

波导本征值问题的有限元分析*

徐善驾

(中国科学技术大学无线电系)

提 要

本文简要讨论了波导本征值问题的有限元分析方法。给出了一个用有限元法求解波导本征值问题的标准程序。使用该程序可以获得一大类横截面周界由直线及圆弧围成的波导的各个本征值和本征函数。文中通过对十几种不同结构波导本征值问题的求解,证实了该程序的可靠性。

一、引 言

波导本征值问题是微波理论和技术中最基本的问题之一。这不仅是因为各种波导中不同模式的场型分析和传输特性的研究直接和该问题相关,而且很多微波部件和系统的分析、综合和最优化又往往以该问题的求解为基础。

有多种求解亥姆霍兹(Helmholtz)方程的方法。分离变量法是一种可以获得解析解的精确方法。但除少数线、板、柱、球等极简单正规的边界形状外,能用解析法求解的边值问题实在是太少了。绝大多数边值问题的求解都是采用某种近似方法完成的。近十几年来,随着计算机科学技术的蓬勃发展和数值计算方法的不断完善,出现了多种求解本征值问题的数值解法。其中以有限差分法和有限元法用得较多。但在求解波导问题时,有限元法又比有限差分法有下列优点,故它更具有吸引力。

(1) 区域的剖分允许有极大的灵活性,而且随着剖分的加密本征值单调地下降逼近于真实值;

(2) 便于处理复杂的边界形状和非均匀介质填充的区域,并总能保持系数阵的对称性、正定性;

(3) 允许求解域内存在奇异点和缝隙,只要在剖分时对它们采取一些措施而在以后阶段可以不再作特殊处理;

(4) 有限元法的各个环节,如单元分析、总体合成、广义本征值问题的求解等在程序实现上都是便于标准化的。至少对同一类型的问题,可用同一套标准程序处理。

本文正是利用有限元法的这个特点给出了一个求解波导本征值问题的标准程序。使用本程序者,只要根据问题的实际需要,决定剖分加密和放疏的具体部位,输入剖分参量和波导边界的几何参量等最低限度的信息,即可获得所求波导的各个本征值和本征函数

* 1981年3月4日收到。

的近似解。

二、本征值问题的有限元分析

一般的椭圆型方程的边值问题都有适当的变分问题与之等价。平面域 s 上的亥姆霍兹方程 (1) 和 (3) 式在所列边界条件 (2) 和 (4) 式的情况下,

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 \phi + \chi^{*2} \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 \phi + \chi^2 \phi = 0 \\ \phi \Big|_{\Omega} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 \phi + \chi^2 \phi = 0 \\ \phi \Big|_{\Omega} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_i^2 \phi + \chi^2 \phi = 0 \\ \phi \Big|_{\Omega} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

分别等价于下列商泛函的变分问题^[3],

$$J(\phi) = \frac{\iint_s |\nabla_i \phi|^2 ds}{\iint_s \phi^2 ds} = \frac{J_1^*(\phi)}{J_2^*(\phi)} = \chi^{*2} \quad (5)$$

$$J(\phi) = \frac{\iint_s |\nabla_i \phi|^2 ds}{\iint_s \phi^2 ds} = \frac{J_1(\phi)}{J_2(\phi)} = \chi^2 \quad (6)$$

$$\phi \Big|_{\Omega} = 0 \quad (7)$$

式中 ϕ , ϕ , χ^* 和 χ 分别是磁波和电波的本征函数和本征值, Ω 是 s 域的周界。这就是说, 在所有满足边界条件 (7) 式且不恒为零的函数类中, 使得泛函 $J(\phi)$ 达极值的函数 ϕ 就是本征函数, 相应的极值 χ^2 即为本征值。

与用正交波型函数系展开的方法表示波导中的任意场相类似, 在有限元的离散化中, 本征函数 (以磁波为例) $\phi(x, y)$ 在各基本元上可用适当方式插值的基函数代替; 若采用三角形上的线性插值, 则对于第 e 个面元, 应有:

$$\phi_e^i(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \phi_i^e \quad (x, y) \in \Delta_e \quad (8)$$

其中 ϕ_i^e 是 ϕ^e 在三角形第 i 个顶点上的值, $N_i^e(x, y)$ 是三角形上线性插值的基函数, 它等于:

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e} (a_i + b_i x + c_i y), \quad (x, y) \in \Delta_e, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

很明显, 基函数本身也都是线性函数, 并且满足:

$$N_i^e(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(9) 式中 Δ_e 是第 e 个三角形面元的面积, $\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$;

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - y_2 x_3, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2; \\ a_2 &= x_3 y_1 - y_1 x_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3; \\ a_3 &= x_1 y_2 - y_1 x_2, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1; \end{aligned}$$

而 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 分别为三角形面元三顶点的坐标.

