{ij}}(t)-1|), \quad 1\le i\le M, \quad 1\le i\le N; \tag{2}$$

输入方程:

$$V_{u_{ij}} = E_{ij}, \quad 1\le i\le M, \quad 1\le i\le N; \tag{3}$$

1 1996-10-15 收到， 1997-09-02 定稿

国家自然科学基金 (No.69674008) 资助课题和国家教委博士学科点专项科研基金 (No.97048722) 资助课题

约束条件：

$$\left.\begin{aligned}|V_{u_{ij}}| \le 1, \quad 1 \le i \le M, \quad 1 \le i \le N;\\ |V_{x_{ij}}| \le 1, \quad 1 \le i \le M, \quad 1 \le i \le N.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

文献 [1] 给出了以下 5 条定理：

定理 1　细胞输出电压的最大值定理：

$$V_{\max} = 1 + R_x|I| + R_x \max_{\substack{1\le i\le M\\ 1\le i\le N}} \left[\sum_{(k,l)\in N_r(i,j)} (|A(i,j,k,l| + |B(i,j,k,l)|\right].$$

定理 2　Lyapunov 函数的有界性定理，即

$$|E(t)| \le E_{\max} = \frac{1}{2}\sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}|A(i,j,k,l)| + \sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}|B(i,j,k,l)| + MN\left(\frac{1}{2R_x} + |I|\right),$$

其中 $E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}A(i,j,k,l)V_{y_{ij}}V_{y_{kl}} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_x}\sum_{(i,j)}V_{y_{ij}}^2 - \sum_{(i,j)}\sum_{(k,l)}B(i,j,k,l)$ $V_{y_{ij}}V_{u_{kl}} - \sum_{(ij)}IV_{y_{ij}}$.

定理 3　稳定性定理：$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} \le 0$.

定理 4　状态电压输出电压终值定理：

$$\lim_{t\to\infty}E(t) = \text{const} \qquad \text{以及} \qquad \lim_{t\to\infty}\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = 0.$$

推论　$\lim_{t\to\infty}V_{x_{ij}} = \text{const}$　或　$\lim_{t\to\infty}\mathrm{d}V_{x_{ij}}(t)/\mathrm{d}t = 0$.

定理 5　最大反馈参数定理。若 $A_{(i,j,k,l)} > 1/R_x$，则 $\lim_{t\to x}|V_{x_{ij}}| > 1$，$1 \le i \le M$，$1 \le i \le N$ 及 $\lim_{t\to x}|V_{y_{ij}}| = \pm 1$，$1 \le i \le M$，$1 \le i \le N$.

定理 4 后的推论是全文的核心内容，是定理 2, 3, 4 的主要目的，文献 [2] 把它作为定理单独再列出来，即为

定理 6　在暂态过程之后，细胞神经网络总是趋于稳定平衡位置，换言之有

$$\lim_{t\to\infty}V_{x_{ij}}(t) = \text{const} \qquad \text{或} \qquad \lim_{t\to\infty}\mathrm{d}V_{x_{ij}}(t)/\mathrm{d}t = 0.$$

3　我们的分析及评论

我们认为，文献 [1] 除了定理 1 没有错误，当然，界的估计还可以改进，其它定理、推论都是存疑或不正确的．为什么？我们的理由如下：

(1) 定理 2— 定理 6 的结论都是根据 $E(t)$ 而获得的，然而所构造的能量函数 $E(t)$ 仅仅在 $\max_{i,j}|V_{x_{ij}}| < 1$ 内有效．例如 $\min_{i,j}|V_{x_{ij}}| \ge 1$ 上，$E(t)$ 为常数，它的导数恒为零，即 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} \equiv 0$. 故在这区域内，$V_{x_{ij}}$ 的变化趋势根本无法知道．作为常数的 E ，在这些区域内对 $|V_{x_{ij}}|$ 的动态信息控制完全失效．即使有某些 $|V_{x_{ij}}| < 1$ ，其它的 $|V_{x_{kl}}| \ge 1$ ，$E(t)$ 也不能

