第7卷 第5期
1985 年 9 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 7, No. 5
Sept., 1985

广义混合法与广义分裂法的统一*

黄 汝 激
(北京钢铁学院)

提 要

本文中，(1) 引入了广义混合基的概念，将作者在1982年提出的混合法推广成**广义混合法**；(2)引入了**广义分裂法**的概念，建立了广义混合法与广义分裂法之间的一一对应关系，从而**统一**了混合法与分裂法；(3)提出了**多级广义分裂法**及其算法；(4) 提出了基本分裂法中**等效树-花形网络**和**等效互联网络**的概念.

一、引 言

现代大网络理论有两个学派[1]：一个是实际网络**分裂法**[2-5]；另一个是线性代数法，即**混合法**[1,6]. 以前人们不了解二者之间的关系. Chua 和 Chen[1] 论证了分裂法对应于特殊的混合法，但其证法比较麻烦.

本文目的是：严格系统地将混合法推广成广义混合法，把分裂法推广成广义分裂法，并简明直观地论证二者之间的统一性，即二者之间存在的一一对应关系. 这种统一性的阐明不仅具有理论意义——统一了大网络的两个学派；而且具有实际意义——明白了二者是统一的，就可以结合采用二者的优点，即可利用分裂法的直观性对网络进行适当分裂，再利用混合法的系统性编写混合基方程，进行分裂求解.

本文还系统地提出了多级广义分裂法的算法和等效树-花形网络和等效互联网络的概念. 前者比文献[5]的要简明且更一般化，根据它可以进一步编写具体的算法和程序. 后者使分裂法具有比较清晰的物理概念和比较直观的电路表示.

本文主要采用文献[7]中的术语和符号.

二、广义混合法

考虑一个线性时不变集总参数网络(简称**线性网络**) N. 它的**图**为 $G=(X,U)$, $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 G 的点集，$U=\{1, 2, \cdots, b\}$ 为 G 的弧集. 令 $U=U_1\cup U_2$, $U_1\cap U_2=\phi$. 从 G 移去 U_2 得 y **子图** G_1；从 G **缩减** U_1 得 z **子图** G_2. 对应的子网络称为 y **子网络** N_1 和 z **子网络** N_2. 从 G_1 和 G_2 中各选定一个树 t_1 和 t_2，组成 G 的一个树

* 1983 年 10 月 31 日收到.

$t = t_1 \cup t_2$. t 的补树 $l = l_1 \cup l_2$. 对应于 t_1 的 f **割集组** Ω_{f1} 与对应于 l_2 的 f **回路组** M_{f2} 组成 G 对应于树 t 的 f **混合基** $E_f = \{\Omega_{f1}, M_{f2}\}$. 规定支路编号顺序为 t_1, l_1, t_2, l_2，则 f **混合基矩阵** F_f ($f \times b$ 阶，$f = r_1 + m_2$) 为

$$F_f = \begin{bmatrix} Q_{f1} & Q_{f12} \\ B_{f21} & B_{f2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1(t_1t_1) & Q_f(t_1l_1) & O(t_1t_2) & Q_f(t_1l_2) \\ \hline B_f(l_2t_1) & O(l_2l_1) & B_f(l_2t_2) & 1(l_2l_2) \end{array}\right], \tag{1}$$

式中

$$B_f(l_2t_1) = -Q_f(t_1l_2)^{\tau}, \quad B_f(l_2t_2) = -Q_f(t_2l_2)^{\tau}. \tag{2}$$

f 割集的线性组合称为**广义割集**. 它是割集和离集的推广. f 回路的线性组合称为**广义回路**. 它是回路和圈的推广. 设 T_1 和 T_2 各为 r_1 和 m_2 阶满秩方阵，则应用 f 阶满秩方阵

$$T_F = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \quad \det T_F \neq 0 \tag{3}$$

可把 f 混合基 E_f 变换成**广义混合基** $E = \{\Omega_1, M_2\}$. 对应的**广义混合基矩阵** F 为

$$F = T_F F_f = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix} = F_a + F_b, \tag{4}$$

式中，

$$F_a = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1Q_{f1} & 0 \\ 0 & T_2B_{f2} \end{bmatrix} \text{——广义混合基自矩阵}, \tag{4.1}$$

$$F_b = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T_1Q_{f12} \\ T_2B_{f21} & 0 \end{bmatrix} \text{——广义混合基互矩阵}. \tag{4.2}$$

采用标准复合支路[7]，引入下列记号：

$$U_e = \begin{bmatrix} V_{e1} \\ I_{e2} \end{bmatrix}, \quad W_e = \begin{bmatrix} I_{e1} \\ V_{e2} \end{bmatrix}, \quad U_b = \begin{bmatrix} V_{b1} \\ I_{b2} \end{bmatrix}, \quad W_b = \begin{bmatrix} I_{b1} \\ V_{b2} \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

$$P_b = \begin{bmatrix} E_{b1} \\ J_{b2} \end{bmatrix}, \quad S_b = \begin{bmatrix} J_{b1} \\ E_{b2} \end{bmatrix}, \quad X_f = \begin{bmatrix} V_{\omega f1} \\ I_{\mu f2} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} V_{\omega 1} \\ I_{\mu 2} \end{bmatrix}; \tag{5.2}$$

式中 V、I、E、J 分别表示电压、电流、电动势、电激流，下标 e、b、ω、μ、ωf、μf 分别表示元件、支路、广义割集、广义回路、基本割集、基本回路，下标 1、2 分别表示 N_1、N_2. 本文中电压、电流、阻抗和导纳都是复频率 s 的函数.

