

基于连续插值逼近的电阻抗成象的图象重建算法¹

杜 岩 柳重堪 程吉宽 吴少淳

(北京航空航天大学电子工程系 北京 100083)

摘 要 本文提出了电阻抗成象的图象重建算法中一种新的电导率分布函数逼近方法——连续插值函数逼近法。它充分利用有限元方法计算上的特点，在计算量不增加甚至有所减少的情况下，获得了比传统的分片常数逼近法更好的图象重建效果。

关键词 图象重建，电阻抗成象，有限元方法，插值逼近，反问题

中图分类号 TN911.73

1 引 言

电阻抗成象 (Electrical Impedance Tomography, 简称 EIT) 是一种正处于迅速发展中并有广阔应用前景的图象重建新技术^[1-6]。它本质上是一个数学物理反问题，其数学模型为

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}; \quad (1)$$

$$-\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = J; \quad (2)$$

$$u|_{\partial \Omega} = u_j^0; \quad (3)$$

其中 ∇ 为梯度算子； Ω 为物体所在的空间区域， $\partial \Omega$ 为其边界； σ 为未知电导率分布函数； u 为未知电势分布函数； J 为边界电流密度函数， u_j^0 为相应的边界电势分布函数。当 σ 已知时，(1)、(3) 式为周知的 Laplace 方程的 Dirichlet 问题，它的解在 Hadamard 意义下是适定的；(1)、(2) 式为周知的 Neumann 问题，在指定了零电势点以后，它的解在 Hadamard 意义下也是适定的。EIT 的目的就是要根据多余的边界信息来反演 σ 。当 σ 已知时，求解 (1)、(2) 式或 (1)、(3) 式称为 EIT 的正问题；由 (1)、(2)、(3) 式求解 σ 的问题称为 EIT 的反问题。EIT 反问题可以转化为下面的非线性最小二乘问题^[5,6]：

$$\min_{\sigma} \phi(\sigma), \quad (4)$$

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \|f_i(\sigma) - v_i\|^2, \quad (5)$$

其中 f_i 为与第 i 次输入电流相对应的电导率分布到边界电压分布的映射。

迄今为止的 EIT 图象重建算法，在用有限元方法将问题 (1)、(2) 式离散化求解正问题时，都是用分片常数来逼近待求函数 σ 。分片常数函数在 Ω 上是不连续的，只是由于它计算上的简单性，一直在 EIT 图象重建中被采用^[1-6]。

¹ 1996-06-26 收到，1997-03-12 定稿
航空科学基金资助项目

本文提出一种用连续插值函数逼近 σ 的图象重建算法, 它与目前流行的图象重建算法的区别在于, 求解正问题时对 σ 使用了不同逼近方法. 它充分利用有限元插值基函数在计算上的特点, 使得在解正问题时几乎不增加计算量, 而解反问题时的计算量甚至有所减少 (对于线性插值的情形). 这种方法的图象重建效果比传统的分片常数逼近法更为令人满意. 模拟计算表明, 即使真实电导率分布函数是不连续的分片常数, 本文的方法也比分片常数逼近法的图象重建效果好.

2 解正问题的有限元方法

为方便讨论, 以下研究二维 EIT 问题, 但此方法可毫无困难地推广到三维情况.

正问题 (1)、(2) 式的解在选定了零电势点 (x^0, y^0) 后是唯一的, 为保证问题的相容性, 要求选定的零电势点与 (3) 式中的零电势点相同, 即要求

$$u_j^0(x^0, y^0) = 0, \quad (x^0, y^0) \in \partial\Omega. \quad (6)$$

求解 (1)、(2)、(6) 式的有限元方法首先将其化为相应的变分问题^[7], 与 (1)、(2)、(6) 式相应的 Galerkin 变分问题为: 求 $u \in U$, 使得 $\forall v \in U$ 有

$$D(u, v) - G(v) = 0, \quad (7)$$

其中

$$U = \{v | v \in H^1(\Omega), v(x^0, y^0) = 0\}, \quad (8)$$

$$D(u, v) = \iint_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx dy, \quad (9)$$

$$G(v) = \int_{\partial\Omega} J v ds. \quad (10)$$

然后再用有限元网格将区域 Ω 离散化, 得到近似变分问题:

$$\sum_{n=1}^{NE} \iint_{e_n} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \sum_{n=1}^{NE} \int_{\gamma_n} J v ds, \quad (11)$$

其中 γ_n 为有限单元 e_n 落在边界 $\partial\Omega$ 上的边, 若 e_n 的边全都不落在 $\partial\Omega$ 上, 则 $\gamma_n = \phi$ (空集).

