

## 极化信号的优化接收理论：部分极化情形<sup>1</sup>

王雪松 庄钊文 肖顺平 郭桂蓉  
(国防科技大学 ATR 国家重点实验室 长沙 410073)

**摘要** 本文针对部分极化波情形，利用电磁波的 Stokes 矢量表示法研究了极化信号的优化接收问题；利用 Lagrange 乘子法，分别推导了以信号干扰功率差 (PDSI) 和信号干扰噪声比 (SINR) 作为优化目标函数时接收天线的全局最优极化；并通过数值实例验证了文中结论。

**关键词** 极化，信号干扰噪声比，信号干扰功率差，最优接收极化

**中图分类号** TN011, TN911.7

### 1 引言

在现代复杂密集的电磁环境中，电磁信号的增强问题已成为几乎所有涉及电波传播领域共同关注的、而且愈来愈重要和紧迫的问题。随着人们对电磁波极化特性的认识日益加深，以及极化捷变和分集等测量技术的发展，使得利用极化技术抑制干扰、增强信号成为可能，并且已经出现了一些这方面的工作<sup>[1-4]</sup>，但这些工作都是针对全极化电磁波情形进行的。

在实际的测量过程中，天线接收的电磁波在很多情况下是部分极化波，例如在遥感合成孔径雷达 (SAR) 成象中，散射波是雷达照射波束内大量独立散射体回波的非相干合成，通常是部分极化的<sup>[5]</sup>；在雷达探测目标的过程中，地物、云雨的回波 (杂波) 往往也是部分极化的。部分极化情形下信号极化优化接收问题的研究迄今尚未见到公开报道，本文就是在这方面做了一些理论和方法上的探讨：采用 Stokes 矢量来表征部分极化波，分别以信号干扰噪声比 SINR (Signal-to-Interference-and-Noise-Ratio) 和信号干扰功率差 PDSI (Power-Difference-between-Signal-and-Interference) 作为优化目标函数，利用 Lagrange 乘子法推得了接收天线的全局最优极化。其中 SINR 适用于一般的电磁干扰环境；但是当电磁环境比较复杂恶劣时，即干扰较强而信号较弱，那么对于抑制干扰而言，采用 PDSI 作为优化目标函数往往较采用 SINR 作为优化目标函数更加有效<sup>[4]</sup>。

### 2 部分极化电磁波的 Stokes 矢量表征

Stokes 在研究准单色波的部分极化现象时，提出了著名的电磁波 Stokes 矢量描述法，其定义为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle |e_x|^2 \rangle + \langle |e_y|^2 \rangle \\ \langle |e_x|^2 \rangle - \langle |e_y|^2 \rangle \\ 2 \langle |e_x| \cdot |e_y| \cdot \cos \phi \rangle \\ 2 \langle |e_x| \cdot |e_y| \cdot \sin \phi \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

<sup>1</sup> 1997-04-17 收到，1997-09-24 定稿

它是一个 4 维列矢量, 完全地表征了一个波的振幅和极化, 它的 4 个元素称为电磁波 Stokes 参量, 其中  $e_x$ 、 $e_y$  表示电磁波在  $(X, Y)$  极化基下 (通常选为  $(H, V)$ , 即水平、垂直极化基) 的电场分量,  $\phi$  为二者的相差。将 Stokes 矢量  $\mathbf{J}$  记为分块形式

$$\mathbf{J} = g_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

则  $\mathbf{J}$  具有如下性质:

$$\|\mathbf{g}\| \leq 1, \quad (3)$$

式中的“=”号仅对纯极化波 (即完全极化波) 才成立; 如果上式左端等于 0, 则该电磁波称为未极化波; 介于这两种极端情况之间的称为部分极化波。

在雷达极化学中研究目标的散射问题时, 特别是对于后向散射情形, 往往选用后向散射对准 (BSA, Backward Scattering Alignment)

原则, 示如图 1。这时对于发射或接收天线采用一个局部右手坐标系 (LRH, Local Right-Handed), 而对散射电波则采用了一个局部左手坐标系 (LLH, Local Left-Handed)。容易证明, 同一个平面电磁波在这两种坐标系下 Stokes 矢量表达式之间的关系为 [6]