应用类似于文献[7]中的推导可得**广义混合基中基尔霍夫定律的矩阵表达式** (6.1)和支路的变量关系式(6.2)如下：

$$U_b = F_a^{\tau} X = \begin{bmatrix} Q_1^{\tau} V_{\omega 1} \\ B_2^{\tau} I_{\mu 2} \end{bmatrix} F_a W_b = -F_b U_b = -F_b F_a^{\tau} X; \tag{6.1}$$

$$U_e = U_b + P_b = F_a^{\tau} X + P_b, \quad W_e = W_b + S_b. \tag{6.2}$$

设网络 N 存在有**支路 h 参数方程**[7]：

$$W_e = H_b U_e \text{ 或 } W_b + S_b = H_b(U_b + P_b), \tag{7}$$

式中，$H_b = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ 是 N 的**支路 h 参数矩阵**. 从而有

$$I_{b1}=H_{11}V_{b1}-\tilde{J}_{b1}+J_{b1}^{(d)},\ \tilde{J}_{b1}=J_{b1}-H_{11}E_{b1}-H_{12}J_{b2},\ J_{b1}^{(d)}=H_{12}I_{b2}; \tag{8.1}$$

$$V_{b2}=H_{22}I_{b2}-\tilde{E}_{b2}+E_{b2}^{(d)},\ \tilde{E}_{b2}=E_{b2}-H_{22}J_{b2}-H_{21}E_{b1},E_{b2}^{(d)}=H_{21}V_{b1}. \tag{8.2}$$

为了保证 H_b 存在,导纳为零的复合支路和压控流源应归入 N_1,阻抗为零的复合支路和流控压源应归入 N_2.

式(8)的物理意义是: 子网络 N_1 和 N_2 中的复合支路分别被变换成仅含导纳和并联电流源和仅含阻抗和串联电压源的等效支路(称为 **h 参数型等效支路**); 前者的等效独立电流源为 $\tilde{J}_{b1}$,受控电流源为 $J_{b1}^{(d)}$; 后者的等效独立电压源为 $\tilde{E}_{b2}$,受控电压源为 $E_{b2}^{(d)}$. N_1 与 N_2 之间能够直接确定的耦合量 $H_{12}J_{b2}$ 和 $H_{21}E_{b1}$ 已分别含于 $\tilde{J}_{b1}$ 和 $\tilde{E}_{b2}$ 中. 剩下的耦合量 $H_{12}I_{b2}$ 和 $H_{21}V_{b1}$ 必须通过解方程组求出 I_{b2} 和 V_{b1} 后才能确定. 因此, $H_{12}J_{b2}$、$H_{21}E_{b1}$ 和 $H_{12}I_{b2}$、$H_{21}V_{b1}$ 分别称为 N_1 与 N_2 之支路间的**已定耦合量**和**待定耦合量**.

用 F_a 左乘式(7)的两边,并应用式(6.1)可推得

$$H_FX=S_F. \tag{9}$$

上式称为**广义混合基方程**. 式中,

$$X=(T_F^\tau)^{-1}X_j=\begin{bmatrix}(T_1^\tau)^{-1}V_{\omega f1}\\(T_2^\tau)^{-1}I_{\mu f2}\end{bmatrix}\text{——广义混合基}E\text{的压-流列向量}, \tag{9.1}$$

$$S_F=F_a(S_b-H_bP_b)=\begin{bmatrix}Q_1\tilde{J}_{b1}\\B_2\tilde{E}_{b2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{\omega1}\\E_{\mu2}\end{bmatrix}\text{——广义混合基}E\text{的等效独立源列向量}, \tag{9.2}$$

$$H_F=(F_aH_b+F_b)F_a^\tau=\begin{bmatrix}Y_{\omega1}&D\\C&Z_{\mu2}\end{bmatrix}\text{——广义混合基}E\text{的}h\text{参数矩阵}, \tag{9.3}$$

$$Y_{\omega1}=Q_1H_{11}Q_1^\tau\text{——}N_1\text{ 对应于 }\Omega_1\text{ 的广义割集导纳矩阵}, \tag{9.4}$$

$$Z_{\mu2}=B_2H_{22}B_2^\tau\text{——}N_2\text{ 对应于 }M_2\text{ 的广义回路阻抗矩阵}, \tag{9.5}$$

$$C=(B_2H_{21}+B_{21})Q_1^\tau\text{——从 }\Omega_1\text{ 到 }M_2\text{ 的等效 }VCVS\text{ 的电压传递矩阵}, \tag{9.6}$$

$$D=(Q_1H_{12}+Q_{12})B_2^\tau\text{——从 }M_2\text{ 到 }\Omega_1\text{ 的等效 }ICIS\text{ 的电流传递矩阵}. \tag{9.7}$$

方程(9)表示: 广义割集和广义回路分别满足 KCL 和 KVL. 以广义混合基的压-流列向量 X 为待求变量,列出广义混合基方程(9),解该方程求出 X 的网络分析方法,称为**广义混合法**.

方程(9)的解法可分两类: (1)整体解法;(2)分裂解法. 后者对应于广义分裂法 (见第三节).

广义混合基方程(9)的**整体解法步骤**如下: LU 分解 $H_F=LU\to LY=S_F$,前代求 $Y\to UX=Y$,回代求 $X\to U_b=F_a^\tau X\to U_e=U_b+P_b\to W_e=H_bU_e\to W_b=W_e-S_b$. 求解过程中可结合应用稀疏矩阵技术.

对于大网络可用分裂解法,以降低矩阵阶数.

