

# 任意连续媒质层介电常数剖面的分域重建

崔铁军 梁昌洪

(西安电子科技大学, 西安 710071)

**摘要** 本文应用网络原理导出了渐变媒质层中反射系数的微分方程, 进而获得了重建媒质介电常数的近似解析闭式。通过给出任意媒质层的等效网络  $S$  参数, 可以得到任意连续媒质层介电常数剖面的一种分域重建方法。重建实例证明了本文方法的有效性。

**关键词** 分域重建; 等效网络; 微分方程

## 一、引言

目前, 逆散射技术的应用非常广泛, 相应的研究方法很多。尤其是一维介质层的重建问题, 其理论和方法均已趋于成熟。如重建势函数的 Gel'fand-Levitan 方法, 重建介电常数的 Balanis 法等<sup>[1]</sup>。这些方法虽然比较成熟, 但在实用中还存在某些缺陷。例如, 由 Gel'fand-Levitan 方程而引出的数值方法在重建媒质深层特性时误差很大<sup>[1]</sup>。

针对这种情况, 本文根据网络理论提出了一种分层重建任意连续媒质介电常数剖面的新方法。最后的重建实例证明了本文方法的有效性。

## 二、渐变媒质层反射系数的微分方程及重建介电常数的近似解析式

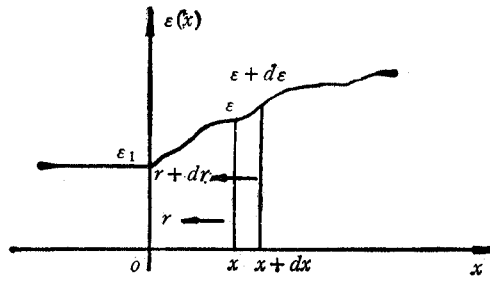
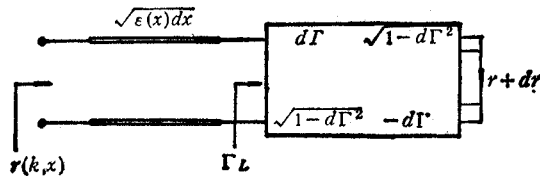
如图 1, 考虑一相对介电常数由  $\epsilon_1$  开始变化的渐变媒质层, TE 极化的平面波从左半空间垂直入射。

在  $x \geq 0$  区域, 设点  $x, x + dx$  处的反射系数分别为  $r(k, x)$  和  $r(k, x) + dr(k, x)$ , 如果将媒质层等效成传输线, 则可获得从  $x$  到  $x + dx$  小段介质层的等效网络, 如图 2 所示。图 2 中,

1992.02.10 收到, 1992.05.19 定稿。

崔铁军 男, 1965 年生, 博士研究生, 近年来研究方向为电磁格点理论、微波网络、数据处理、电磁散射与逆散射等领域。

梁昌洪 男, 1943 年生, 教授, 博士导师, 中国电子学会会士, 研究方向为计算场论、计算微波、微波网络理论、近代数据处理、电磁散射与逆散射、电磁孤立子、电磁导弹等领域。

图 1 介电常数由  $\varepsilon_1$  开始变化的渐变媒质层图 2 从  $x$  到  $x+dx$  小段介质层的等效网络

$$d\Gamma = [\sqrt{\varepsilon(x)} - \sqrt{\varepsilon(x) + d\varepsilon}] / [\sqrt{\varepsilon(x)} + \sqrt{\varepsilon(x) + d\varepsilon}] - d\varepsilon(x) / [4\varepsilon(x)] \quad (1)$$

根据网络理论,由图 2 可以得到

$$\Gamma_L = d\Gamma + (1 - d\Gamma^2)(r + dr) / [1 + d\Gamma(r + dr)]$$

$$r = \Gamma_L \exp[-j2k\sqrt{\varepsilon(x)}dx]$$

略去高阶无穷小量,有

$$dr + (1 - r^2)d\Gamma - j2k\sqrt{\varepsilon(x)}r dx = 0 \quad (2)$$

将(1)式代入上式,有

$$\frac{dr(k,x)}{dx} - j2k\sqrt{\varepsilon(x)}r(k,x) = \frac{1}{4\varepsilon(x)} [1 - r^2(k,x)] \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \quad (3)$$