如果区域 s 内共划分为 K_m 个面元, 则本征函数 $\phi(x, y)$ 在 s 内任一点的值可展开为:

$$\phi(x, y) = \sum_{e=1}^{K_m} \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) \phi_i^e \quad (10)$$

若 s 内共有 K_p 个点元, 则根据极值存在的必要条件:

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_l} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, K_p).$$

由(5)式得 (J_2^* 为有限值):

$$\frac{\partial J_1^*}{\partial \phi_l} - x^{*2} \frac{\partial J_2^*}{\partial \phi_l} = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, K_p),$$

即

$$\iint_s \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right\} dx dy - x^{*2} \iint_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial \phi_l} dx dy = 0 \quad (11)$$

将(10)式代入(11)式有:

$$\sum_{e=1}^{K_m} \iint_{\Delta_e} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \phi_i^e dx dy - \sum_{e=1}^{K_m} x^{*2} \iint_{\Delta_e} \sum_{i=1}^3 N_i^e N_i^e \phi_i^e dx dy = 0 \quad (12)$$

对于第 e 个面元来说, 将(9)式代入(12)式的有关部分, 并在面元 Δ_e 内积分得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \phi_1} \Big|_e &= \frac{1}{4\Delta_e} \{ (b_1^2 + c_1^2) \phi_1^e + (b_1 b_2 + c_1 c_2) \phi_2^e (b_1 b_3 + c_1 c_3) \phi_3^e \} \\ &\quad - x^{*2} \frac{\Delta_e}{12} (2\phi_1^e + \phi_2^e + \phi_3^e), \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_2} \Big|_e &= \frac{1}{4\Delta_e} \{ (b_2 b_1 + c_1 c_2) \phi_1^e + (b_2^2 + c_2^2) \phi_2^e + (b_2 b_3 + c_2 c_3) \phi_3^e \} \\ &\quad - x^{*2} \frac{\Delta_e}{12} (\phi_1^e + 2\phi_2^e + \phi_3^e), \\ \frac{\partial J}{\partial \phi_3} \Big|_e &= \frac{1}{4\Delta_e} \{ (b_1 b_3 + c_1 c_3) \phi_1^e + (b_2 b_3 + c_2 c_3) \phi_2^e + (b_3^2 + c_3^2) \phi_3^e \} \\ &\quad - x^{*2} \frac{\Delta_e}{12} (\phi_1^e + \phi_2^e + 2\phi_3^e) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式用矩阵表示则为:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \phi} \Big|_e \right) = [A^e](\phi^e) - x^{*2}[D^e](\phi^e) \quad (14)$$

其中矩阵 $[A^e]$ 和 $[D^e]$ 的元素分别为:

$$A_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta_e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3)$$

$$D_{ij}^e = \frac{\Delta_e}{12} (1 + \delta_{ij}) \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3)$$

将(14)式代回(12)式就有:

$$\sum_{e=1}^{K_m} ([A^e](\phi^e) - x^{*2}[D^e](\phi^e)) = 0 \quad (15)$$

对所有面元按(15)式逐个累加后得总的矩阵方程:

$$[A](\phi) = x^{*2}[D](\phi) \quad (16)$$

这样, 偏微分方程本征值问题最终离散化为广义代数本征值问题. 对于后者则需视它是否只要求出本征值还是同时要求出本征函数; 是否只要求出主模(最小本征值)还是要求出相应矩阵的全部本征值和本征函数, 而有不同的解法.

由上述可见, 有限元法是变分法和差分法的结合和发展. 用它解题的过程包括几何剖分、分片插值、单元分析、总体合成和最后求解相应的线性代数方程组. 当用有限元法求解偏微分方程的本征值问题时, 总体合成后微分方程的本征值问题离散化为广义代数本征值问题(16)式. 对于该式可先化为对称阵 $[P]$ 的本征值问题:

$$[P](\nu) = x^{*2}(\nu) \quad (17)$$

然后由本征函数 (ν) 求出原问题的本征函数 (ϕ) . 到此解题过程完结(两问题的本征值 x^* 是相等的).

三、计算实例

对于由直线围成的边界, 以脊形波导为例, 本文采取如图1所示的区域剖分方法. 把整个脊形区域划分成5块大小不等的矩形. 在每个矩形区域内又分成若干个三角形单元, 它的大小可根据需要通过选择不同的分割点数 M_1 、 M_2 、 M_3 、 N_1 、 N_2 和 N_3 而定, 以便灵活地掌握在关键的或感兴趣的部位加密, 其余部分放疏.

由图可见点元标号 K_4 (以第4块矩形为例)与 X 和 Y 方向的离散变量 I 、 J 有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} K_4 &= M_{30} * (J + N_1 - N_2 - 2) + M_3 * (N_2 - N_1 + 1) + I \\ M_{30} &= M_3 - M_2 + M_1 + 1 \\ 2 \leq I \leq M_1, \quad N_2 + 1 \leq J \leq N_3 \end{aligned} \right\}$$

而面元标号与点元标号和面元三顶点编号之间满足下式:

$$\left. \begin{aligned} M_{04} &= 2 * (M_3 - 1) * (N_2 - N_1) + 2 * (M_{30} - 2) * (J + N_1 - N_2 - 2) + I - 1 \\ M_{14} &= M_{04} + M_{30} - 2 \\ L(1, M_{04}) &= L(1, M_{14}) = K_4 - M_{30} - 1 \quad (J \neq N_2 + 1) \\ L(1, M_{04}) &= L(1, M_{14}) = K_4 - M_3 - 1 \quad (J = N_2 + 1) \\ L(2, M_{04}) &= K_4 - M_{30} \quad (J \neq N_2 + 1) \\ L(2, M_{04}) &= K_4 - M_3 \quad (J = N_2 + 1) \\ L(3, M_{04}) &= L(2, M_{14}) = K_4 \\ L(3, M_{14}) &= K_4 - 1 \\ 2 \leq I \leq M_1, \quad N_2 + 1 \leq J \leq N_3 \end{aligned} \right\}$$