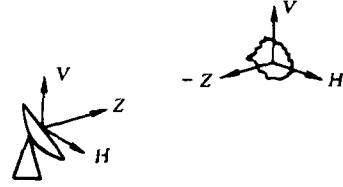


图 1 雷达极化学中的后向散射对准原则 (BSA)

$$\mathbf{J}_L = [g_{L0}, g_{L1}, g_{L2}, g_{L3}]^T = [g_{R0}, g_{R1}, -g_{R2}, -g_{R3}]^T = U_{34} \mathbf{J}_R \quad (4)$$

其中下标“L”和“R”分别表示 LLH 和 LRH 坐标系,  $U_{34}$  为对角矩阵,  $U_{34} = \text{diag}\{1, 1, -1, -1\}$ 。以下为区别起见, 我们将 BSA 下散射波的 Stokes 矢量记为  $\bar{\mathbf{J}}$  (即在 LLH 坐标系下), 进而可得天线对电波的接收功率为 [6]

$$P_r = \frac{1}{2} F \mathbf{J}_r^T U_4 \bar{\mathbf{J}}, \quad (5)$$

其中  $F$  是一个与波长和来波方向天线增益有关的量, 通常它与天线以及来波的极化方式无关;  $U_4 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ ,  $\mathbf{J}_r$  为接收天线的 Stokes 矢量, 它满足

$$g_{r0}^2 = g_{r1}^2 + g_{r2}^2 + g_{r3}^2 = \|\mathbf{g}_r\|^2, \quad (6)$$

即为完全极化的;  $\bar{\mathbf{J}}$  代表来波的 Stokes 矢量, 它既可以是完全极化波, 也可以是部分极化波。

### 3 部分极化情况下信号干扰功率差 (PDSI) 的最优化

#### 3.1 天线主瓣接收功率的最优化

在极化测量过程中, 假设在接收天线主瓣内存在着  $N$  个互不相关的散射源, 每个散射源辐射场用 Stokes 矢量表示为  $\bar{\mathbf{J}}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ 。设测量系统热噪声与各个散射源以及接收天线的极化方式相互独立, 噪声功率电平记为  $N_0$ 。设接收天线的 Stokes 矢量为  $\mathbf{J}_r$ , 下面为了讨论问题方便起见, 假设接收天线具有单位增益, 即规定

$$\|\mathbf{g}_r\|^2 = \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r = 1, \quad (7)$$

那么接收天线主瓣内散射场的平均接收功率为

$$P_r(\mathbf{g}_r) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N F \mathbf{J}_r^T U_4 \bar{\mathbf{J}}_k. \quad (8)$$

从上式可以看出, 由于  $F$  是一个与  $\mathbf{J}_r$  (或  $\mathbf{g}_r$ ) 无关的常量, 不妨可令其为 2, 以简化表达式; 另外,  $U_4$  为常满秩 4 阶方阵, 亦可与  $\bar{\mathbf{J}}_k$  归并为一项, 记为  $\mathbf{J}_k$  (注意, 这里  $\mathbf{J}_k$  上方虽无短横, 但这只是为了书写方便, 并非意味着它是  $LRH$  下的 Stokes 矢量), 于是上式可简化为

$$P_r(\mathbf{g}_r) = \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_r^T \left( \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k \right). \quad (9)$$

要实现天线主瓣接收功率的最优化, 即要求解如下的带约束最优化问题:

$$\text{Max } P_r(\mathbf{g}_r) = \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_s, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{g}_r\| = 1, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{J}_s = \sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k = [g_{s0}, \mathbf{g}_s^T]^T$ , 则 (9) 式可以展开成

$$P_r(\mathbf{g}_r) = g_{s0} + \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_s. \quad (11)$$

根据矩阵理论, 可以直接写出最优接收极化为

$$\mathbf{g}_{r\text{opt}} = \mathbf{g}_s / \|\mathbf{g}_s\|. \quad (12)$$

相应的最大接收功率为

$$P_{r\text{opt}} = P_r(\mathbf{g}_{r\text{opt}}) = g_{s0} + \|\mathbf{g}_s\|. \quad (13)$$

可以看出, (12) 式具有明显的物理含义:  $\mathbf{g}_s$  为天线主瓣内总散射场的纯极化分量, 当接收天线极化与之相匹配时, 就得到最大的接收功率。(13) 式即为天线主瓣内总散射场纯极化分量能流密度与未极化分量的一半能流密度的和<sup>[5]</sup>。同理, 由 (11) 式可求得最小接收极化  $\mathbf{g}_{r\text{min}}$  为  $\mathbf{g}_{r\text{min}} = -\mathbf{g}_{r\text{opt}}$ ; 相应的最小接收功率为  $P_{r\text{min}} = P_r(\mathbf{g}_{r\text{min}}) = g_{s0} - \|\mathbf{g}_s\|$ 。显然地,  $\mathbf{g}_{r\text{min}}$  和  $P_{r\text{min}}$  具有与 (12)、(13) 式完全类似的物理解释, 并且注意到  $\mathbf{g}_{r\text{min}}$  和  $\mathbf{g}_{r\text{opt}}$  恰为一对正交极化。