(3)式即为渐变媒质层中反射系数的微分方程。其通解可写成

$$r(k,x) = -\int_x^{+\infty} \frac{1 - r^2(k,u)}{4\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \exp\{-j2k[y(u) - y(x)]\} du \quad (4)$$

式中,  $y(x) = 2 \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x')} dx'$ 。当  $x = 0$  时,  $r(k,x) = r(k)$  为整个媒质层的反射系数:

$$r(k) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - r^2(k,x)}{4\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \exp[-j2ky(x)] dx \quad (5)$$

当略去  $r^2(k,x)$  项时,(4),(5)式可化为

$$r(k,x) \approx -\int_x^{+\infty} \frac{1}{4\varepsilon(u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} \exp\{-j2k[y(u) - y(x)]\} du \quad (6)$$

$$r(k) \approx -\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \exp[-j2ky(x)] dx \quad (7)$$

如果令  $z = 2y(x)$ , 则(7)式可写成

$$r(k) \approx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{8\varepsilon(x)\sqrt{\varepsilon(x)}} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \exp(-jkt) dt \quad (8)$$

根据 Fourier 变换的定义, 由(8)式可直接写出  $r(k)$  的 Fourier 逆变换为

$$R(z) \approx - \frac{1}{8\varepsilon(x)\sqrt{\varepsilon(x)}} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} U(z) \quad (9)$$

式中,  $U(z)$  为单位阶跃函数。解上述微分方程, 并考虑到边界条件  $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ , 可得

$$\varepsilon(x) \approx \varepsilon_1 \exp \left[ -4 \int_0^z R(z') dz' \right] \quad (10)$$

(10)式即为重建介电常数的近似解析式。

为考虑(10)式的近似程度, 重新考虑(5)式。将(6)式代入(5)式, 并作类似(8)式的化简, 有

$$r(k) = \int_0^{+\infty} \bar{R}(z) \exp(-jkt) dt - \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} \int_t^{+\infty} \bar{R}(p) \bar{R}(q) \bar{R}(z) \exp[-jk(p+q-z)] dpdqdz \quad (11)$$

其中  $z = 2y(x)$ ,  $p = 2y(u)$ ,  $q = 2y(v)$ , 而

$$\bar{R}(z) = - \frac{1}{8\varepsilon(x)\sqrt{\varepsilon(x)}} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} U(z) \quad (12)$$

根据 Fourier 变换的定义, 由(11)式可求得  $r(k)$  的 Fourier 逆变换, 可更精确地表示为

$$R(z) = \bar{R}(z) - \int_0^{+\infty} \int_{z'}^{+\infty} \bar{R}(p) \bar{R}(z') \bar{R}(z + z' - p) dp dz' \quad (13)$$

由(12)式, 当  $z < 0$  时,  $\bar{R}(z) = 0$ 。故据(13)式可见

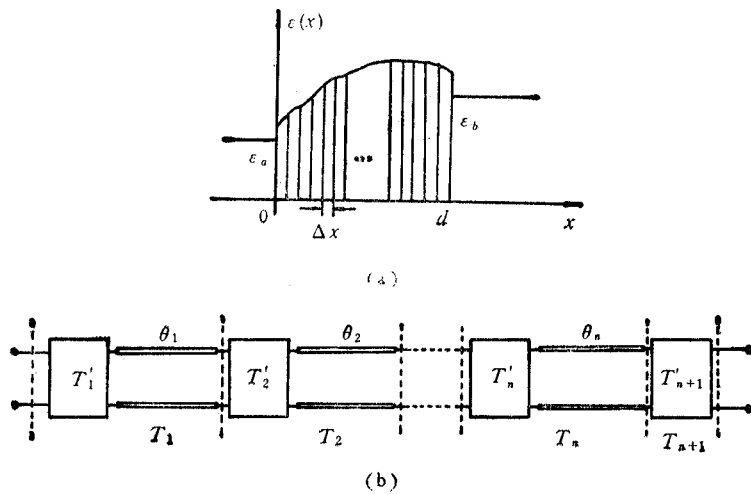
- (1)  $z = 0$  时,  $z + z' - p = z' - p < 0$ ,  $R(z) = \bar{R}(z)$ ;
- (2)  $z$  比较小时,  $z + z' - p > 0$  的部分很少,  $R(z)$  很接近  $\bar{R}(z)$ ;
- (3)  $z$  很大时,  $z + z' - p > 0$  的部分很多,  $R(z)$  与  $\bar{R}(z)$  的差距逐渐增大。