用来控制 $V_{x_{kl}}$ 的变化。例如，不妨设 $|V_{x_{11}}|<1$，其它的 $|V_{x_{kl}}|\geq 1$。由文献 [1] 的 (19)–(20a) 式有

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=-C\left[\frac{\mathrm{d}V_{y_{11}}}{\mathrm{d}t}\right]^2=-C\left[-\frac{1}{R_x}V_{x_{11}}(t)+\sum_{(k,l)\in N_r(1.1)}A(1,1,k,l)V_{y_{kl}}\right.$$
$$\left.+\sum_{(k,l)\in N_r(1.1)}B(1,1,k,l)V_{u_{kl}}+I\right]^2\leq 0. \tag{6}$$

满足 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=0$ 的 $V_{x_{ij}}$ 是一个 $MN-1$ 维流形，远非只有 (1) 式的平衡位置。根本无法判言 $\lim_{t\to\infty}V_{x_{ij}}=\mathrm{const}$。

文献 [1] 对 $E(t)$ 不含有 V_x 而只含 V_y, V_u 似有疑虑。便加了注 (a) " $E(t)$ 仅是输入电压 V_u 和输出电压 V_y 的函数，虽然它并未包含状态变量的全部信息，但我们从 $E(t)$ 的性质可导出状态变量的稳定特性"。注记 (a) 是牵强附会的。因为 $V_{y_{ij}}$ 虽为 $V_{x_{ij}}$ 的函数，但反函数不存在。在 $E(t)=C$ 中对给定的 $V_{y_{ij}}, V_{u_{ij}}$ 有无穷多 $V_{x_{ij}}$ 与之对应，得不出确定的 $V_{x_{ij}}$ 来，故 $V_{x_{ij}}$ 的变化，无法由 $E(t)$ 测定。

文献 [1] 中的注 (b) " $E(t)$ 可释为细胞神经网络的广义能量，尽管它的物理意义尚不十分清楚，$E(t)$ 是收敛到一个局部极小值，细胞神经网络产生一个所希望的输出值"，然而由 $\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}\leq 0$，即使 $E(t)\to\mathrm{const}$ 也不能推出 V_x 必然趋于平衡位置。甚至 $\lim_{t\to\infty}V_x$ 不存在。

我们来看一个仅有两个细胞 (2 维) 的例子，且取 $R_x=1, u_{v_{kl}}=0, I=0$, 此时

$$E(t)=\frac{1}{2}A(11,11)V_{y_{11}}^2+\frac{1}{2}A(22,22)V_{y_{22}}^2-\frac{1}{2}A(11,12)V_{y_{11}}V_{y_{22}}-\frac{1}{2}A(22,11)V_{y_{22}}V_{y_{11}}. \tag{7}$$

$E(t)$ 在 $V_{x_{11}}, V_{x_{12}}$ 平面上九个不同区域内取不同的值 (图 1)。

$E(t)$ 在 $D_1=\{V_{x_{11}}\geq 1, V_{x_{22}}\geq 1\}$, $D_2=\{V_{x_{11}}\leq -1, V_{x_{22}}\geq 1\}$, $D_3=\{V_{x_{11}}\leq -1, V_{x_{22}}\leq -1\}$，$D_4=\{V_{x_{11}}\geq 1, V_{x_{22}}\leq -1\}$ 内为常数，不能控制状态变量 $V_{x_{11}}, V_{x_{22}}$ 的走向。

$E(t)$ 在 $\sigma_1=\{|V_{x_{11}}|<1,\ V_{x_{22}}\geq 1\}$, $\sigma_2=\{|V_{x_{11}}|<1,\ V_{x_{22}}\leq -1\}$ 内仅为 $V_{x_{11}}$ 的函数，仅能测定 $V_{x_{11}}$ 的变化，不能判定 $V_{x_{22}}$ 的变化。

$E(t)$ 在 $\sigma_3=\{|V_{x_{22}}|<1,\ V_{x_{11}}\geq 1\}$, $\sigma_4=\{|V_{x_{22}}|<1,\ V_{x_{11}}\leq -1\}$ 上仅为 $V_{x_{22}}$ 的函数，仅能测定 $V_{x_{22}}$ 的变化，不能判定 $V_{x_{11}}$ 的变化。

