

具有紧支撑对偶的双正交插值子波系统正则度的优化设计¹

水鹏朗 保 铮

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘 要 本文研究了对称内插尺度函数及其对偶的参数化表示。在此基础上,提出了一般插值子波系统的正则度优化设计方法和相应的 Minimax 优化算法。优化结果表明:内插尺度函数正则度的优化设计明显提高了系统的逼近能力;而对偶正则度的优化设计增加了对偶的光滑性,并且分析滤波器的通带、阻带特性也得到了显著的改善。

关键词 插值子波, 双正交性, 正则度, Minimax 算法

中图分类号 O224, TN911.7

1 问题的提出

把插值理论与子波、多分辨分析相结合, G.Deslauriers, S.Dubuc^[1,2], D.L.Donoho^[3], A.Harten^[4] 和 W.Sweldens^[5] 已建立了插值子波的基本框架。插值子波分为样条插值子波和 Donoho 型插值子波两大类;前一类是非紧支撑的,后一类是紧支撑的,目前研究多集中于后一类。以 Deslauriers-Dubuc 基本内插函数为尺度函数, Donoho^[3] 构造了一类内插多分辨分析。该系统的子波没有消失矩并且相应的对偶尺度函数是 Delta 函数,频率局部性很差。后来, N.Saito 和 G.Beylkin^[6] 构造了非紧支撑对偶的内插子波, W.Sweldens 构造了改进的 Donoho 子波。这些子波系统与 Donoho 子波相比,性能得到了一定改善,但仍存在设计缺乏灵活性的缺点。为此,我们已经构造了一类紧支撑的插值子波——一般插值子波^[7],它在设计上具有极大的灵活性。

Deslauriers-Dubuc 基本内插函数是具有最短支撑最大消失矩的对称内插尺度函数。尺度滤波器系数完全由消失矩阶数决定。而内插尺度函数逼近性能的分析表明^[3]:对一大类光滑信号,逼近阶不是单纯取决于消失矩而是取决于消失矩和正则度的最小值。随支撑长度的增加, Deslauriers-Dubuc 内插尺度函数的消失矩比正则度增加的快得多。因此通过单纯增加消失矩提高逼近阶是不经济的。因此,通过适当增加内插尺度函数的支撑长度,牺牲部分消失矩,获得一定的自由度进行正则度的优化设计是提高逼近阶的有效途径。再者,对偶正则度的优化设计也有利于改善系统的整体性能。

2 一般插值子波的结构与性质

一般插值子波是 Donoho 型子波的一般化,可描述如下:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(2x) + \sum_m h(m)\varphi(2x - 2m + 1), \\ \psi(x) &= 2\varphi(2x - 1) - \sum_m g(m)\varphi(x - m),\end{aligned}\tag{1}$$

h, g 是两个实插值滤波器,它们完全决定了该子波系统(包括尺度函数,子波函数及对偶)。 $g=0$ 对应于 Donoho 子波, h, g 为 Deslauriers-Dubuc 对称内插滤波器时,对应于改进的 Donoho 子波。

¹ 1998-04-21 收到, 1998-12-11 定稿
国家自然科学基金项目(69831040)资助课题

对一般插值子波有下面两个基本定理^[7]:

定理 1 (1) 式的内插尺度函数和子波函数具有 $D + 1$ 阶消失矩充要条件为

$$\sum_m m^d h(m) = (1/2)^d, \quad \sum_m m^d g(m) = (1/2)^d, \quad d = 0, 1, 2, \dots, D, \quad (2)$$

当滤波器 h, g 对称时, 尺度函数和子波函数对称.

定理 2 (1) 式的一般插值子波的对偶是紧支撑的, 满足双尺度方程:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= 2\tilde{\varphi}(2x) + \sum_m g(-m)\tilde{\psi}(x-m), \\ \tilde{\psi}(x) &= \tilde{\varphi}(2x-1) - \sum_m h(1-m)\tilde{\varphi}(2x-2m), \end{aligned} \quad (3)$$

并且当尺度函数和小波函数具有 $D + 1$ 阶消失矩时, 对偶尺度函数和子波也具 $D + 1$ 阶消失矩.