式中 $L(i, M_{04})$ 代表面元标号为 M_{04} 的三角形的第 i 个顶点的标号($i = 1, 2, 3$), 其余

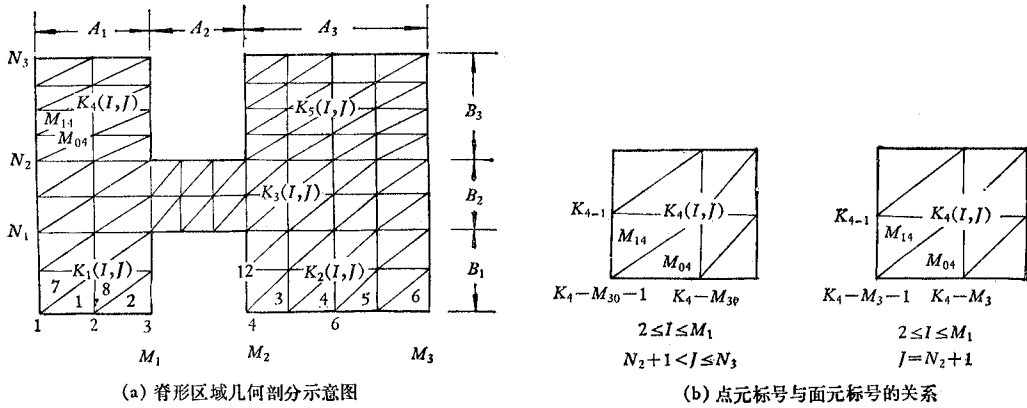


图 1 脊形区域的几何部分
Fig. 1 Divisions of a ridge range

(a) Scheme of grading a ridge range (b) Relation between the labels of vertices and elements

类推. 对于其它 4 个矩形也有类似关系, 不必细说.

整个脊形区域的总点元数 K_p , 总面元数 K_m 与剖分参量间满足下式:

$$K_p = M_{30} * (N_3 + N_1 - N_2 - 1) + M_3 * (N_2 - N_1 + 1)$$

$$K_m = 2 * (M_3 - 1) * (N_2 - N_1) + (M_{30} - 2) * (N_3 + N_1 - N_2 - 1)$$

对于由直线和圆弧围成的边界, 以扇形波导为例, 采用如图 2 所示的剖分方法. 由图可见点元、面元标号和面元三顶点编号等分别满足下列各式:

$$\left. \begin{aligned} K &= (J - 1) * (2 * M - J) + I \\ 1 \leq J \leq M, \quad J \leq I \leq 2 * M - J \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= K - (2 * M - 1) * (J - 1) + (J - 2) * (4 * M - J - 1) \\ L(1, M_0) &= K - 2 * (M - J + 1) - 1 \\ L(2, M_0) &= L(1, M_0) + 1 \\ L(3, M_0) &= K \\ 2 \leq J \leq M, \quad J \leq I \leq 2M - J \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= K - (J - 2) * (J - 2 * M) - 2 * (J - 1) \\ L(1, M_1) &= K - 2 * (M - J) - 3 \\ L(2, M_1) &= K \\ L(3, M_1) &= K - 1 \\ 2 \leq J \leq M - 1, \quad J + 1 \leq I \leq 2M - J \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= K - (2 * M - 1) * (J - 1) + (J - 2) * (4 * M - J - 1) + 1 \\ L(1, M_2) &= K - 2 * (M - J + 1) \\ L(2, M_2) &= L(1, M_2) + 1 \\ L(3, M_2) &= K \\ M \leq I \leq 2M - 2, \quad J = 2M - I \end{aligned} \right\}$$

总点元数 K_p 和总面元数 K_m 则为:

$$K_p = M^2$$

$$K_m = 2 * (M - 1)^2.$$

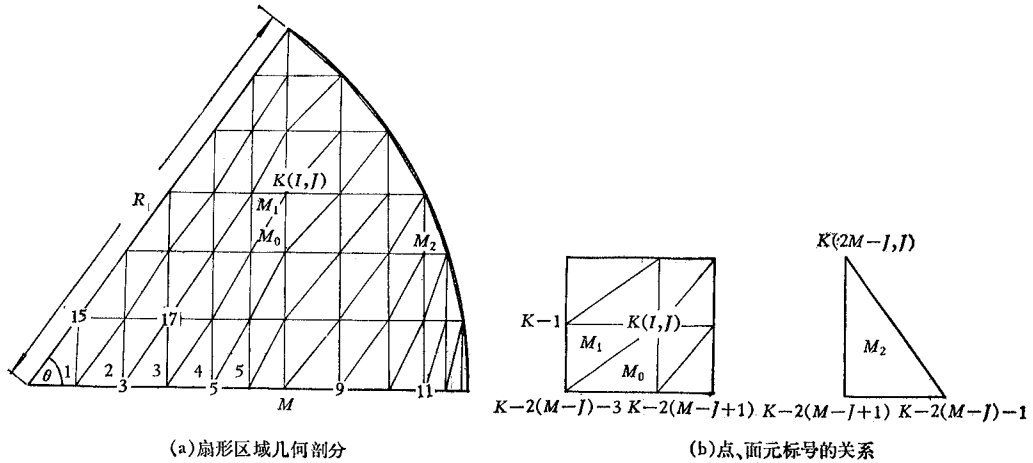


图 2 扇形区域的剖分

Fig. 2 Divisions of a sector range

(a) Grading of a sector range (b) Relation between the labels of vertices and elements