三、广义分裂法及其与广义混合法的统一

1. 广义混合基方程的分裂解法

方程(9)可以分裂为两个矩阵方程：

$$\begin{cases} Y_{\omega 1}V_{\omega 1} + DI_{\mu 2} = J_{\omega 1}, & (10.1)\\ CV_{\omega 1} + Z_{\mu 2}I_{\mu 2} = E_{\mu 2}. & (10.2)\end{cases}$$

令 $Z_{\omega 1} = Y_{\omega 1}^{-1}$，$Y_{\mu 2} = Z_{\mu 2}^{-1}$，$J_{\omega 1}^{(d)} = DI_{\mu 2}$，$E_{\mu 2}^{(d)} = CV_{\omega 1}$，则有

$$\begin{cases} V_{\omega 1} = Z_{\omega 1}(J_{\omega 1} - J_{\omega 1}^{(d)}), \quad 若\ \det Y_{\omega 1} \neq 0; & (11.1)\\ I_{\mu 2} = Y_{\mu 2}(E_{\mu 2} - E_{\mu 2}^{(d)}), \quad 若\ \det Z_{\mu 2} \neq 0. & (11.2)\end{cases}$$

把式(11.1)代入(10.2)，(11.2)代入(10.1)，可解得

$$\begin{cases} I_{\mu 2} = (Z_{\mu 2} - CY_{\omega 1}^{-1}D)^{-1}(E_{\mu 2} - CV_{\omega 1}^{(0)}), \quad V_{\omega 1}^{(0)} = Y_{\omega 1}^{-1}J_{\omega 1}; & (12.1)\\ V_{\omega 1} = (Y_{\omega 1} - DZ_{\mu 2}^{-1}C)^{-1}(J_{\omega 1} - DI_{\mu 2}^{(0)}), \quad I_{\mu 2}^{(0)} = Z_{\mu 2}^{-1}E_{\mu 2}. & (12.2)\end{cases}$$

2. 广义分裂法

先介绍网络的分裂概念，然后把它推广成网络的广义分裂概念，从而得到广义分裂法.

对于 f 混合基，式(10)简化成 f **混合基方程组**:

$$\begin{cases} Y_{\omega f1}V_{t1} = J_{\omega f1} - DI_{\mu f2} = J_{\omega f1} - Q_{f1}J_{b1}^{(d)} - \hat{J}_{t1}^{(d)}, & (13.1)\\ Z_{\mu f2}I_{l2} = E_{\mu f2} - CV_{\omega f1} = E_{\mu f2} - B_{f2}E_{b2}^{(d)} - \hat{E}_{l2}^{(d)}, & (13.2)\end{cases}$$

式中，

$$J_{b1}^{(d)} = H_{12}I_{b2}, \quad E_{b2}^{(d)} = H_{21}V_{b1}, \tag{14.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_{t1}^{(d)} &= Q_f(t_1l_2)I_{l2} = \left[\sum_{k=1}^{m_2} Q_f(t_1l_2)_{ik}I_{l2,k}\right]_{r_1\times 1},\\ \hat{E}_{l2}^{(d)} &= B_f(l_2t_1)V_{t1} = \left[\sum_{i=1}^{r_1} B_f(l_2t_1)_{ki}V_{t1,i}\right]_{m_2\times 1},\end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

$DI_{\mu f2}$ 和 $CV_{\omega f1}$ 是 Ω_{f1} 与 M_{f2} 之间的待定耦合量.

设网络N的所有支路已化成 h 参数型等效支路. 方程(13)表明：如果不考虑待定耦合量 $DI_{\mu f2}$，即不考虑支路子集 U_2 的电流 I_{b2} 对支路子集 U_1 的影响，则相当于令 $I_{b2}=0$，即把 U_2 开路或移去，结果得到N的一个**部分子网络** $N_1^{(0)}$. 如果不考虑 $CV_{\omega f1}$，即不考虑 U_1 的电压 V_{b1} 对 U_2 的影响，则相当于令 $V_{b1}=0$，即把 U_1 短路或缩减，结果得到N的一个**缩减子网络** $N_2^{(0)}$. 因此不考虑待定耦合量时，网络N分裂成两个独立的子网络 $N_1^{(0)}$ 和 $N_2^{(0)}$.

据式(13)和(14)，网络N的支路子集 U_1 与 U_2 之间有两种待定耦合：(1)通过 h 参数 H_{12} 和 H_{21} 的耦合，可用等效支路受控源 $J_{b1}^{(d)}$ 和 $E_{b2}^{(d)}$ 来表示；(2)通过 U_1 与 U_2 的“互联”产生的耦合，可用树支受控源 $\hat{J}_{t1}^{(d)}$ 和连支受控源 $\hat{E}_{l2}^{(d)}$ 来表示. $N_1^{(0)}$ 中添上 $J_{b1}^{(d)}$ 和 $\hat{J}_{t1}^{(d)}$ 后的网络记作 N_1，$N_2^{(0)}$ 中添上 $E_{b2}^{(d)}$ 和 $\hat{E}_{l2}^{(d)}$ 后的网络记作 N_2. 因此考虑待定耦合量时，网络N可分裂成两个互耦的子网络 N_1 和 N_2. 由此可得