子波系统设计中, 初始化、算法的有效性、滤波器组的时频特性是人们关心的三个基本问题. 一般插值子波系统具有简单的初始化、快速有效的分解和重构算法, 下面我们集中研究反映时频特性的重要性能指标之一——正则度的优化设计问题.

3 尺度函数的参数化表示

对于 (1) 式的插值尺度函数, 如果它是对称的并具有 $D + 1$ 阶消失矩 (D 是奇数), 则

$$H(\omega) = 1/2 + \sum_m h(m) \cos((2m-1)\omega) = \cos^{D+1}(\omega/2)q(\omega). \quad (4)$$

令 $x = \cos(\omega/2)$, 则

$$H(x) = 1/2 + \sum_m h(m) T_{4n-2}(x) = x^{D+1} \Delta(x^2), \quad (5)$$

这里 $T_{4n-2}(x)$ 表示 $4n - 2$ 阶切比雪夫多项式, $\Delta(x^2)$ 是一个多项式, 满足 $\Delta(0) = 1$.

定理 3 $H(x) = x^{D+1} \Delta(x^2)$, $\Delta(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ 对应到一个具有 $D + 1$ 阶消失矩的对称插值尺度函数当且仅当多项式 $\Delta(x)$ 的系数 a_0, a_1, \dots, a_N 满足 $a_0 \neq 0$ 和方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= 1, \\ \sum_{n=0}^N 2^{-n} C_{L+n}^{2k} a_n &= \delta(2k), \quad 0 < 2k \leq L, \\ \sum_{n=2k-L}^N 2^{-n} C_{L+n}^{2k} a_n &= 0, \quad L < 2k \leq L + N. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

方程组 (6) 中, $L = (D + 1)/2$.

证明 令 $\omega = 2 \arccos(x)$, 则 $x^2 = (1 + \cos(\omega))/2$, 于是,

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^L \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^n = \frac{1}{2^L} \sum_{n=0}^N \left(\sum_{l=0}^{L+n} \frac{a_n}{2^n} C_{L+n}^l \cos^l \omega\right) \\
 &= \frac{1}{2^L} \left[\sum_{l=0}^L \left(\sum_{n=0}^N 2^{-n} a_n C_{L+n}^l\right) \cos^l \omega + \sum_{l=L+1}^{L+N} \left(\sum_{n=l-L}^N 2^{-n} a_n C_{L+n}^l\right) \cos^l \omega \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

我们知道, $\cos^{2k+1}\omega = \sum_{l=0}^k b_l \cos((2l+1)\omega)$ 而 $\cos^{2k}\omega = \sum_{l=0}^k c_k \cos(2l\omega)$, 因此, $H(\omega)$ 对应于一个具有 $2L = D+1$ 阶消失矩的对称插值尺度函数的充要条件是: $\Delta(1) = 1, \Delta(0) \neq 0$, 并且 (7) 式的展开式中 \cos^{2k} 的系数等于零 ($0 < 2k \leq L+N$). 该充要条件的一个等价条件就是条件 (7) 式.

通过该充要条件, 就可把对称插值尺度函数的设计转化为多项式 $\Delta(x)$ 的设计. 比如对于 $D=3, N=3$ 的对称插值尺度函数, 相应的 $H(x) = x^4 \Delta_t(x^2)$, Δ_t 是一个单参数 3 次多项式:

$$\Delta_t(x) = t + (10 - 4t)x + (5t - 15)x^2 + (6 - 2t)x^3. \quad (8)$$

(8) 式中, $t=0$ 对应于 6 阶消失矩的 Deslauriers-Dubuc 基本插值函数. 对参数化的插值尺度函数, 可以通过参数的优化选择改善正则度.

h, g 对称时, 插值尺度函数对称, 子波函数关于 $x=0.5$ 对称而对偶尺度函数也是对称的. 对偶尺度函数对应的低通滤波器频率响应为

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}(\omega) &= 1 + (1/2)e^{j\omega} B(e^{-j\omega}) - (1/2)e^{2j\omega} A(e^{-2j\omega})B(e^{-j\omega}) \\
 &= 1 + (1/2)[(1 + e^{j\omega} B(e^{-j\omega}) - 1)][2 - (1 + e^{j\omega} A(e^{-2j\omega}))] \quad (9)
 \end{aligned}$$