有了上述这些关系,根据输入的初始信息(包括剖分参量和几何参量,例如: $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ 等),计算机将对点元、面元和面元三顶点自动编号,并在确定了各点元的坐标之后,经过应用(13)式对每个面元的单元分析和根据(15)式对所有面元逐个累加的总合成,便得到离散化的代数本征值问题的 $[A]$ 和 $[D]$ 矩阵. 求解(16)式广义本征值问题,从而获得问题的全部本征值和相应的本征函数.

(16)式的求解分两步进行. 首先利用 $[A]$ 为对称阵, $[D]$ 为对称正定阵这两个特性,通过把 $[D]$ 阵分解为两个三角形阵的方法,以确定对称阵 $[P]$,然后求解(17)式 $[P]$ 阵的本征值问题. 因为两个问题的本征值 x^* 是相等的,故相当于解得了(16)式的本征值. 最后再由 (v) 确定原问题的本征函数 (ψ) ,整个问题就得到解决.

由于本文在化对称阵为对称三对角阵的豪斯霍尔德(Householder)方法中和在求对称三对角阵全部本征值和本征函数的QL方法中,充分利用了高维矩阵 $[A]$ 、 $[D]$ 上三角形或下三角形在运算过程中的空档来存放与当前运算无关的元素,待需要用到这些元素时再设法调用,从而使数存单元比不采取上述措施时节省约三分之一. 这样,对DJS-8型机来说,在不动用扩体的情况下(可供用户使用的内存单元为25000个48位全字长),点元数和面元数可分别用到110和170. 无疑这对提高计算精度是有利的.

为了检验本文所提供的程序的可靠性,有意挑选了几种有解析解的波导,同时随便选择了几种没有解析解的特殊横截面形状的波导进行了计算,求得了每种波导的各本征值和本征函数. 这些波导的剖分参量和几何尺寸如图3—图14所示(每个剖分参量和几何参数都是有关子程序中的哑元,因此它们可以是任意的确定值).