同时, 根据(12)式, 可精确解出  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1 \exp \left[ -4 \int_0^z \bar{R}(z') dz' \right]$ , 故近似重建公式(10)式在  $x$  比较小的区域内是精确的; 当  $x$  较大时, 重建结果逐渐偏离真实值。后面的重建实例将验证上述结论的正确性。

因此, 使用近似公式(10)式重建介电常数剖面时, 存在有效重建深度  $d_e$ 。当  $x \in [0, d_e]$  时, 重建值比较精确, 当  $x > d_e$  时, 重建结果逐渐偏离真实值。

### 三、任意一段媒质层的等效网络 $S$ 参数

为了分段重建任意连续媒质层的介电常数剖面, 必须先给出任意一段媒质层的等效网络  $S$  参数。考虑一段厚度为  $d$ , 相对介电常数为  $\varepsilon(x)$  的媒质层, 如图 3(a) 所示, 其中  $x < 0$ ,  $x > d$  区域内的相对介电常数分别是  $\varepsilon_a$  和  $\varepsilon_b$ 。为获得图 3(a) 媒质层的等效  $S$  散射参数, 首先将连续媒质层在区域  $[0, d]$  内  $n$  等分, 且假定每一小层内的介电常



(a) 任意一段媒质层及其分割离散化 (b) 离散媒质层的等效网络

图 3 任意一段媒质层的分割离散化及其等效网络

数不变:  $\varepsilon_m = \varepsilon((m-1/2)\Delta x)$ ,  $m=1, 2, \dots, n$ ; 则连续媒质层变成分层媒质. 当  $n$  充分大时, 分层媒质无限接近于原媒质层, 如图 3(a) 所示.

如果将分层媒质看成是  $n$  段传输线的级联, 则可获得如图 3(b) 所示的等效网络. 其中,  $\theta_m = k\Delta x\sqrt{\varepsilon_m}$ ,  $m=1, 2, \dots, n$ ;  $[T'_m] = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{12} & T'_{11} \end{bmatrix}$  为网络  $T$  参数, 具体地

$$T'_{11} = (\eta_{m-1} + \eta_m) / (2\sqrt{\eta_{m-1}\eta_m}), \quad T'_{12} = (\eta_m - \eta_{m-1}) / (2\sqrt{\eta_{m-1}\eta_m}) \quad (14)$$

其中,  $m=1, 2, \dots, n+1$ ,  $\eta_m$  为  $m$  层介质的波阻抗. 由于  $\eta_m = \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_0 \varepsilon_m)} = \eta_0 / \sqrt{\varepsilon_m}$ , 故(14)式又可写成

$$T'_{11} = (\sqrt{\varepsilon_{m-1}} + \sqrt{\varepsilon_m}) / (2\sqrt{\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m}), \quad T'_{12} = (\sqrt{\varepsilon_{m-1}} - \sqrt{\varepsilon_m}) / (2\sqrt{\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m}) \quad (15)$$

当  $m=1$  时,  $\varepsilon_{m-1} = \varepsilon_a$ ; 当  $m=n+1$  时,  $\varepsilon_m = \varepsilon_b$ .

由于传输线段  $\theta_m (m=1, 2, \dots, n)$  的  $T$  参数为  $\begin{bmatrix} \exp(j\theta_m) & 0 \\ 0 & \exp(-j\theta_m) \end{bmatrix}$ , 故根据  $T$  参数的级联性质, 有

$$\begin{aligned} [T_m] &= \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{12} & T'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\theta_m) & 0 \\ 0 & \exp(-j\theta_m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T'_{11}\exp(j\theta_m) & T'_{12}\exp(-j\theta_m) \\ T'_{12}\exp(j\theta_m) & T'_{11}\exp(-j\theta_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $m=1, 2, \dots, n$ . 当  $m=n+1$  时,

$$[T_{n+1}] = [T'_{n+1}] \quad (17)$$

因此, 级联网络的总  $T$  参数为

$$[T] = \prod_{m=1}^{n+1} [T_m] \quad (18)$$

根据网络  $S$  散射参数与  $T$  参数的关系,容易获得离散媒质层的等效网络  $S$  参数为

$$S_{11} = T_{21}/T_{11}, S_{12} = (T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})/T_{11}, S_{21} = 1/T_{11}, S_{22} = -T_{12}/T_{11} \quad (19)$$