在 (9) 式中令 $x = \cos(\omega/2)$, 则有以下结论:

如果插值尺度函数具有 $D+1$ 阶消失矩并且 $H(x) = x^{D+1}\Delta(x^2)$, 对称插值滤波器 g 满足 $\sum_m m^v g(m) = (1/2)^v, v = 0, 1, 2, \dots, V$, 则

$$\tilde{H}(x) = x^{V+1}\Theta(x) + x^{D+1}\Delta(x^2) + x^{D+V+2}\Delta(x^2)\Theta(x). \quad (10)$$

因此, 对偶尺度函数的设计主要集中在对插值滤波器 g 或者对多项式 $\Theta(x)$ 的设计. 当 $D=V$ 和 $\Delta(x)$ 给定的情况下,

$$\tilde{H}(x) = x^{D+1}(\Theta(x) + \Delta(x^2) + x^{D+1}\Delta(x^2)\Theta(x)), \quad (11)$$

对偶尺度函数的参数表示相当于多项式 $\Theta(x)$ 的参数表示. 因此, 对应于 (11) 式的对偶尺度函数的性质取决于 D 和多项式 $\tilde{\Delta}(x): \tilde{\Delta}(x) \equiv \Theta(x) + \Delta(x^2) + x^{D+1}\Delta(x^2)\Theta(x)$. 例如 $V=3$ 时, 单参数 $\Theta(x)$ 如 (8) 式右端所示.

4 正则度和极小极大 Minimax 算法

子波系统的重要指标之一——正则度的有效估计一直是子波基础理论的一个难点. 基于 Fourier 分析^[8] 的估计方法易于实现但往往具有一定偏差, 而基于矩阵无穷乘积的纯时域估计方法^[9] 具较高的估计精度, 但计算极为复杂. 下面我们采用前一种估计方法.

(1) 式的插值尺度函数, 如果它具有 $D+1$ 阶消失矩, 则它的正则度 $\lambda(\varphi)$ 满足:

$$\lambda(\varphi) > D - \log 2(\max_{x \in [0,1]} |\Delta(x)|) - \varepsilon \quad (12)$$

如果 (3) 式的对偶尺度函数具有 $D + 1$ 阶消失矩, 则它的正则度 $\lambda(\tilde{\varphi})$ 满足:

$$\lambda(\tilde{\varphi}) > D - \log 2(\max_{x \in [0,1]} |\tilde{\Delta}(x)|) - \varepsilon \quad (13)$$

ε 是一个任意小的正数.

因此, 给定消失矩情况下, 子波系统正则度的优化设计等价于选择最优参数使得 $\max_{x \in [0,1]} |\Delta(x)|$ 和 $\max_{x \in [0,1]} |\tilde{\Delta}(x)|$ 最小. 在 $\Delta(x)$ 和 $\tilde{\Delta}(x)$ 中, 自由参数个数与消失矩数、滤波器 h 、 g 的支撑长度有关. 因此, 系统正则度的优化设计可描述为: 增加滤波器 h 的支撑长度改善插值尺度函数的正则度; 然后固定 h , 增加滤波器 g 的支撑长度改善对偶的正则度. 这都涉及到最大值最小化的优化问题.

这类优化问题在许多实际应用中都会碰到. 它的一般形式可描述如下:

设 $F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M, x)$ 是 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M, x \in [0, 1]$ 的光滑函数, 求最优参数 $\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}}, \dots, \mu_M^{\text{opt}}$ 使得目标函数:

$$J(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \equiv \max_{x \in [0,1]} |F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M, x)| \quad (14)$$

最小. 目前, 这类问题缺乏比较完备 (包括算法和性能分析) 的算法, 特别是对比较复杂的函数. 针对本文的情况我们考虑下面简单情况, 即 $F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M, x)$ 关于参数是线性的, 关于 $x \in [0, 1]$ 是多项式. 这时, 优化问题可通过下面综合梯度算法求解.

Minimax 问题的综合梯度算法:

(1) 参数初始化 $\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)} = \dots = \mu_M^{(1)} = 0$.