表1和表2分别给出了各波导主模本征值(最小非零本征值)和第一个电波本征值的计算值和理论值以作比较. 若将剖分加密,计算精度还可以提高,但计算时间将随之增

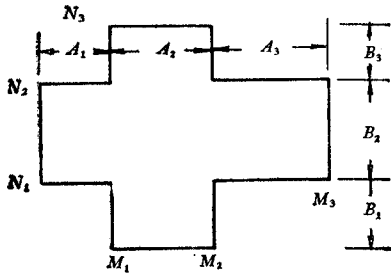


图 3 十字形波导

Fig. 3 Cross-like waveguide

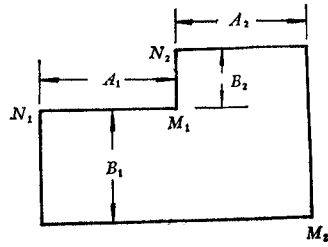


图 4 L形波导

Fig. 4 L-waveguide

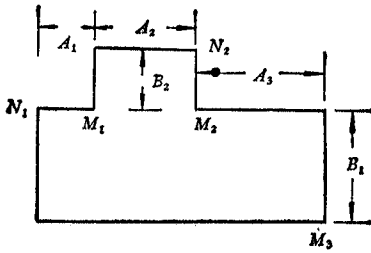


图 5 T型波导

Fig. 5 T-waveguide

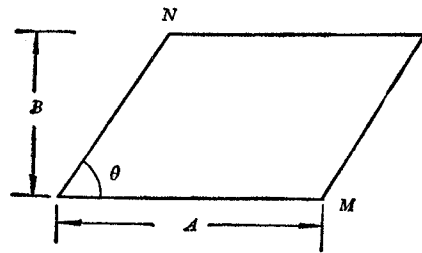


图 6 平行四边形波导

Fig. 6 Parallelogram waveguide

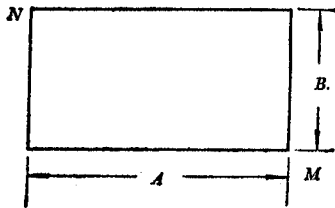


图 7 矩形波导

Fig. 7 Rectangular waveguide

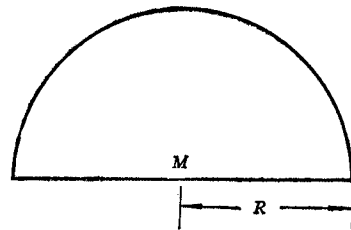


图 8 半圆波导

Fig. 8 Semicircular waveguide

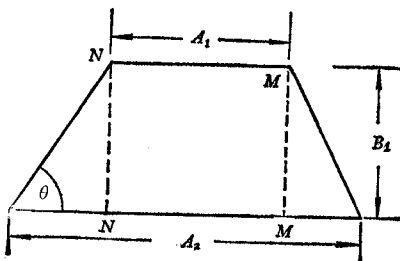


图 9 梯形波导

Fig. 9 Ladder shape waveguide

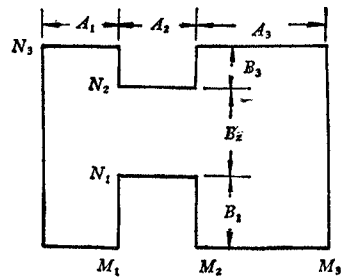


图 10 脊形波导

Fig. 10 Ridge waveguide

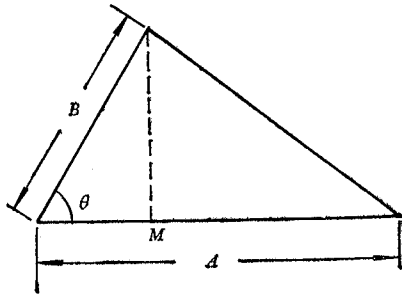


图 11 三角形波导
Fig. 11 Triangular waveguide

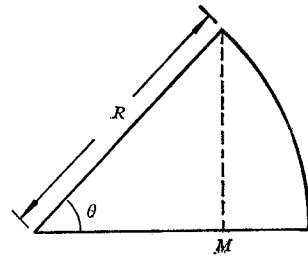


图 12 扇形波导
Fig. 12 Sector waveguide

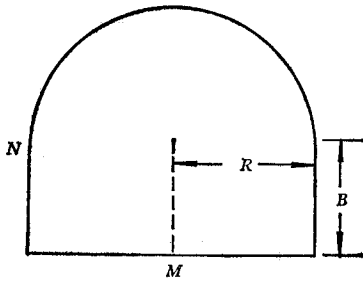


图 13 拱形波导
Fig. 13 Arch waveguide

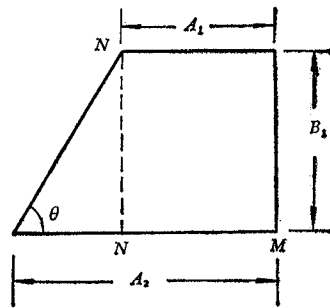


图 14 直角梯形波导
Fig. 14 Right ladder shape waveguide

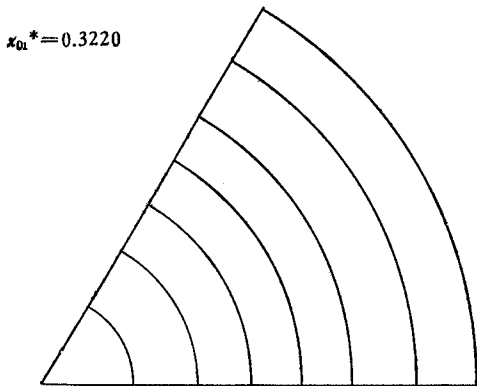


图 15 扇形波导主模 (H_{01}) 电力线分布图
Fig. 15 Electric field lines of dominant mode (H_{01}) in sector waveguide

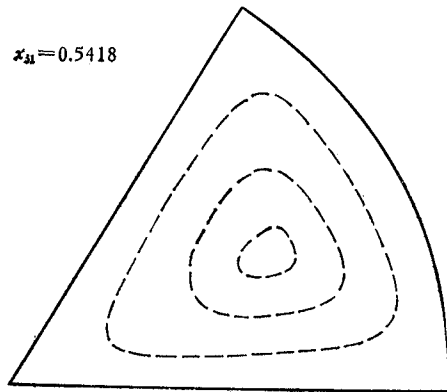


图 16 扇形波导第一个电波 (E_{11}) 的磁力线分布图
Fig. 16 Magnetic field lines of first E mode in sector waveguide

长。表 1 中有些波导因未见到有关于它的本征值的计算公式,有些虽有,如十字波导和 T 形波导,但也是近似式,而且计算又相当麻烦,故未与计算值进行比较。

根据求出的各波型的本征函数 ψ (或 ϕ) 可画出相应波型横截面上的场分布。(本征函数 $\psi = \text{常数}$ 是磁波电力线方程, $\phi = \text{常数}$ 是电波磁力线方程)。图 15—图 28 给出了各种波导主模,即最低 H 模(已经证明,在任意截面的规则波导中主模总是 H 模,而且主模

表 1 各种波导主模本征值 x_1^* 的计算值与理论值的比较Tab. 1 Comparison between calculated and theoretical dominant mode eigenvalues x_1^* of various waveguides