定理 1（网络的分裂）　若线性网络N对于支路集U的划分：$U=U_1\cup U_2$，$U_1\cap U_2=\phi$，存在有支路h参数矩阵H，则可把N中所有支路化成h **参数型等效支路**，而且网络N可以分裂成（等效于）两个互相耦合的子网络N_1和N_2（称为N的**等效网络**N_{eq}）：N_1是从N中移去U_2得到的**部分子网络**（y **子网络**），N_2是从N中缩减U_1得到的**缩减子网络**（z **子网络**）．分裂时N_1与N_2之支路间受控源耦合$J_{b1}^{(d)}=H_{12}I_{b2}$和$E_{b2}^{(d)}=H_{21}V_{b1}$仍然保留，“互联”耦合则用$N_1$中任一选定的树$t_1$的树支所并联的流控流源$\hat{J}_{t1}^{(d)}=Q_f(t_1l_2)I_{l2}$和$N_2$中任一选定的树$t_2$的连支所串联的压控压源$\hat{E}_{l2}^{(d)}=B_f(l_2t_1)V_{t1}$来代替（受控源的正方向与独立源的相反）．$t_1$与$t_2$组成$N$的一个树$t$．$t_1$中$i$号**树支电流源**$\hat{J}_{t1,i}^{(d)}$是该树支在$N$中的对应$f$割集所含有的$l_2$内各连支电流之代数和．$l_2$中$k$号**连支电压源**$\hat{E}_{l2,k}^{(d)}$是该连支在$N$中的对应$f$回路所含有的$t_1$内各树支电压之代数和．如果不考虑$N_1$与$N_2$之间的待定耦合量，则网络$N$可分裂成两个独立的子网络$N_1^{(0)}$和$N_2^{(0)}$．

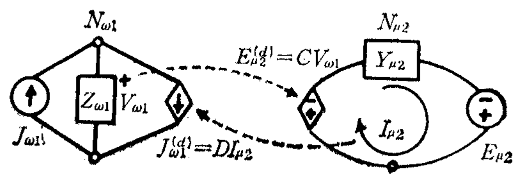


图 1．网络N的广义混合基等效网络N_{eq}的简化表示

方程组(11)的等效电路表示称为网络N的**广义混合基等效网络**N_E．因为从广义混合基看来，N等效于N_E．它的简化表示如图 1．方程(9)分裂成两个互耦的方程(11.1)和(11.2)，前者含r_1个广义割集方程，后者含m_2个广义回路方程，二者通过$CV_{\omega1}$和$DI_{\mu2}$项相耦合．对应地，等效网络N_E分裂成两个互耦的子网络$N_{\omega1}$和$N_{\mu2}$，前者含r_1个互耦的**广义割集等效支路**，后者含m_2个互耦的**广义回路等效回路**，二者通过流控流源$J_{\omega1}^{(d)}=DI_{\mu2}$和压控压源$E_{\mu2}^{(d)}=CV_{\omega1}$相耦合．因此可得

定理 2（网络的广义分裂）　若线性网络N对于支路集U的划分$U=U_1\cup U_2$，$U_1\cap U_2=\phi$，存在有支路h参数矩阵H，对应于该划分，任意选定一个广义混合基E，则存在有网络N的**广义混合基等效网络**N_E．N_E可分裂成两个互耦的子网络：**广义割集基等效网络**$N_{\omega1}$和**广义回路基等效网络**$N_{\mu2}$．二者通过受控源$J_{\omega1}^{(d)}=DI_{\mu2}$和$E_{\mu2}^{(d)}=CV_{\omega1}$相耦合．若不考虑该耦合，则$N_E$分裂成两个独立的子网络$N_{\omega1}^{(0)}$和$N_{\mu2}^{(0)}$：$N_{\omega1}^{(0)}$是$N_1^{(0)}$的广义割集基等效网络，$N_{\mu2}^{(0)}$是$N_2^{(0)}$的广义回路基等效网络．

根据以上二定理可得分析网络的**广义分裂法**：暂不考虑线性网络N中的待定耦合量，把N分裂成独立的y子网络$N_1^{(0)}$和z子网络$N_2^{(0)}$；用广义割集法解$N_1^{(0)}$，得等效网络$N_{\omega1}^{(0)}$，用广义回路法解$N_2^{(0)}$，得等效网络$N_{\mu2}^{(0)}$；再用受控源$J_{\omega1}^{(d)}=DI_{\mu2}$和$E_{\mu2}^{(d)}=CV_{\omega1}$把$N_{\omega1}^{(0)}$与$N_{\mu2}^{(0)}$耦合起来，得等效网络$N_E$，解$N_E$可求得待定耦合量$DI_{\mu2}$或$CV_{\omega1}$和解$V_{\omega1}$和$I_{\mu2}$．它是对 Kron 等人的分裂法的推广．这里有两点推广：一是适用的网络推广了，容许N_1与N_2之间有耦合；二是解法推广了，用广义的割集法和回路法，这就把过去的节点-回路分裂法和f分裂法等从形式上统一起来，便于分裂法的教学

和科研.

3. 广义混合法与广义分裂法的统一

广义混合法强调网络方程的分裂求解方法，广义分裂法强调网络本身的分裂求解概念. 二者紧密相关，且有一一对应关系如表 1.

表 1

广义混合法(分裂解法)	广 义 分 裂 法
(1) 把网络图 G 分裂为 y 子图 G_1 和 z 子图 G_2，选定广义混合基 E，写出广义混合基**方程**(9)，**分裂**成式 (10.1)和(10.2). 暂不考虑**耦合**项，解得 $V_{\omega1}^{(0)} = Y_{\omega1}^{-1} J_{\omega1}$，$I_{\mu2}^{(0)} = Z_{\mu2}^{-1} E_{\mu2}$	(1) 把**网络** N **分裂**为 y 子网络 $N_1^{(0)}$ 和 z 子网络 $N_2^{(0)}$. 暂不考虑**耦合**，用广义割集法解 $N_1^{(0)}$，用广义回路法解 $N_2^{(0)}$，求得 $V_{\omega1}^{(0)} = Z_{\omega1} J_{\omega1}$，$I_{\mu2}^{(0)} = Y_{\mu2} E_{\mu2}$ 画出等效网络 $N_{\omega1}^{(0)}$ 和 $N_{\mu2}^{(0)}$.
(2) 考虑**耦合**项 $DI_{\mu2}$ 和 $CV_{\omega1}$ (a) 若 $m_2 < r_1$，把式(11.1)代入式(10.2)，可推得式(12.1)，以 $V_{\omega1}^{(0)}$ 代入，求得 $I_{\mu2}$、修正项 $V_{\omega1}^{(1)} = -Z_{\omega1} DI_{\mu2}$ 和解 $V_{\omega1} = V_{\omega1}^{(0)} + V_{\omega1}^{(1)}$ (b) 若 $r_1 < m_2$，解法与 (a) 对偶.	(2) 用 $J_{\omega1}^{(d)}$ 和 $E_{\mu2}^{(d)}$ **耦合** $N_{\omega1}^{(0)}$ 和 $N_{\mu2}^{(0)}$ 得 N_E (a) 若 $m_2 < r_1$，从 $N_{\omega1}$ 写出 $V_{\omega1}$ 的表达式(11.1)，代入 $N_{\mu2}$，列出回路方程组，可解出 $I_{\mu2}$，求得 $J_{\omega1}^{(d)} = DI_{\mu2}$ 和 $V_{\omega1} = V_{\omega1}^{(0)} - Z_{\omega1} J_{\omega1}^{(d)}$ (b) 若 $r_1 < m_2$，解法与 (a) 对偶.