$E(t)$ 在正方形 $\Omega=\{|V_{x_{11}}|<1,\ |V_{x_{22}}|<1\}$ 内才是 $V_{x_{11}}, V_{x_{22}}$ 的函数。$E(t)$ 的变化才是可以测定 $V_{x_{11}}, V_{x_{22}}$ 的变化。

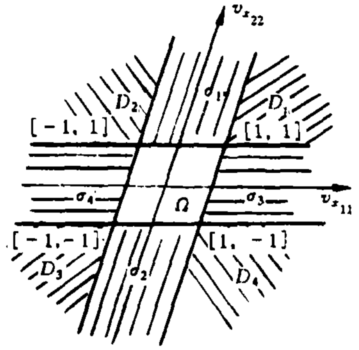

图 1

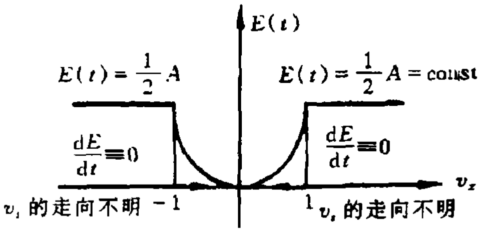

图 2

我们不妨再看仅有一个细胞的例子，更能直观地看出 $E(t)$ 的几何全貌。

令 $i=j=k=l=1, V_{u_{kl}}=0, R_x=1$, 此时， $E(t)=\frac{1}{2}A(11,11)V_y^2$ ，如图 2 所示。 $E(t)$ 仅在 (-1, 1) 内可探测 V_x 走向，但在 $V_x\le -1, V_x\ge 1$ 内， $E(t)$ 为常数，无法控制 V_x 的走向。故此 $E(t)$ 不仅物理意义不清，数学功能也失效。

(2)Hopfield 型能量函数 [5,6] 是根据构造 Lyapunov 函数的梯度法演化而来。权矩阵的对称性保证了广义旋度条件成立从而 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ 的积分可取与积分路径无关的最简形式，可以用来判定神经网络平衡点集的吸引性，亦即 Hopfield 意义下的稳定性。然而 L.O.Chua 等模仿 Hopfield 能量函数而所构造的细胞神经网络能量函数，无任何根据可言，姑且揣摸它的构成，似乎与下列方式巧合。将 f_{ij} 中的 $V_{x_{ij}}$ 一律换成 $V_{y_{ij}}$ 后将 f_{ij} 记为 $\tilde{f}_{ij}$, 按着

$$E(t)=\int_0^{V_{y_{11}}}\tilde{f}_{11}(\xi_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}\xi_1+\int_0^{V_{y_{12}}}\tilde{f}_{12}(V_{y_{11}},\xi_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}\xi_2$$
$$+\cdots+\int_0^{V_{y_{MN}}}(V_{y_{11}},V_{y_{12}},\cdots,V_{y_{MN-1}},\xi_{MN})\mathrm{d}\xi_{MN} \tag{8}$$

而成。然而，一般地， $\partial\tilde{f}_{ij}/\partial V_{y_{kl}}\ne\partial\tilde{f}_{kl}/\partial V_{y_{ij}}$, 广义旋度条件不满足，故上述积分没有根据。参数对称假设 $A(i,j,k,l)=A(k,l,i,j)$ 陡然虚设。其次，将 $V_{x_{ij}}$ 换成 $V_{y_{ij}}$ 没有道理。总之， $E(t)$ 来历不明。

(3) 为研究全局稳定，人们有意引进 Lyapunov 函数的径向无界的概念，正需要无界的函数才能控制远离平衡点的轨线走向，而文献 [1] 的定理 2 证明 E 有界。正说明 E 不能用来研究大范围内解的走向。顺便说一句，许多关于神经网络的文章都说所构造能量函数有界，是不妥的。正确的说法应该是把解代入能量函数的变量之后是有界的。不少文献一个常见的错误往往是由能量函数 E 沿解的极限存在而断言解的极限存在，除非 E 沿解严格单调。