计算 (11) 式时, 在每个有限单元 e_n 上都要计算积分. 为在计算过程中保证 $u, v \in U$, 需要构造插值基函数, 对 u, v 进行分片插值. 为了后面的应用, 我们详细叙述三角元线性插值基函数的构造.

对于三角元 e_n , 只要知道了它的三个顶点 P_i, P_j, P_k (假设按逆时针方向排列), 则线性插值基函数为^[7]

$$\left. \begin{aligned} N_i(x, y) &= [1/(2\Delta e_n)](a_i x + b_i y + c_i), \\ N_j(x, y) &= [1/(2\Delta e_n)](a_j x + b_j y + c_j), \\ N_k(x, y) &= [1/(2\Delta e_n)](a_k x + b_k y + c_k), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\Delta e_n = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

是 e_n 的面积;

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_k & 1 \end{vmatrix}, & a_j &= \begin{vmatrix} y_k & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix}, & a_k &= \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix}; \\ b_i &= -\begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_k & 1 \end{vmatrix}, & b_j &= -\begin{vmatrix} x_k & 1 \\ x_i & 1 \end{vmatrix}, & b_k &= -\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}; \\ c_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix}, & c_j &= \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_i & y_i \end{vmatrix}, & c_k &= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

有了插值基函数以及 u 、 v 在节点 P_i 、 P_j 、 P_k 上的函数值 u_i 、 u_j 、 u_k 和 v_i 、 v_j 、 v_k ，便可以方便地构造 e_n 上对 u 、 v 的插值函数。记

$$[N] = [N_i(x, y), N_j(x, y), N_k(x, y)], \quad (15)$$

$$\{u\}_{e_n} = [u_i, u_j, u_k]^T, \quad (16)$$

则在 e_n 上有

$$u = [N]\{u\}_{e_n}. \quad (17)$$

关于 v 的插值函数，完全类似。这样便可以将 (11) 式中的每一项积分计算出来。

$$\iint_{e_n} \sigma \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \iint_{e_n} \sigma \{v\}_{e_n}^T D_{e_n} \{u\}_{e_n} dx dy, \quad (18)$$

记

$$M_{e_n} = \iint_{e_n} \sigma D_{e_n} dx dy, \quad (19)$$

称之为 e_n 的单元刚度矩阵。由 (11) 式右端项计算出荷载向量，便可以将 u 在各个节点上的函数值计算出来。

3 用连续插值函数逼近

现有的 EIT 图象重建算法都是用分片常数逼近 σ ，虽然用有限元方法求解正问题时允许介质有间断（要求间断点或线必须落在有限单元的边上），但是，考虑到数学模型建立的过程，显然用分片常数不如用连续函数逼近 σ 更好些。用连续函数逼近 σ 时，最大的困难来自积分 (11) 式或 (19) 式的计算，用分片常数逼近 σ 时， e_n 上的电导率分布函数假设为常数，可以提出积分号，从而容易将积分计算出来。我们用有限元插值基函数对 σ 进行分片插值，得到基于连续插值函数逼近 σ 的 EIT 的图象重建算法。

用连续函数逼近 σ 的关键是插值节点的选取，为了方便起见，我们选取的插值节点和有限元网格的节点一致，这样可以带来计算上的很大简化。在这种逼近方式下， σ 在每个有限单元内部充分光滑，在有限单元边界从而在整个区域 Ω 上连续。下面就对 σ 在三角形有限单元上进行线性插值的情况进行详细讨论，并给出单元刚度矩阵 M_{e_n} 的计算方法。

设 σ 在节点 P_i 、 P_j 、 P_k 的函数值分别为 σ_i 、 σ_j 、 σ_k ，记

$$\{\sigma\}_{e_n} = [\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k]^T, \quad (20)$$

则利用 e_n 的线性插值基函数 $N_i(x, y)$ 、 $N_j(x, y)$ 、 $N_k(x, y)$ 可得 σ 在 e_n 上为

$$\sigma = [N]\{\sigma\}_{e_n}, \quad (21)$$

这就是 σ 在 e_n 上的表达式; 当使用高次插值时, 也可得到类似的表达式. 于是有

$$\begin{aligned} M_{e_n} &= \iint_{e_n} \sigma D_n dx dy = \iint_{e_n} [N]\{\sigma\}_{e_n} D_n dx dy = D_n \iint_{e_n} [N]\{\sigma\}_{e_n} dx dy \\ &= D_n \iint_{e_n} [\sigma_i N_i(x, y) + \sigma_j N_j(x, y) + \sigma_k N_k(x, y)] dx dy = D_n \Delta e_n \cdot \frac{1}{3}(\sigma_i + \sigma_j + \sigma_k). \end{aligned} \quad (22)$$