	K_p	K_m	理论值 (mm^{-1})	计算值 (mm^{-1})	相对误差 (%)	几何参数 (mm)
矩 形	108	170	0.4417 ^[4]	0.4423	0.136	$A = 7.112 \quad B = 3.556$
半 圆	100	162	0.1534 ^[4]	0.1541	0.456	$R = 12.0 \quad \theta = 180^\circ$
扇 形	100	162	0.3193 ^[4]	0.3220	0.845	$R = 12.0 \quad \theta = 60^\circ$
三 角 形	100	162	0.5890 ^[4]	0.5915	0.429	$A = 7.112 \quad B = 7.112 \quad \theta = 60^\circ$
直角三角形	105	169	0.4417 ^[4]	0.4428	0.249	$A = 7.112 \quad B = 7.112 \quad \theta = 90^\circ$
脊 形	99	144	近似公式 ^[6] 0.2203	0.2240		$A_1 = A_3 = 2.8829 \quad A_2 = 1.9304$ $B_1 = B_3 = 1.3335 \quad B_2 = 0.635$
平行四边形	108	170	近似公式 ^[6] 0.4417	0.4306		$A = 7.112 \quad B = 3.556 \quad \theta = 60^\circ$
鱼 鳍 线	108	164		0.3231		$A_1 = A_3 = 3.506 \quad A_2 = 0.1$ $B_1 = B_3 = 1.528 \quad B_2 = 0.5$
拱 形	101	168		0.1392		$R = 12.0 \quad B = 12.0$
十 字 形	108	160		0.5027		$A_1 = A_3 = 1.778 \quad A_2 = 3.556$ $B_1 = B_3 = 1.778 \quad B_2 = 3.556$
T 形	106	160		0.2506		$A_1 = A_3 = 3.556 \quad A_2 = 7.112$ $B_1 = 2.1336 \quad B_2 = 1.4224$
L 形	106	160		0.2159		$A_1 = A_2 = 7.112 \quad A_3 = 0.0$ $B_1 = 2.1336 \quad B_2 = 1.4224$
直角梯形	100	161		0.5301		$A_1 = B = 3.556 \quad A_2 = 7.112 \quad \theta = 45^\circ$
梯 形	108	170		0.2874		$A_1 = 7.112 \quad A_2 = 14.224$ $B = 3.556 \quad \theta = 45^\circ$

表 2 各波导第一个电波本征值 x_1 的计算值与理论值的比较Tab. 2 Comparison between calculated and theoretical first E mode eigenvalues x_1 of various waveguides

	K_p	K_m	理论值 (mm^{-1})	计算值 (mm^{-1})	相对误差 (%)	几何参数 (mm)
矩 形	105	168	0.9877 ^[4]	1.0050	1.75	$A = 7.112 \quad B = 3.556$
三 角 形	100	162	1.0201 ^[5]	1.0370	1.65	$A = B = 7.112 \quad \theta = 60^\circ$
扇 形	100	162	0.5317 ^[4]	0.5418	1.90	$R = 12.0 \quad \theta = 60^\circ$
半 圆	100	162	0.3193 ^[4]	0.3252	1.85	$R = 12.0 \quad \theta = 180^\circ$

不可能是与 E 模兼并的^[5]。在横截面上的电力线分布以及扇形和半圆波导第一个电波的磁力线分布。图中由于本征函数 ψ (或 ϕ) 各等值线间的差值并不相同, 故电力线 (或磁

$x_{11}^* = 0.1541$

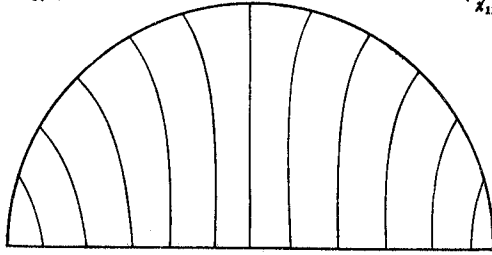


图 17 半圆波导主模 (H_{11}) 的电力线分布图
 Fig. 17 Electric field lines of dominant mode (H_{11}) in semicircular waveguide

$x_{11}^* = 0.3252$

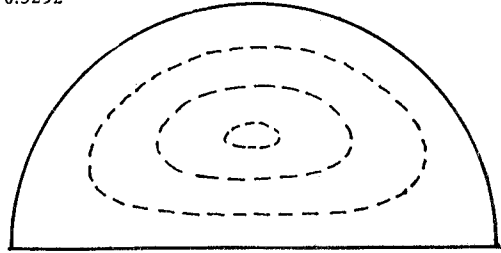


图 18 半圆波导第一个电波 (E_{11}) 的磁力线分布图
 Fig. 18 Magnetic field lines of first E mode (E_{11}) in semicircular waveguide

$x_1^* = 0.4306$

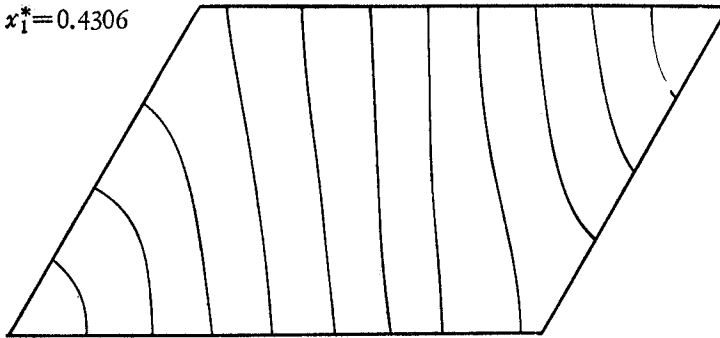


图 19 平行四边形波导主模的电力线分布图
 Fig. 19 Electric field lines of dominant mode in parallelogram waveguide