当  $n$  充分大时,(19)式无限接近原媒质层的等效网络  $S$  参数。

### 四、任意连续媒质层介电常数剖面的分域重建

考虑一任意连续的半空间媒质,  $x < 0$  区域为自由空间, TE 极化的平面波由自由空间垂直入射,反射系数为  $r(k)$ 。如果使用近似公式(10)式重建未知媒质的介电常数剖面,必须先求出  $\epsilon(0)$ 。

文献[2]给出了利用高频反射系数重建  $\epsilon(0)$  的方法,这里直接引用其结果:

$$\epsilon(0) = [(1 - R_{01})/(1 + R_{01})]^2 \quad (20)$$

其中

$$R_{01} = \{ (b^2 - a^2 - 1) + [(b^2 - a^2 - 1)^2 - 4a^2]^{1/2} \} / (2a) \quad (21)$$

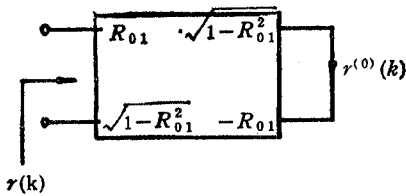


图 4 待重建媒质层的等效网络

而  $a, b$  分别是高频反射系数圆的圆心和半径。

获得  $\epsilon(0)$  后,可以建立原媒质层的等效网络,如图 4 所示。图中的网络表示相对介电常数由 1 到  $\epsilon(0)$  的变换网络,  $r^{(0)}(k)$  是相对介电常数由  $\epsilon(0)$  开始变化的渐变媒质层之反射系数。

由图 4, 根据网络理论,易得

$$r^{(0)}(k) = [r(k) - R_{10}] / [1 - R_{01}r(k)] \quad (22)$$

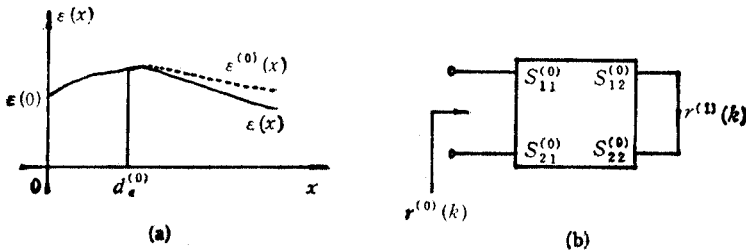
又由于  $r^{(0)}(k)$  是渐变媒质层的反射系数,故由(10)式,有

$$\epsilon^{(0)}(x) \approx \epsilon(0) \exp \left[ -4 \int_0^x R^{(0)}(t') dt' \right] \quad (23)$$

式中  $t = 2 \int_0^x \sqrt{\epsilon^{(0)}(x')} dx'$ ,  $R^{(0)}(t)$  是  $r^{(0)}(k)$  的 Fourier 逆变换。

根据第二节的讨论,(23)式在有效重建深度  $[0, d_e^{(0)}]$  内是比较精确的;当  $x > d_e^{(0)}$  时,重建误差逐渐增大,如图 5(a)所示。因此,由(19)式可较精确地获得  $x \in [0, d_e^{(0)}]$  媒质层的等效网络  $S$  参数,记作  $[S^{(0)}]$ 。这样,可将图 5(a)媒质等效成图 5(b)的形式,其中  $r^{(1)}(k)$  为  $x \geq d_e^{(0)}$  区域渐变媒质的反射系数。

由图 5(b) 可以求得



(a) 第一层的重建结果

(b) 第一层的等效网络

图 5 媒质的第一层重建结果及其等效网络

$$r^{(1)}(k) = [r^{(0)}(k) - S_{11}^{(0)}] / [S_{22}^{(0)} r^{(0)}(k) - S_D^{(0)}] \quad (24)$$

其中  $S_D^{(0)} = S_{11}^{(0)} S_{22}^{(0)} - S_{12}^{(0)} S_{21}^{(0)}$ 。同样, 根据(10)式可在  $x \geq d_e^{(0)}$  区域内近似重建出介电常数剖面:

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \varepsilon^{(0)}(d_{e0}) \exp \left[ -4 \int_0^x R^{(1)}(t') dt' \right] \quad (25)$$