大网络的广义分裂法类似于大系统的**分解协调法**. 上表中(1)相当于"分解"，(2)相当于"协调"，耦合项相当于"协调项". 从表 1 可推得

定理 3（*广义混合法与广义分裂法的统一*）　广义混合法(分裂解法)与广义分裂法之间存在一一对应关系. 前者是后者的**数学表示**，后者是前者的**电路解释**. 二者实质上是一致的.

这个定理在理论上和实际上都有重要意义. 它的理论意义是统一了线性网络的两种分析方法. 它的实际意义是可以结合采用二法的优点，即利用分裂法的直观性对网络进行适当分裂，再利用混合法(分裂解法)的系统性列混合基方程，进行分裂求解。

四、多级广义分裂法

若网络 N 的规模较大，可适当选择分裂方案，使得子网络 N_1 和 N_2 各含有若干个**可离的分网络**(两个分网络称为**可离的**，是指二者不相连或仅有一点相连). 设 N_1 含有 p 个彼此间无耦合的可离分网络 $N_1^1, N_1^2, \cdots, N_1^p$，$N_2$ 含有 q 个彼此间无耦合的可离分网络 $N_2^1, N_2^2, \cdots, N_2^q$，支路顺序为

$$t_1^1, l_1^1, t_1^2, l_1^2, \cdots, t_1^p, l_1^p;\ t_2^1, l_2^1, t_2^2, l_2^2, \cdots, t_2^q, l_2^q.$$

这里右上标是分网络号. 取 T_1，T_2 为分块对角方阵

$$T_1 = \mathrm{diag}\,(T_1^1, T_1^2, \cdots, T_1^p),\quad T_2 = \mathrm{diag}\,(T_2^1, T_2^2, \cdots, T_2^q).$$

那么 H_{11}, H_{22}, Q_1 和 B_2 也是分块对角方阵

$$H_{11} = \mathrm{diag}\,(H_{11}^1, H_{11}^2, \cdots, H_{11}^p),\quad H_{22} = \mathrm{diag}\,(H_{22}^1, H_{22}^2, \cdots, H_{22}^q),$$

$$Q_1 = \mathrm{diag}\,(Q_1^1, Q_1^2, \cdots, Q_1^p),\qquad B_2 = \mathrm{diag}\,(B_2^1, B_2^2, \cdots, B_2^q),$$

式中，$Q_1^j = T_1^j Q_{f1}^j$，$j = 1, \cdots, p$；$B_2^k = T_2^k B_{f2}^k$，$k = 1, \cdots, q$. 方程(9)变成

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} Y_{\omega1}^1 & & & D_{11} & \cdots & D_{1q} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & Y_{\omega1}^p & D_{p1} & \cdots & D_{pq} \\ \hline C_{11} & \cdots & C_{1p} & Z_{\mu2}^1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ C_{q1} & \cdots & C_{qp} & & & Z_{\mu2}^q \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_{\omega1}^1 \\ \vdots \\ V_{\omega1}^p \\ \hline I_{\mu2}^1 \\ \vdots \\ I_{\mu2}^q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} J_{\omega1}^1 \\ \vdots \\ J_{\omega1}^p \\ \hline E_{\mu2}^1 \\ \vdots \\ E_{\mu2}^q \end{array}\right], \tag{15}$$

称为**多级广义混合基方程**. 式中,

$$Y_{\omega1}^j = Q_1^j H_{11}^j (Q_1^j)^\tau, \; j = 1, 2, \cdots, p; \tag{16.1}$$

$$Z_{\mu2}^k = B_2^k H_{22}^k (B_2^k)^\tau, \; k = 1, 2, \cdots, q; \tag{16.2}$$

$$C_{kj} = B_2^k H_{21}^{kj} (Q_1^j)^\tau + T_2^k B_f(l_2^k t_1^j) T_1^{j\tau}, \; k = 1, \cdots, q, \; j = 1, \cdots, p; \tag{16.3}$$

$$D_{jk} = Q_1^j H_{12}^{jk} (B_2^k)^\tau - [T_2^k B_f(l_2^k t_1^j) T_1^{j\tau}]^\tau, \; j = 1, \cdots, p, \; k = 1, \cdots, q; \tag{16.4}$$

$$J_{\omega1}^j = Q_1^j \left(J_{b1}^j - H_{11}^j E_{b1}^j - \sum_{k=1}^q H_{12}^{jk} J_{b2}^k \right), \; j = 1, 2, \cdots, p; \tag{16.5}$$

$$E_{\mu2}^k = B_2^k \left(E_{b2}^k - H_{22}^k J_{b2}^k - \sum_{j=1}^p H_{21}^{kj} E_{b1}^j \right), \; k = 1, 2, \cdots, q. \tag{16.6}$$