### 3.2 信号干扰功率差 PDSI 的最优化

假设在接收天线主瓣中存在着  $N$  个信号源场, 其等效 Stokes 矢量记为  $\mathbf{J}_n, n = 1, 2, \dots, N$ ; 同时也存在着  $M$  个干扰源, 它们的等效 Stokes 矢量记为  $\mathbf{I}_m, m = 1, 2, \dots, M$ 。注意到, 这所有  $M + N$  个电场是互不相关的, 则优化目标函数信号干扰功率差 PDSI 可以写为

$$\text{PDSI}(\mathbf{g}_r) = \sum_{n=1}^N \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_n - \sum_{m=1}^M \mathbf{J}_r^T \mathbf{I}_m. \quad (14)$$

若定义  $\mathbf{J}_{n+m} = -\mathbf{I}_m, k = 1, 2, \dots, M$ , 则 (14) 式可写作

$$\text{PDSI}(\mathbf{g}_r) = \mathbf{J}_r^T \left( \sum_{n=1}^{M+N} \mathbf{J}_n \right). \quad (15)$$

可以看出, (15) 式在形式上与 (9) 式完全相同, 因而可以仿照上一节中天线主瓣接收功率最优化方法, 对 PDSI 进行最优化处理。如果记  $\mathbf{J}_s = \sum_{n=1}^{M+N} \mathbf{J}_n$ , 那么只需将 (13) 式中  $P_r$  换为 PDSI, 即可把 (12)、(13) 式直接作为 PDSI 优化问题的解。

#### 4 部分极化情况下信号干扰噪声比 (SINR) 的最优化

继续沿用上一节所述的关于信号源和干扰源的假设, 则此时的优化目标函数 SINR 可以写成<sup>[6]</sup>

$$\text{SINR}(\mathbf{g}_r) = \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_n}{\left(\sum_{m=1}^M \mathbf{J}_r^T \mathbf{I}_m + N_0\right)} \quad (16)$$

它是信号接收功率与干扰和噪声功率之和的比值。它越大, 说明信号的接收效果越好。在实际应用问题中, SINR 是一个衡量复杂密集环境中电子系统对感兴趣电磁信号的接收有效程度的重要指标。若记

$$\mathbf{J}_S = \sum_{n=1}^N \mathbf{J}_n = [\mathbf{g}_{S0}, \mathbf{g}_S^T]^T, \quad \mathbf{J}_I = \sum_{m=1}^M \mathbf{J}_m = [\mathbf{g}_{I0}, \mathbf{g}_I^T]^T,$$

则 SINR 的极化优化问题可用下式表示:

$$\text{Max SINR}(\mathbf{g}_r) = \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_s / (\mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_I + N_0), \quad \text{s.t. } \|\mathbf{g}_r\| = 1. \quad (17)$$

为求解这个带约束的最优化问题, 可以采用 Lagrange 乘子法将其转化为一个无约束的最优化问题后, 再利用多元函数求极值的方法进行求解。为此构造 Lagrange 函数

$$L(\mathbf{g}_r) = \text{SINR}(\mathbf{g}_r) - \lambda(\mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r - 1),$$

其中  $\lambda$  为 Lagrange 乘子。对  $\mathbf{g}_r$  求梯度并令其为 0, 则有

$$\nabla L(\mathbf{g}_r) = \nabla \text{SINR}(\mathbf{g}_r) - 2\lambda \mathbf{g}_r = 0.$$

将 SINR 的表达式带入上式展开后求关于  $\mathbf{g}_r$  的梯度, 整理后有

$$[\mathbf{g}_{I0} + N_0] \mathbf{g}_S - \mathbf{g}_{S0} \mathbf{g}_I + (\mathbf{g}_S \mathbf{g}_I^T - \mathbf{g}_I \mathbf{g}_S^T) \mathbf{g}_r - \mu \mathbf{g}_r = 0, \quad (18)$$