(2) 峰值点搜索 计算 $F(n) = F(\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_M^{(k)}, \frac{n}{N}), n = 0, 1, 2, \dots, N$; 令 $R_k = \max(|F(n)|)$, 对于一个小正数 δ , 搜索满足 $|F(n(l))| \geq R - \delta$ 的数据点 $\{n(l) : l \in \Omega\}$.

(3) 计算综合梯度向量 $\text{Grad}(p) = \sum_{l \in \Omega} \text{Sign}(F(n(l))) \frac{\partial}{\partial \mu_p} F(\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_M^{(k)}, \frac{n(l)}{N}), p = 1, 2, \dots, M$.

4 修正参数值 $\mu_p^{(k+1)} = \mu_p^{(k)} - \lambda \text{Grad}(p), p = 0, 1, \dots, M$. 这里 λ 是修正步长, 有时也可采用变步长.

(5) 如果 $|R_{k+1} - R_k| < \varepsilon, \mu_p^{\text{opt}} = \mu_p^{(k+1)}, p = 1, 2, \dots, M$, 程序结束; 否则, GOTO(2). ε 是一个控制门限.

这里梯度向量不采用最大值点的梯度而采用峰值附近梯度的代数平均——综合梯度向量是为了有效克服跷跷板效应. 所谓的跷跷板效应就是算法进行到一定程度时, 往往出现多个高度接近的峰值. 单纯压低最高峰会使次高峰抬高, 目标函数出现振荡. 通过多个峰值附近梯度向量的代数平均能够有效克服它. 数值计算结果表明, 该算法是有效的.

5 正则度的优化设计

为消除初始化时的斜投影误差, 一般把插值尺度函数作为综合尺度函数. 因此, 插值尺度函数正则度的提高对改善系统对光滑信号的逼近性能是有益的; 对偶正则度的提高有利于分析滤波器时频特性的改善.

插值尺度函数的单参数优化设计可以描述为: $\min_s \{ \max_{x \in [0,1]} |\Delta_s^{(D+1)}(x)| \}, \Delta_s^{(D+1)}(x)$ 表示 $D + 1$ 阶消失矩的对称内插尺度函数对应的单参数多项式. 通过 Minimax 优化算法得到的正则度下界如下表 1 所示:

表 1 单参数优化插值尺度函数正则度的下界

D	3	5	7	9
Deslauriers-Dubuc 插值尺度函数	1.4150	1.6781	1.8707	2.0227
单参数优化尺度函数	2.0000	2.8801	3.5236	4.0259

从表 1 可以看出, 这样的优化设计对插值尺度函数正则度的改善是明显的. 而相应的代价是插值滤波器的长度增加为 2, 这样的计算量代价是非常小的. 因此, 这对提高子波系统的综合性能是非常有益的. 对带限信号的逼近能力的比较有力地说明了这一点.

带限信号是信号处理中最常见的信号, 一个插值尺度函数生成的多分辨空间对带限信号的逼近能力满足下面关系式: 对任一满足 $\hat{f}(\omega) = 0, |\omega| > 2^N \pi$ 的带限信号 $f(x)$ 和一个插值尺度函数 $\varphi(x)$, 有:

$$\|f(x) - P_{V_{N+L}}^{(\varphi)}(f)(x)\|_2 = \|f(x) - \sum_n f(n/2^{N+L})\varphi(2^{N+L}x - n)\|_2 \leq C(L, \varphi)\|f\|_2. \quad (15)$$

$C(L, \varphi) = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/2^L}^{\pi/2^L} (\delta(k) - \hat{\varphi}(\omega - 2k\pi))^2 d\omega \right]^{1/2}$ 与信号无关, $\delta(k)$ 是 Kronecker 符号. 2^L 等于采样频率与 Nyquist 采样频率的比. 常数 $C(L, \varphi)$ 是尺度函数 φ 在 2^L 倍 Nyquist 采样频率下对带限信号的逼近相对误差的上界. $C(L, \varphi)$ 越小, 逼近能力越强. Deslauriers-Dubuc 插值尺度函数与单参数优化设计插值尺度函数的 $C(L, \varphi)$ 如表 2 所示:

表 2 逼近性能的比较

类型		D				
		3	5	7	9	
		$C(L, \varphi)$				
Dubuc 插值 尺度函数	L	0	0.2806	0.2531	0.2361	0.2239
		1	0.0191	0.0070	0.0028	0.0012
单参数优化 插值尺度函数	L	0	0.2447	0.2301	0.2202	0.2122
		1	0.0031	0.0012	0.000662	0.000343

从表 2 可以看出, 优化设计后的尺度函数的逼近性能得到显著改善. 对带限信号, 只需要两倍 Nyquist 采样频率, 逼近误差不超过百分之一. 而非插值尺度函数, 往往需要 4 倍的 Nyquist 采样频率才能达到这一要求^[10].