根据式(12.1)和(12.2),方程(15)的解为

$$I_{\mu2} = \left(Z_{\mu2} - \sum_{j=1}^p C_{\cdot j} Z_{\omega1}^j D_{j\cdot} \right)^{-1} \tilde{E}_{\mu2}, \quad \tilde{E}_{\mu2} \triangleq E_{\mu2} - \sum_{j=1}^p C_{\cdot j} Z_{\omega1}^j J_{\omega1}^j; \tag{17.1}$$

$$V_{\omega1} = \left(Y_{\omega1} - \sum_{k=1}^q D_{\cdot k} Y_{\mu2}^k C_{k\cdot} \right)^{-1} \tilde{J}_{\omega1}, \quad \tilde{J}_{\omega1} \triangleq J_{\omega1} - \sum_{k=1}^q D_{\cdot k} Y_{\mu2}^k E_{\mu2}^k; \tag{17.2}$$

式中, $C_{k\cdot}$ 和 $C_{\cdot j}$ 分别表示C的第 k 块行和第 j 块列, $D_{j\cdot}$ 和 $D_{\cdot k}$ 分别表示D的第 j 块行和第 k 块列. 下面分 $q > p$ 和 $p > q$ 两种情况讨论解的计算方法.

1. q 级广义分裂法—— $p > q \geq 1$

因 $q < p$, 从式(17.2)出发计算比较简单. 令

$$Y_{\omega1}^{(\alpha)} \triangleq Y_{\omega1} - \sum_{k=1}^{\alpha} C_{\cdot k} Y_{\mu2}^k C_{k\cdot}, \; \alpha = 1, 2, \cdots, q; \tag{18.1}$$

$$J_\alpha \triangleq [D_{\cdot\alpha} D_{\cdot(\alpha+1)} \cdots D_{\cdot q} \tilde{J}_{\omega1}] \; (\alpha = 1, \cdots, q), \; J_{q+1} \triangleq \tilde{J}_{\omega1}; \tag{18.2}$$

则式(17.2)可改写成

$$V_{\omega1} = (Y_{\omega1}^{(q)})^{-1} \tilde{J}_{\omega1} = (Y_{\omega1}^{(q-1)} - D_{\cdot q} Y_{\mu2}^q C_{q\cdot})^{-1} J_{q+1}. \tag{19}$$

为了降低所运算矩阵的阶数,重复应用逆矩阵引理[8],从式(19)可导出一组**逆矩阵展开式**:

$$\begin{aligned} (Y_{\omega1}^{(\alpha)})^{-1} J_{\alpha+1} &= (Y_{\omega1}^{(\alpha-1)} - D_{\cdot\alpha} Y_{\mu2}^\alpha C_{\alpha\cdot})^{-1} J_{\alpha+1} \\ &= (Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} J_{\alpha+1} + (Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} D_{\cdot\alpha} [Z_{\mu2}^\alpha - C_{\alpha\cdot} (Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} D_{\cdot\alpha}]^{-1} \\ &\quad \cdot C_{\alpha\cdot} (Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} J_{\alpha+1}, \; \alpha = q, q-1, \cdots, 1; \end{aligned} \tag{20}$$

式中, $(Y_{\omega1}^{(\alpha)})^{-1} J_{\alpha+1}$ 是 $p \times (q - \alpha + 1)$ 分块矩阵,它的第 j 块行为

$$\begin{aligned} [(Y_{\omega1}^{(\alpha)})^{-1} J_{\alpha+1}]_{j\cdot} &= [(Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} J_{\alpha+1}]_{j\cdot} + [(Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} D_{\cdot\alpha}]_{j\cdot} \\ &\quad \cdot \left\{ Z_{\mu2}^\alpha - \sum_{j=1}^p C_{\alpha j} [(Y_{\omega1}^{(\alpha-1)})^{-1} D_{\cdot\alpha}]_j \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{p} C_{\alpha j}[(Y_{\omega 1}^{(\alpha-1)})^{-1}J_{\alpha+1}]_{j\cdot}, \quad j=1,2,\cdots,p. \tag{21}$$

根据式(21)可导出下列**计算步骤**:

〈0〉
$$I_{\mu 2}^{k(0)}=(Z_{\mu 2}^{k})^{-1}E_{\mu 2}^{k}\ (k=1,2,\cdots,q),$$
$$\tilde{J}_{\omega 1}^{j}=J_{\omega 1}^{j}-\sum_{k=1}^{q}D_{jk}I_{\mu 2}^{k(0)}\ (j=1,2,\cdots,p);$$

〈1.1〉
$$[x_{j1}^{(1)}\ x_{j2}^{(1)}\cdots x_{jq}^{(1)}\ x_{j(q+1)}^{(1)}]=(Y_{\omega 1}^{j})^{-1}[D_{j1}\ D_{j2}\cdots D_{jq}\ \tilde{J}_{\omega 1}^{j}],\ j=1,2,\cdots,p;$$
$$[\tilde{x}_{j1}^{(1)}\ \tilde{x}_{j2}^{(1)}\cdots\tilde{x}_{jq}^{(1)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(1)}]=C_{1j}[x_{j1}^{(1)}\ x_{j2}^{(1)}\cdots x_{jq}^{(1)}\ x_{j(q+1)}^{(1)}],\ j=1,2,\cdots,p;$$

〈1.2〉
$$[\tilde{x}_{1}^{(1)}\ \tilde{x}_{2}^{(1)}\cdots\tilde{x}_{q}^{(1)}\ \tilde{x}_{q+1}^{(1)}]=\sum_{j=1}^{p}[\tilde{x}_{j1}^{(1)}\ \tilde{x}_{j2}^{(1)}\cdots\tilde{x}_{jq}^{(1)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(1)}];$$