(4) 文献 [1] 中的定理 5，是该文作者们认为最有实用价值的定理，却没有严格证明。且条件强，结论一般不正确。文献 [4] 第 1043 页的例 1 就是一个反例。按文献 [1] 的定理 5，断定所有解最终要进入文献 [4] 第 1044 页的区域 D_2, D_3, D_4, D_5 之一，然而文献 [4] 详细地证明了有些解趋于 P_6，有些解趋于 P_9。 P_6, P_9 都不属 D_2, D_3, D_4, D_5 之内。

(5) 文献 [1] 的核心结论： $\lim_{t\to\infty}V_{x_{ij}}=$const 也是不正确的。文献 [4] 的例 2 就是一个存在周期解的反例。该例说明了存在一个二维周期轨道流形簇，每一个解该以一个周期轨道为极限，即说明细胞神经网络存在振荡现象决不是永远由运动趋于静止。

4 理论研究方法建议

从以上分析起见，具有广泛应用、且易于电子电路实现的细胞神经网络的理论基础是薄弱的，远远不足支持广泛的可靠的应用前景，重新研究它的理论基础很有必要。

由于细胞神经网络是一种模拟大规模集成电路的非线性、实时、高速并行处理的阵列处理器，它的输出函数的分段线性特征不具有 Hopfield 神经网络中输出函数的光滑性和严格单调性，故仿照 Hopfield 能量函数来研究其核心问题稳定性是失败的。

我们建议将 R^1 分成 $(-\infty,-1]$ $[-1,1]$ $[1,+\infty)$ 三个互不包含的独立区间，然后将 R^{MN} 分为 3^{MN} 个独立的区域 $\mathcal{D}$ 使得每个区域 $\mathcal{D}$ 内一细胞神经网络状况方程是一个只含状态变量的非齐次常系数常微分方程组。因此，整个全空间 R^{MN} 中的非线性细胞神经网络系统就分解为 3^{MN} 个分区域的线性齐次微分方程组的机械组合。对于每个线性方程组，可把解的表达式写出来。完全可根据系数矩阵弄清楚平衡位置的个数、表达式、稳定性、以及周期解的存在性等等。故细胞神经网络的理论问题，本质上是一簇常系数线性常微分方程组的定性问题。而后者最后又归结为代数问题。从而可建立一般结论。文献 [3, 4] 正是根据这种设想而立论的。期望沿此思想还可以深入研究下去，例如混沌现象、分岐问题等等。

参 考 文 献

[1] Chua L O, Yang L. Cellular neural network theory. IEEE Trans. on Circuits and Syst., 1988, 35(10): 1257–1272.

[2] Chua L O, Yang L. Cellular neural network application. IEEE Trans. on Circuits and Syst., 1988, 35(10): 1273–1290.

[3] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论 (1). 中国科学 (A), 1994, 24(9): 902–910.

[4] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论 (2). 中国科学 (A), 1994, 24(10): 1037–1046.

[5] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergont collective computational abilities. Proc Natl. Acad. Sci. USA, 1982, 79: 2554–2558.

[6] Hopfidd J J. Neurals with graded response have collective computational properties like those or two-state neurons. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1984, 81: 3088–3092.

[7] 廖晓昕，吴新余，陈惠开. On stability of cellular neural networks. 南京邮电学院学报, 1994, 14(4): 54–58; 南京邮电学院学报, 1995, 15(1): 12–19.

ON THEORETICAL BASIS OF CELLULAR NEURAL NETWORKS

Liao Xiaoxin Wang Xiaojun Fu Yuli Shen Yi

(*Dept. of Auto. Control, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract In this paper the theoretical basis of cellular neural networks first created by L. O. Chua(1988) are discussed. Some fault are shown, new research method are suggested.

Key words Cellular neural network, Energy function, Stability, Balance position

廖晓昕： 男，1938 年生，教授，博士生导师，从事神经网络与非线性控制的理论研究.
王晓君： 女，1938 年生，副教授，从事稳定性的几何方法研究.
傅予力： 男，1959 年生，副教授，博士生，从事神经网络与非线性控制的理论研究.
沈 轶： 男，1964 年生，讲师，博士生，从事神经网络与非线性控制的理论研究.