式中  $\mu$  为等效 Lagrange 乘子。记

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{S0} \mathbf{g}_I - (\mathbf{g}_{I0} + N_0) \mathbf{g}_S, \quad \mathbf{A} = \mathbf{g}_S \mathbf{g}_I^T - \mathbf{g}_I \mathbf{g}_S^T. \quad (19)$$

下面分两种情况讨论 (18) 式的求解问题。

(1) 当  $\mathbf{g} \neq 0$  时, 则由 (18) 式可以求出  $\mathbf{g}_r$  的表达式为

$$\mathbf{g}_r = [\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{g}, \quad (20)$$

将其带入  $\|\mathbf{g}_r\| = 1$  这一约束条件中, 并注意到  $\mathbf{A}$  为一个反对称矩阵, 即有  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ , 则有如下关系成立:

$$\mathbf{g}^T [\mu^2 \mathbf{I} - \mathbf{A}^2]^{-1} \mathbf{g} = 1. \quad (21)$$

在此式中,除  $\mu$  外,其余参量皆为已知,故可由此式解出  $\mu$  值。将其展开后可以看出来, (21) 式实际上是一个关于  $\mu$  的 6 次方程,或者更进一步地说,是关于  $\mu^2$  的 3 次方程。由于该方程中涉及到函数矩阵的求逆问题,而且通常情况下对该方程的根的个数以及其解析表达式的讨论比较繁琐冗长,因此在实际使用时需要运用数值方法来逐个计算得出  $\mu$  值<sup>[7]</sup>。当得到所有可能的  $\mu$  值以后,将它们依次代入 (20) 式中算出相应的  $\mathbf{g}_r$  矢量,然后再将这些  $\mathbf{g}_r$  代入 (18) 式中计算相应的 SINR 值并比较大小,最后选择其中最大的一个作为最优解。

(2) 当  $\mathbf{g} = 0$  时,容易看出  $\mathbf{g}_r$  为矩阵  $A$  的归一化特征向量,  $\mu$  为相应的特征值。

## 5 数值实例

为了验证文中结论的正确性,现在举一个简单的例子。在此例中,所有的参数都是经过仔细选择的,其目的是为了避免繁琐而困难的计算步骤,从而可以直观地认识和“感受”到所用各个结论的物理含义和正确性。

假设天线主瓣内有两个能流密度相同的辐射场  $\mathbf{J}_S$  和  $\mathbf{J}_I$ , 它们分别为一个  $45^\circ$  线极化波和一个水平线极化波,  $\mathbf{J}_S = [1, 0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{J}_I = [1, 1, 0, 0]^T$ , 并假设测量系统噪声等效功率电平为  $N_0 = 1$ 。根据 (12)、(13) 式可以求得使天线主瓣接收功率达到最大的接收极化波为  $\mathbf{g}_{r1} = [0.707, 0.707, 0]^T$ , 这是一个  $22.5^\circ$  线极化, 相应的最大接收功率为 3.414。同理, 根据文中 3.2 节所述的 PDSI 优化公式, 可以求得使 PDSI 达到最大的接收极化波为  $\mathbf{g}_{r2} = [-0.707, 0.707, 0]^T$ , 其为一个  $67.5^\circ$  线极化, 相应的最大 PDSI 为 1.414。

下面求解 SINR 优化问题。根据 (19) 式可以求得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

代入 (21) 式中得到一个关于  $\mu$  的 2 次方程, 解出  $\mu$  为  $\pm 2$ 。当  $\mu=2$  时, 解出  $\mathbf{g}_r = [-0.8, 0.6, 0]^T$ , 相应的 SINR=4/3; 当  $\mu=-2$  时, 解出  $\mathbf{g}_r = [0, -1, 0]^T$ , 相应的 SINR 等于 0; 显然最优接收极化  $\mathbf{g}_r = [-0.8, 0.6, 0]^T$ , 相应的最大 SINR 等于 1.333。

注意到, 以上的优化处理是针对两个纯极化波进行的, 那么也可以利用文献 [2-4] 中所述的方法求解。经过简单的计算, 最终结果表明, 本文所述的方法与这些文献中的基于极化波相位描述子的最优化方法得到完全一致的结论。这里值得说明的是, 本文所用噪声功率电平  $N_0$  实际上是文献 [2, 3] 中的两倍, 这是由于在 (5) 式中令  $F$  等于 2 后消掉了右边第一项的 1/2 因子所致。