$x_1^* = 0.2117$

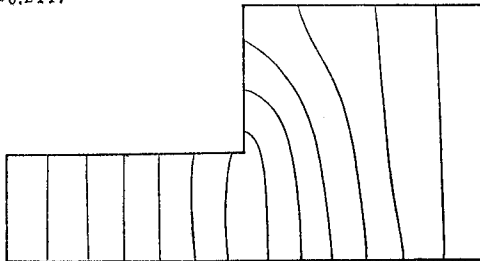


图 20 L形波导主模的电力线分布图
 Fig. 20 Electric field lines of dominant mode in L-waveguide

$x_{10}^* = 0.4423$

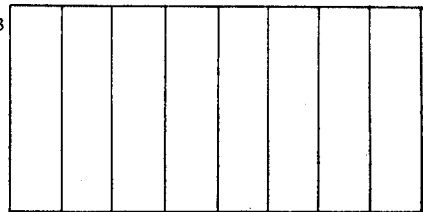


图 21 矩形波导主模 (H_{10}) 的电力线分布图
 Fig. 21 Electric field lines of dominant mode in rectangular waveguide

力线)的稀密不代表电场(或磁场)的强弱。

图 28(b) 给出了 T 形波导中第五个磁波 H_5 的电力线分布图, 它正是 Marié 型 H_{10}^0 — H_{01}^0 波变换器的头一段, H_{10}^0 — H_{01}^0 波 T 形变换段中的工作波型。而图 27(b) 给出的十字形

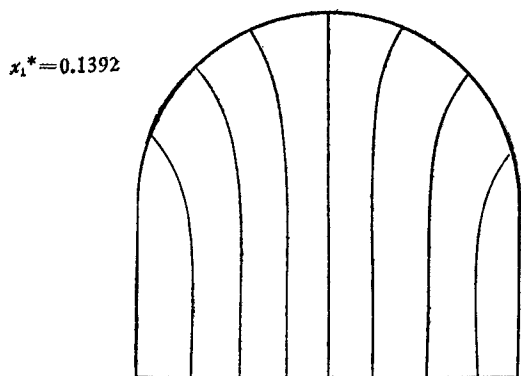


图 22 拱形波导主模的电力线分布图
Fig. 22 Electric field lines of dominant mode in arch waveguide

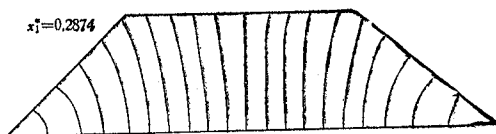


图 23 梯形波导主模的电力线分布图
Fig. 23 Electric field lines of dominant mode in ladder shape waveguide

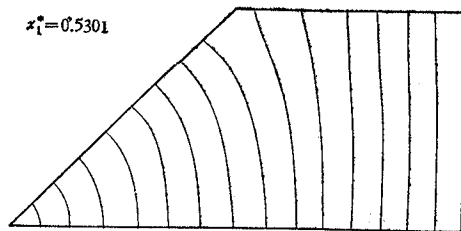


图 24 直角梯形波导主模的电力线分布图
Fig. 24 Electric field lines of dominant mode in right-ladder shape waveguide

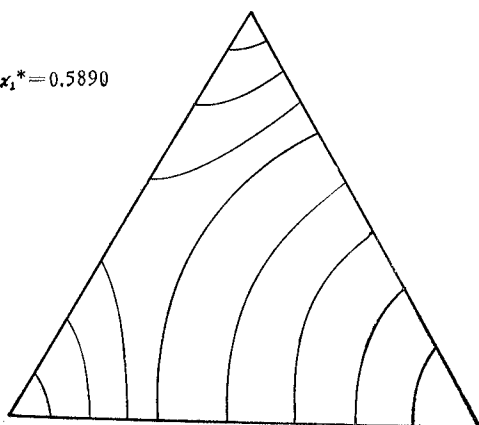


图 25 等边三角形波导主模的电力线分布图
Fig. 25 Electric field lines of dominant mode in equilateral triangular waveguide

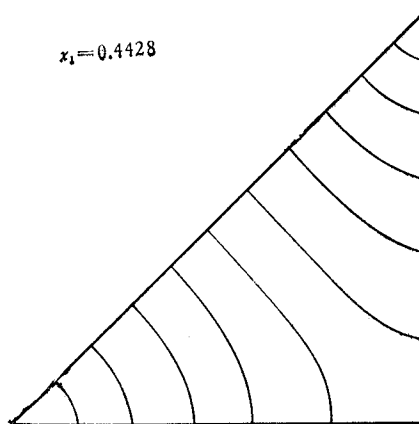


图 26 直角三角形波导主模的电力线分布图
Fig. 26 Electric field lines of dominant mode in right-triangular waveguide