传统插值子波的构造中, 对偶性质的讨论甚少. 对偶的正则度决定了分析滤波器组的时频特性, 这是决定子波系统综合性能的重要因素之一. 插值尺度函数为 Deslauriers-Dubuc 基本插值函数时, 对偶的正则度较差. 对偶尺度函数正则度的优化设计思路: 给定插值滤波器 h (或插值尺度函数), 通过设计插值滤波器 g 提高对偶的正则度. 通过求解关于参数化多项式 $\tilde{\Delta}(x)$ 的 Minimax 优化问题来具体实现.

表 3 给出优化设计前后对偶正则度的下界. 包括三种典型情况, (I) 未进行优化设计 $h = g$ 为 Deslauriers-Dubuc 插值滤波器, 对应于改进的 Donoho 子波; (II) 尺度函数采用 Deslauriers-Dubuc 尺度函数; (III) 尺度函数采用表 1 中单参数优化尺度函数; 则对偶正则度的单参数优化设计结果如下:

几种对偶尺度函数时域波形如图 1 所示:

表 3 对偶尺度函数正则度的下界

D	3	5	7	9
类型 I	-0.1699	0.0931	0.2858	0.4378
类型 II	0.8515	1.4832	2.0104	2.4635
类型 III	0.8293	1.4681	2.0110	2.4635

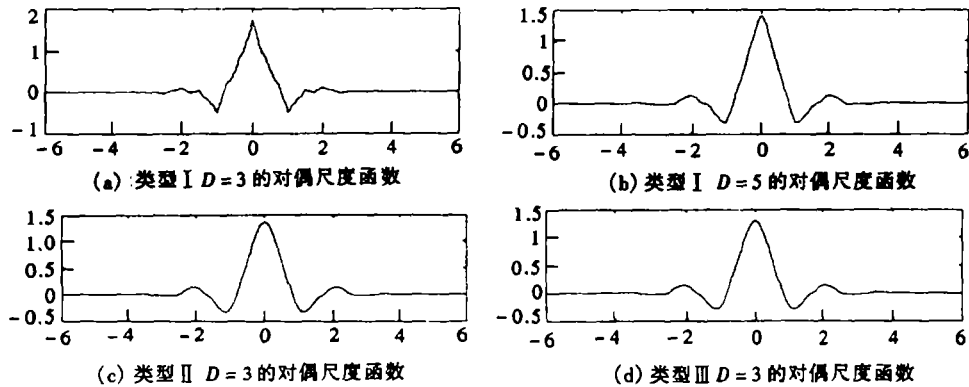


图 1 对偶尺度函数的时域波形对比

从图 1 中, 可以看出优化设计后的对偶尺度函数与相同消失矩的对偶尺度函数 (图 1(a)) 相比, 正则度有显著改善; 而与具有较高阶消失矩的对偶尺度函数 (图 2(b)) 相比, 正则度仍有一定改善。下面比较分析滤波器的频率特性。