若把  $\mathbf{J}_S$  和  $\mathbf{J}_I$  改为部分极化波, 并且保持它们的极化分量不变, 而仅仅使两个波的能流密度增加一倍, 即令  $\mathbf{J}_S = [2, 0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{J}_I = [2, 1, 0, 0]^T$ , 重新进行上述优化处理, 可以得到: 使天线主瓣接收功率达到最大的接收极化仍为  $[0.707, 0.707, 0]^T$ , 相应的最大接收功率变为 5.414; 使 PDSI 达到最大的接收极化也不变, 仍为  $[-0.707, 0.707, 0]^T$ , 相应的最大 PDSI 仍为 1.414; 根据 (21) 式可求得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

将它们代入 (21) 式后, 同样得到一个关于  $\mu$  的 2 次方程, 解得  $\mu = \pm 2\sqrt{3}$ , 最后求得最优接收极化为  $[-0.764, 0.645, 0]^T$ , 相应的 SINR=1.183, 它比完全极化波情况下的最大 SINR 值要略小一些。

## 6 结 语

在电磁测量过程中, 信号增强是一个十分重要的问题, 特别是在现代日趋复杂恶劣的电磁环境中, 如何有效地抑制干扰影响、改善信号接收质量, 已经成为雷达、通信、导航、遥感以及电子对抗等领域中愈来愈引人关注的问题。本文以此为背景, 针对在实际情况中最常遇到的部分极化情形, 从理论和方法上研究了利用变极化技术进行电磁信号的最优接收问题。与文献 [2-4] 相比, 本文没有采用电磁波极化状态的相位描述子  $(\alpha, \phi)$ 、而是采用 Stokes 矢量对其进行表征, 这有利于直接得出接收天线主瓣接收功率和 PDSI 的全局最优解的解析表达式, 但是对 SINR 优化问题导致了一个关于 Lagrange 乘子的 6 次方程求根问题, 这使得在通常情况下难以简洁地给出 SINR 全局最优解的一般性解析表达式, 因而必需借助数值方法求解。

## 参 考 文 献

- [1] Stapor D P. Optimal receive antenna polarization in the presence of interference and noise. IEEE Trans. on AP, 1995, AP-43(5): 473-477.
- [2] 王雪松, 肖顺平, 曾勇虎, 等. 极化轨道约束下的最优极化 (一). 微波学报, 1997, 13(1): 33-42.
- [3] 王雪松, 庄钊文, 肖顺平, 等. 极化轨道约束下的最优极化 (二). 微波学报, 1997, 13(3): 219-227.
- [4] 王雪松, 庄钊文, 肖顺平, 等. 极化轨道约束下的最优极化 (三). 微波学报, 1997, 13(4): 314-325.
- [5] Van Zyl J J, *et al.* On the optimum polarizations of incoherently reflected waves. IEEE Trans. on AP, 1987, AP-35(7): 818-825.
- [6] Guissard A. Mueller and Kennaugh matrices in radar polarimetry. IEEE Trans. on GRS, 1994, GRS-32(3): 590-597.
- [7] Van Zyl J J. On the Importance of Polarization in Radar Scattering Problems[Ph. D Dissertation]. Caltech Antenna Lab. Rep, 120, 152, California Institute of Technology, Pasadena: 1985.

## THE THEORY ON OPTIMAL RECEPTION OF POLARIZED SIGNALS: THE PARTIALLY POLARIZED CASE

Wang Xuesong    Zhuang Zhaowen    Xiao Shunping    Guo Guirong

(ATR Lab., National University of Defense Technology, Changsha 410073)

**Abstract** In this paper, the problem of optimal reception of partially polarized signals is investigated by means of Stokes vector description of EM waves. The receiving antenna's global optimal polarizations are derived using Lagrange multiplier method with SINR(Signal-to-Interference-and-Noise-Ratio) and PDSI(Power-Difference-between-Signal-and-Interference) as the objective functions respectively. At the end of this paper, results are verified by a numerical example.

**Key words** Polarization, Signal-to-interference-and-noise-ratio, Power-difference-between-signal-and-interference, Optimal receiving polarization

王雪松: 男, 1972 年生, 博士研究生, 专业方向: 信号处理与目标识别, 雷达极化信息处理。

庄钊文: 男, 1958 年生, 教授, 专业方向: 信号处理与目标识别, 雷达极化, 模糊信息处理。

肖顺平: 男, 1964 年生, 副教授, 专业方向: 信号处理与目标识别, 雷达极化信息处理。