式中,  $t = 2 \int_0^{x'} \sqrt{\varepsilon^{(1)}(x'')} dx''$ ,  $x' = x - d_e^{(0)}$ ;  $R^{(1)}(t)$  是  $r^{(1)}(k)$  的 Fourier 逆变换。

上述重建公式(25)式在有效重建深度  $[d_e^{(0)}, d_e^{(0)} + d_e^{(1)}]$  内是比较精确的。按照这个步骤, 依次类推, 可重建出第三段、第四段...媒质层的介电常数剖面  $\varepsilon^{(3)}(x), \varepsilon^{(4)}(x), \dots$ 。

应该指出, 有效重建深度  $d_e^{(0)}, d_e^{(1)}, \dots$  是未知的。但如果我们选择较小值作为有效重建深度, 总能达到较精确重建  $\varepsilon(x)$  之目的。

## 五、重建实例

为了验证本文方法的有效性并与精确值比较, 考虑反射系数为  $r(k) = 1/(1 + j2k)$  的未知半空间媒质。文献[3]已经证明了这种媒质的精确剖面为  $\varepsilon_0(x) = (1 + 3x)^{-4/3}$ 。

采用本文方法, 当  $d_e^{(0)}$  取为 5 时, 重建结果如图 6(a) 所示; 当  $d_e^{(0)} = d_e^{(1)} = 2.5$  和  $d_e^{(0)} = d_e^{(1)} = d_e^{(2)} = d_e^{(3)} = d_e^{(4)} = 1$  时, 重建结果分别如图 6(b), 6(c) 所示。图中还给出了与精确剖面的比较。

由图 6 可见, 当媒质分为五层重建时, 介电常数剖面的重建值与精确值已相当吻合。

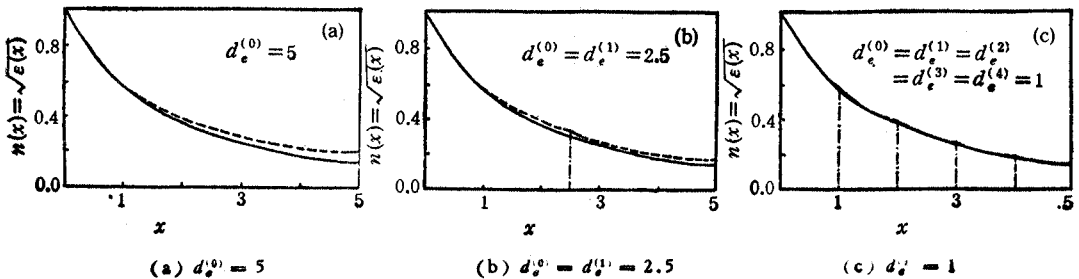


图 6 本文方法的重建结果(虚线)与精确剖面(实线)的比较

## 六、结 论

本文给出了渐变媒质层反射系数的微分方程式, 导出了介电常数剖面的近似重建公式并讨论了其适用范围。同时, 提出了普遍适用于任意连续媒质层的分域重建方法。计算实例表明, 本文方法是有效的。

## 参 考 文 献

- [1] 葛德彪, 电磁波散射原理, 西安电子科技大学出版社, 西安, 1987年, 第二章, 第三章。
- [2] K. I. Hopcraft, P. R. Smith, *J. Opt. Soc. Am. A*, 6 (1989) 4, 508—516.
- [3] D. L. Jaggard, Y. Kim, *J. Opt. Soc. Am. A*, 2 (1985) 11, 1922—1930.

## RECONSTRUCTION OF THE PERMITTIVITY PROFILES OF ARBITRARILY CONTINUOUS MEDIUM IN LAYERED REGIONS

Cui Tiejun      Liang Changhong

(*Xidian University, Xi'an 710071*)

**Abstract**      A differential equation for the reflection coefficient of a continuously varied medium is derived by using a network theory, from which an approximation for reconstructing the permittivity profiles is obtained in closed form. Furthermore, the equivalent  $S$  scattering parameters of an arbitrary medium are given, based on which the permittivity profiles of an arbitrary continuous medium can be reconstructed in layered regions. Reconstruction examples show the validity of this method.

**Key words**      Electromagnetic inverse scattering; Reconstruction in layered regions; Equivalent network; Differential equation