〈1.3〉
$$[y_{2}^{(1)}\cdots y_{q}^{(1)}\ y_{q+1}^{(1)}]=(Z_{\mu 2}^{1}-\tilde{x}_{1}^{(1)})^{-1}[\tilde{x}_{2}^{(1)}\cdots\tilde{x}_{q}^{(1)}\ \tilde{x}_{q+1}^{(1)}];$$

〈1.4〉
$$[x_{j2}^{(2)}\cdots x_{jq}^{(2)}\ x_{j(q+1)}^{(2)}]=[x_{j2}^{(1)}\cdots x_{jq}^{(1)}\ x_{j(q+1)}^{(1)}]+x_{j1}^{(1)}[y_{2}^{(1)}\cdots y_{q}^{(1)}\ y_{q+1}^{(1)}],$$
$$j=1,\cdots,p;$$

〈2.1〉
$$[\tilde{x}_{j2}^{(2)}\cdots\tilde{x}_{jq}^{(2)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(2)}]=C_{2j}[x_{j2}^{(2)}\ x_{j3}^{(2)}\cdots x_{jq}^{(2)}\ x_{j(q+1)}^{(2)}],\ j=1,2,\cdots,p;$$

〈2.2〉
$$[\tilde{x}_{2}^{(2)}\cdots\tilde{x}_{q}^{(2)}\ \tilde{x}_{q+1}^{(2)}]=\sum_{j=1}^{p}[\tilde{x}_{j2}^{(2)}\ \tilde{x}_{j3}^{(2)}\cdots\tilde{x}_{jq}^{(2)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(2)}];$$

〈2.3〉
$$[y_{3}^{(2)}\cdots y_{q}^{(2)}\ y_{q+1}^{(2)}]=(Z_{\mu 2}^{2}-\tilde{x}_{2}^{(2)})^{-1}[\tilde{x}_{3}^{(2)}\cdots\tilde{x}_{q}^{(2)}\ \tilde{x}_{q+1}^{(2)}];$$

〈2.4〉
$$[x_{j3}^{(3)}\cdots x_{jq}^{(3)}\ x_{j(q+1)}^{(3)}]=[x_{j3}^{(2)}\cdots x_{jq}^{(2)}\ x_{j(q+1)}^{(2)}]+x_{j2}^{(2)}[y_{3}^{(2)}\cdots y_{q}^{(2)}\ y_{q+1}^{(2)}],$$
$$j=1,\cdots,p;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〈q.1〉
$$[\tilde{x}_{jq}^{(q)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(q)}]=C_{qj}[x_{jq}^{(q)}\ x_{j(q+1)}^{(q)}],\ j=1,2,\cdots,p;$$

〈q.2〉
$$[\tilde{x}_{q}^{(q)}\ \tilde{x}_{q+1}^{(q)}]=\sum_{j=1}^{p}[\tilde{x}_{jq}^{(q)}\ \tilde{x}_{j(q+1)}^{(q)}];$$

〈q.3〉
$$y_{q+1}^{(q)}=(Z_{\mu 2}^{q}-\tilde{x}_{q}^{(q)})^{-1}\tilde{x}_{q+1}^{(q)};$$

〈q.4〉
$$V_{\omega 1}^{j}=x_{j(q+1)}^{(q+1)}=x_{j(q+1)}^{(q)}+x_{jq}^{(q)}y_{q+1}^{(q)},\ j=1,2,\cdots,p;$$
$$I_{\mu 2}^{k}=I_{\mu 2}^{k(0)}-(Z_{\mu 2}^{k})^{-1}\sum_{j=1}^{p}C_{kj}V_{\omega 1}^{j},\ k=1,2,\cdots,q.$$

根据上列计算步骤容易编写出具体的算法和程序．其中步骤〈0〉、〈·1〉、〈·4〉可以用一台计算机对各分网络进行顺序计算，以增大一台机器所能计算的网络规模；也可以用多台计算机进行并行处理，以提高解算速度．

2. p 级广义余分裂法—— $q>p\geqslant 1$

本法与上法相对偶，对偶量如下：

$$I_{\mu 2}\longleftrightarrow V_{\omega 1},\ E_{\mu 2}\longleftrightarrow J_{\omega 1},\ Z_{\mu 2}\longleftrightarrow Y_{\omega 1},\ C\longleftrightarrow D,\ k\longleftrightarrow j,\ q\longleftrightarrow p.$$