在利用分片常数逼近 σ 时, 记 e_n 上的电导率为 σ_n , 则

$$M_{e_n} = \iint_{e_n} \sigma_n D_n dx dy = D_n \Delta e_n \cdot \sigma_n. \quad (23)$$

比较 (22)、(23) 式可见, 利用有限元插值基函数对 σ 进行线性插值时, 与对 σ 进行分片常数逼近的情况相比, 求解正问题的计算量几乎没有增加.

必须指出: 第一, 对 σ 和对 u 进行的插值在计算上是独立的, 即对 u 进行线性插值或高次插值, 不必要求对 σ 也进行同样次数或形式的插值, 甚至插值节点的选取也可以不一致, 但是, 对 u 、 σ 进行同样形式的插值, 可以带来计算上的方便; 第二, 无论对 u 进行何种形式的插值, 都可以对 σ 进行线性插值, 此时 (22) 式的结果中将只含有 σ 在三个节点上的函数值, 而且三个函数值将是线性组合, 组合系数都是 $1/3$, 因而计算上特别方便.

4 反问题的求解和重建图象

求解反问题的关键是 Jacobi 矩阵和目标函数 $\phi(\sigma)$ 的梯度向量的计算. 对于用上述线性插值函数逼近 σ 的情况, 计算 $f(\sigma)$ 的 Jacobi 矩阵和目标函数 $\phi(\sigma)$ 的梯度向量 $\phi'(\sigma)$ 的方法, 与用分片常数逼近 σ 时的情形基本一样, 只要注意到这时 σ 在每个插值节点上的函数值, 要影响一个到几个有限单元上的电导率分布即可.

我们用文献 [6] 中的组合变尺度法来求解反问题, 计算模型的有限元网格如图 1. 真实和重建图象如图 2. 注入电流采用正弦型电流, 共 28 个电极, 注入 27 次电流. 由于介质有间断的情形在实际应用中具有普遍性, 在模拟边界电压数据时, 真实电导率分布使用分片常数来表示, 在这种情形下对 σ 进行反演时, 初看起来似乎用分片常数逼近法将优于连续函数逼近法, 但数值试验却表明实际效果恰恰相反. 这充分说明了连续函数逼近法的优越性.

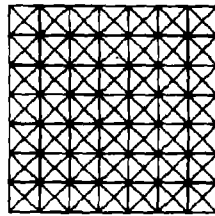


图 1 计算模型的有限元网格

需要指出, 虽然从原理上讲计算电导率分布函数 σ 与计算电阻率分布函数 $\rho(\rho = \sigma^{-1})$ 没有本质区别, 然而我们发现计算 ρ 时在实际效果上要好一些, 所以本文结果均是计算的 ρ , 但是为了计算上的方便, 我们解正问题时仍然转化为对 σ 进行插值. 图中显示的计算结果也是电

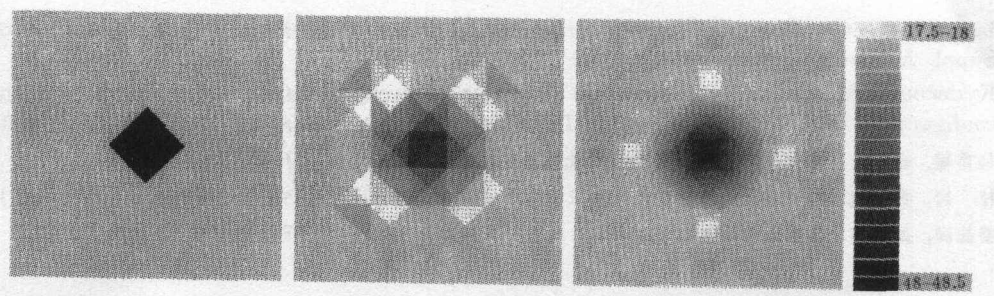


图 2 (a) 真实图象, (b) 分片常数逼近法的重建图象, (c) 连续插值逼近法的重建图象, (d) 灰度卡和灰度标

阻率 ρ 。重建图象的迭代次数都是 100 次, 迭代初值均为各分量都是 1 的均匀初值, 单位是 $\Omega \cdot \text{cm}$ 。

在将电阻率值量化成灰度值时, 为便于比较重建结果, 采用固定最大值和最小值的方法进行量化, 打印的图象具有 64 级灰度, 灰度卡上只列出了其中的 16 个 (含有从最亮到最暗排列的第 1, 5, 9, \dots , 61 个), 我们只给出灰度卡最亮和最暗两处所对应的电阻率值的范围, 其它地方按从亮到暗线性增加。本文所给出的图象均未进行任何后处理。