波导第三个磁波 H_3 的电力线分布, 则正是 Marié 型 $H_{10}^a - H_{10}^b$ 波变换器第二段—十字形波导变换段中的工作波型。

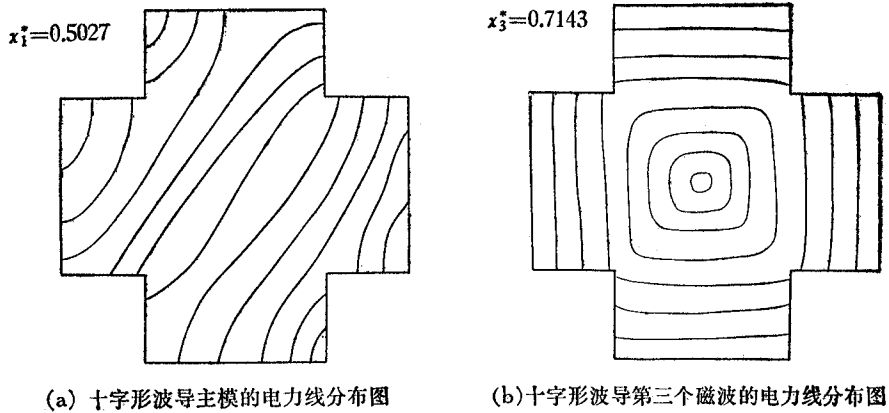


图 27 十字波导两个磁波的电力线分布图

Fig. 27 Electric field lines of two H modes in cross-like waveguide

- (a) Electric field lines of dominant mode in cross-like waveguide
 (b) Electric field lines of third H mode in cross-like waveguide

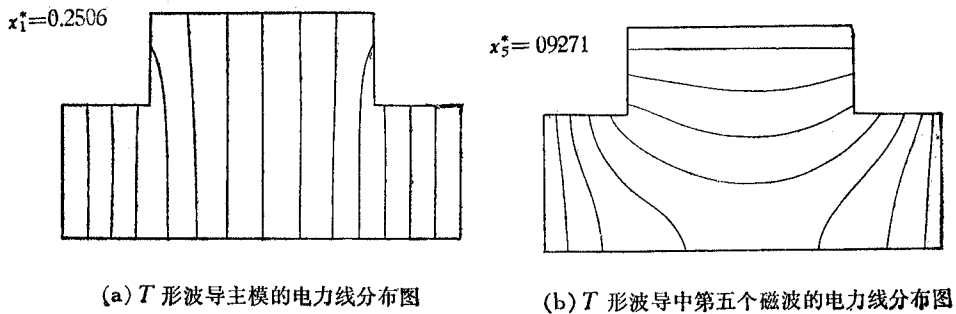


图 28 T形波导两个磁波的电力线分布图

Fig. 28 Electric field lines of two H modes in T-waveguide

- (a) Electric field lines of dominant mode in T-waveguide
 (b) Electric field lines of fifth H mode in T-waveguide

四、讨 论

要编制一个用有限元法求解任意横截面形状波导本征值问题的标准程序是不可能的,实际上也没有这个必要。本文所提供的程序适用于求解一大类横截面周界由直线和圆弧围成的波导的本征值和本征函数。对于如图 3—图 14 所示的波导或它们的变种(例如单脊波导是双脊波导当 $N_2 = N_3$, $B_3 = 0$ 时的特例等),不需作任何变动,只要输入事先定好的剖分和几何参数直接调用本程序,即可上机求解。对于其它形状更为一般的波导,由于所提供的程序在单元分析、总体合成和广义本征值问题的求解等环节的实现上是完全通用的,所以只要合理利用程序中的剖分子程序,将曲线边界裁弯取直,用适当的折线来逼近,待准备好了有关剖分和几何信息之后,仍可用本文的程序进行求解。这就可以大大简化解题过程,缩短解题周期。

利用本文的程序可以直接研究一些很难用解析法求解的波导的传输特性及其中各简正波的场结构(例如对平面立体电路鱼鳍线特性的计算等). 同时对于那些根本不可能用解析法计算的变截面波导问题(例如 L 形波导 $H_{10}^0-H_{20}^0$ 波型变换器^[8]和 Marié 型 $H_{10}^0-H_{20}^0$ 波型变换器特性的分析等^[7]), 使用本文的程序结合耦合波理论, 也可进行计算. 在此基础上还可对有关的微波元件, 尤其是多模元件进行改进设计, 提出较佳或最佳设计方案^[9].

本文承蒙石钟慈教授审阅并提出宝贵意见, 深致谢意.

参 考 文 献

- [1] J. B. Davies and C. Eng, P. I. E. E. **119**(1972), 33.
- [2] P. L. Arlett et al., P. I. E. E. **115**(1968), 1762.
- [3] R. E. Collin *Field Theory of Guided waves McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.*
- [4] 黄宏嘉, 微波原理, 科学出版社, 1963 年, 卷 (I).
- [5] 林为干, 微波理论与技术, 科学出版社, 1979 年, 第四章.
- [6] T. S. Saad, *the microwave engineer's Hand-book, Horizon House-Microwave, Inc., 1971, Vol. 1.*
- [7] S. S. Saad et al., IEEE on MTT, **MTT-25** (1977), 437.
- [8] 徐善驾, L 形波导 $H_{10}^0-H_{20}^0$ 波型变换器的计算机分析, 电子学报, (即将发表).
- [9] 徐善驾, H_{01} 波扇形波型变换器的改进设计, 中国电子学会微波学会、中国光学学会联合学术年会论文, 1981, 6.

THE FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF WAVEGUIDE EIGENVALUE PROBLEM

Xu Shan-jia

(China University of Science and Technology)

In this paper the finite-element analysis method of waveguide eigenvalue problem is briefly discussed. A standard program using finite-element method to solve waveguide eigenvalue problems is presented. With this program, it is possible to calculate the eigenvalues and eigenfunctions for a group of waveguides consisting of lines and circular arcs. The calculations of eigenvalue problems for more than ten different structure waveguides verify the reliability of the program.