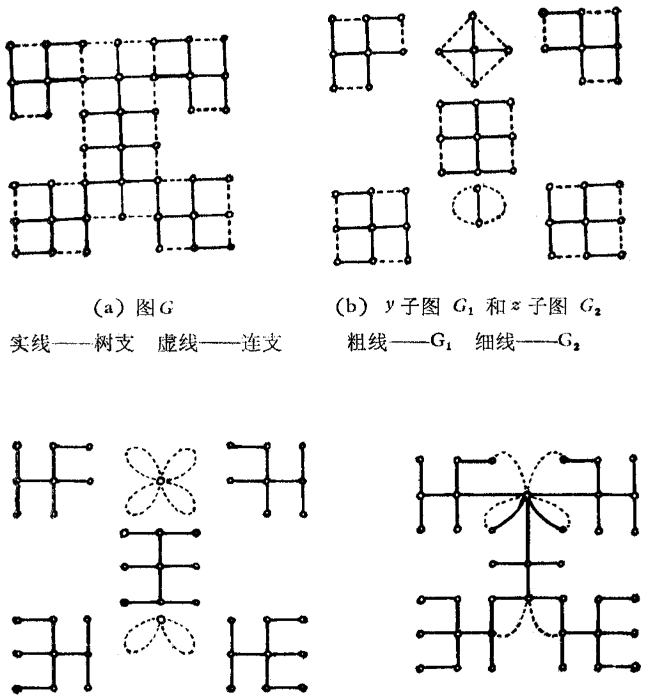
五、基本分裂法和节点-回路分裂法

实际上常用的是广义分裂法的两种特殊情况：基本分裂法和节点-回路分裂法．它们具有更加直观的电路表示(例如图 2)．

1. 基本 (f) 分裂法——采用 f **混合基**，$T_1 = \mathrm{l}_1$，$T_2 = \mathrm{l}_2$. f 混合基等效网络 N_{Ef} 包含 $N_{\omega f1}$ 和 $N_{\mu f2}$. $N_{\omega f1}$ 的每个分网络 $N^j_{\omega f1}$ 中各支路可按树 t^j_1 接成树形 N^j_{t1}，结果 $N_{\omega f1}$ 变成树林形 N_{t1}. $N_{\mu f2}$ 的每个分网络 $N^k_{\mu f2}$ 中各回路的唯一节点可接成一点而构成花形 N^k_{l2}，结果 $N_{\mu f2}$ 变成花簇形 N_{l2}. N_{t1} 与 N_{l2} 通过下列受控源

$$J^{(d)}_{\omega f1} = Q_{f1}H_{12}B^{\tau}_{f2}I_{l2}, \quad \hat{J}^{(d)}_{t1} = Q_f(t_1l_2)I_{l2},$$
$$E^{(d)}_{\mu f2} = B_{f2}H_{21}Q^{\tau}_{f1}V_{t1}, \quad \hat{E}^{(d)}_{l2} = B_f(l_2t_1)V_{t1}$$

相耦合，形成N的**等效树-花形网络** $N(t_1l_2)$. 它的图称为**等效树-花形图** $G(t_1l_2)$ [例如图 2(c)]. 若把 N_{t1} 与 N_{l2} 按照原来 N_1 与 N_2 的联接方式互联起来，同时去掉受控源 $\hat{J}^{(d)}_{t1}$ 和 $\hat{E}^{(d)}_{l2}$，则得N的**等效互联网络** $\tilde{N}_{eq}$. 它的图称为**等效互联图** $\tilde{G}_{eq}$ [例如图 2(d)]. 它比原网络N简单得多. 它的独立割集数为 $r_1 < r$，独立回路数为 $m_2 < m$. 若 N_1 与 N_2 之间无耦合，则 $p > q = 1$ 和 $q > p = 1$ 的分裂法就分别是 Onodera[3] 的分裂法 (diakoptics) 和余分裂法 (codiakoptics).



(a) 图G 实线——树支 虚线——连支

(b) y子图 G_1 和z子图 G_2 粗线——G_1 细线——G_2

(c) 等效树-花形图 $G(t_1l_2)$

(d) 等效互联图 $\tilde{G}_{eq}$

图 2. 图G的分裂和等效——f分裂法

2. 节点-回路分裂法——采用**节点-回路基**，即 N_1 用**节点离集基**[**节点离集**是一个节点所关联的全部弧的集合(自环除外)，这是一种广义割集]，N_2 用回路基. 这时 Q_1 是**关联矩阵** A_1. 设 $A^j_1=[A(t^j_1)\ A(l^j_1)]$，$B^k_2 = [B(t^k_2)\ B(l^k_2)]$，则 $T^j_1=A(t^j_1)$ ($j = 1, \cdots, p$)，$T^k_2 = B(l^k_2)$ ($k = 1, \cdots, q$). 本法也有**等效树-花形图** $\boldsymbol{G(t^*_1l^*_2)}$，不过每棵树是**星形树**(由节点-参考点等效支路构成)，它们可能不同于原选树. 还有，图 $G(t^*_1l^*_2)$ 可变成等效互联图 $\tilde{G}^*_{eq}$.

六、结 束 语

应用非线性网络理论[1]及本文可以导出**非线性广义分裂法**和**动态非线性广义分裂法**. 尚未解决的问题是优化问题. 对于一个给定的网络，怎样的分裂方案算是最优的？如何求最优分裂方案？

参 考 文 献

[1] L. O. Chua and L. K. Chen, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-23** (1976), 694.
[2] G. Kron, Diakoptics —— The Science of Tearing, Tensors and Topological Models, RAAG Memoirs, Vol. 2, 1958, pp. 343—368.
[3] R. Onodera, Diakoptics and Codiakoptics of Electrical Networks, RAAG Memoirs, Vol. 2, 1958, pp 369—388.
[4] F. H. Brain, *The Matrix and Tensor Quarterly*, **12** (1962)3, 69.
[5] H. H. Happ, Peicewise Methods and Applications to Power Systems, Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, 1980.
[6] F. F. Wu, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-23** (1976), 706.
[7] 黄汝激，电子学通讯，**4**(1982)，201.
[8] 深尾毅，寺辻英一，電気学会論文誌 C，**102-C**(1982)，29.

UNIFICATION OF GENERALIZED HYBRID ANALYSIS AND GENERALIZED DIAKOPTICS

Huang Ruji

(Department of Automatic Control, Beijing Steel-Iron College)

In this paper, (1) The concept of generalized hybrid basis is introduced and the hybrid analysis given by the author in 1982 is extended to the generalized hybrid analysis. (2) The concept of generalized diakoptics is introduced and the one-to-one correspondence between the generalized diakoptics and the generalized hybrid analysis is established. Thus the two analysis methods are unified. (3) The multilevel generalized diakoptics and its algorithm are presented. (4) The concepts of equivalent tree-flower type network and its equivalent interconnected network for fundamental diakoptics are presented.