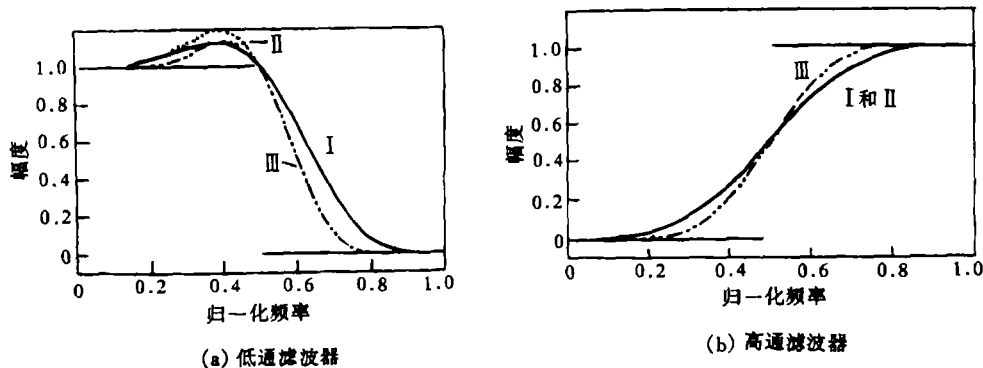


图 2 4 阶消失矩的分析 (或对偶) 滤波器的幅频响应

从图 2 可以看出: 低通的分析尺度滤波器, 类型 III 在通带和阻带都优于类型 I, 类型 II 在阻带优于类型 I; 分析高通滤波器, 类型 I 与类型 II 相同, 而类型 III 的通带, 阻带特性明显优于类型 I。因此, 优化设计明显改善了分析滤波器的频率特性。

6 结 论

从正则度的优化结果来看, 本文提出的优化设计方法对于改善一般插值子波系统的性能是有效的。对插值尺度函数的优化设计能够有效地改善系统对光滑函数的逼近性能, 并且当这类子波系统用于去噪时, 恢复信号的光滑性会有一定的改善。对偶尺度函数正则度的优化设计显著地增加了对偶的正则度。这不仅提高了对偶的光滑性, 同时系统的分析滤波器组的通带、阻带特性都有明显改善。这对提高整个系统的综合性能是非常有益的。再者, 插值尺度函数、对偶尺度函数的参数化也为系统的其它性能指标, 如冗余度的优化设计以及多种性能指标的综合优化设计提供了可能。

参 考 文 献

- [1] Dubuc S. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1986, 114 (1): 185-204.
- [2] Deslauriers G, Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 1989, 5(1): 49-68.
- [3] Donoho L D. Interpolating wavelet transform. Technical report, Dept. of Statistics, Stanford Univ., 1992. 10.
- [4] Harten A. Multiresolution representation of data: A general framework, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1996, 33(3): 1205-1256.
- [5] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1996, 3(2): 186-200.
- [6] Saito N, Beylkin G. Multiresolution representations using the autocorrelation functions of compactly supported wavelets, *IEEE Trans. on SP*, 1993, SP-41(12): 3584-3590.
- [7] 水鹏朗, 保铮. 具有紧支撑对偶的插值子波, *电子科学学刊*, 1999, 21(5): 585-591.
- [8] Daubechies I A, Lagarias J. Two-scale difference equations, I. Global regularity of solutions, *SIAM J. Math. Anal.*, 1991, 22(5): 1388-1410.
- [9] Daubechies I A, Lagarias J. Two-scale difference equations, I. Local regularity, infinite products of matrices and fractals, *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, 23(4): 1031-1079.
- [10] 张建康, 保铮, 于宏毅. M -带离散小波变换中正交小波的逼近性能分析, *中国科学 (E 辑)*, 1997, 27(6): 536-541.

OPTIMAL DESIGN OF THE REGULARITY OF
BIORTHOGONAL INTERPOLATING WAVELET SYSTEM WITH
COMPACTLY SUPPORTED DAULS

Shui Penglang Bao Zheng

(Key Lab. for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract This paper studies the parameterized representations of symmetrical interpolating scaling functions and their duals. Based on this, the optimal design method and corresponding minimax algorithm of the regularity of a novel type of interpolating wavelet systems, biorthogonal interpolating wavelet system with compact supported dauls are proposed. The optimal results show that the approximation power of the system to smooth signals is markedly improved, the regularity of the duals enhances, and the magnitude responses of the dual filters are optimized.

Key words Interpolating wavelet, Biorthogonality, Regularity, Minimax algorithm

水鹏朗: 男, 1967年生, 讲师, 博士生, 研究兴趣为: 子波变换及其应用, 宽带超宽带雷达信号处理, 分形理论及其应用.

保铮: 男, 1927年生, 教授, 中国科学院院士, 中国电子学会会士, 主要研究领域: 雷达信号处理.