6 结论和分析

本文提出了一种新的电阻抗成象的图象重建算法——基于连续插值逼近的电阻抗成象的图象重建算法, 数值试验表明该方法比传统的分片常数逼近法具有更好的图象重建效果, 我们认为这主要是由于本文采用的逼近函数所具有的良好性质。本文采用的连续插值函数对电导率分布函数 σ 的逼近是点面结合的逼近, 它表面上是点上的逼近, 实质上通过插值过程转化成了面上的逼近; 而传统的分片常数逼近法则只是逐片的面上的逼近, 而且相邻的片之间是不连续的, 这种逼近思想与基于连续模型建立的微分方程是不符的; 从解正问题时对电流密度的逼近来看, 在对电势分布函数进行线性插值时, 分片常数逼近法在各有限单元上的电流密度是常向量, 而本文的方法在各有限单元上的电流密度则是线性向量函数, 显然其精度要高; 因而连续函数逼近法的实际逼近效果要好一些。

应该强调指出, 本文提出的基于连续插值函数逼近的方法具有重要意义, 它使现有绝大多数 EIT 图象重建算法 (凡是利用有限元方法解正问题的算法) 都有了两种形式: 传统的基于分片常数逼近的方法和本文的基于连续函数逼近的方法。一般说来, 对于线性插值的情形, 在要求同样分辨率的情况下, 求解反问题时, 本文方法较分片常数法的未知数大量减少, 从而使反问题的计算量大大减少, 特别是在使用基于 Jacobi 矩阵的图象重建算法 (如 Newton-Raphson 类算法) 时更是如此; 而在要求提高分辨率而加细网格时, 一般说来有限单元增加的数量远高于节点增加的数量, 从而本文方法计算量的增加速度也较分片常数逼近法计算量的增加速度慢; 所以本文方法比传统的分片常数逼近法具有明显的优越性。

参 考 文 献

- [1] Webster J G (Ed.). Electrical Impedance Tomography. Bristol England: Adam Hilger, 1990, 97-137.
- [2] Woo E J, et al. A robust image reconstruction algorithm and its parallel implementation in electrical impedance tomography. IEEE Trans. on Med. Imaging, 1993, MI-12(2): 137-146.

- [3] Isaacson D, *et al.* Comment on reconstruction algorithms. Clin. Phys. Physiol. Meas., 1992, Vol.13, Suppl. A: 83-89.
- [4] Kyriacou G A, *et al.* A reconstruction algorithm of electrical impedance tomography with optimal configuration of the driven electrodes. IEEE Trans. on Med. Imaging, 1993, MI-12(4): 430-438.
- [5] 柳重堪, 杜 岩, 李久平. 实现电阻抗层析成像的交错算法. 电子学报, 1995, 23(7): 11-14.
- [6] 杜 岩, 程吉宽, 柳重堪. 用组合变尺度法求解电阻抗成像问题. 中国生物医学工程学报, 1997, 16(2): 1-7.
- [7] 姜礼尚, 庞之垣. 有限元方法及其理论基础. 北京: 人民教育出版社, 1979, 第二章 §2. 第三章 §2.1

IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHM FOR ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY BASED ON APPROXIMATION BY CONTINUOUS INTERPOLATION FUNCTION

Du Yan Liu Zhongkan Cheng Jikuan Wu Shaochun

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract A new approximation method to distribution function of conductivity for electrical impedance tomography image reconstruction algorithm is proposed in this paper. This method is called continuous interpolation function method. Compared with the conventional piecewise constant method, the image reconstructed by this method is much better, while the amount of computation is not increased or even decreased because the good property of finite element method has been used sufficiently.

Key words Image reconstruction, Electrical impedance tomography, Finite element method, Interpolation approximation, Inverse problem

杜 岩: 男, 1966 年生, 博士生, 专业为信息传输与处理.

柳重堪: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事信息传输与处理、信号与系统中的数学方法等研究和教学工作.

程吉宽: 男, 1940 年生, 副教授, 长期从事遥控遥测、微型计算机应用的教学与研究工工作.

吴少淳: 男, 1964 年生, 讲师, 博士生, 主要从事信息传输与处理方面的研究.