利用小波变换的高性能谱估计算法 [1]

潘明海　　刘永坦　　赵淑清

(哈尔滨工业大学　哈尔滨　150001)

摘　要　本文提出了基于小波变换的一种新的高性能谱估计算法．由于小波变换同时在时、频域具有良好的局部化特性，本文的算法适用于低信噪比、短时数据序列的情况．文中给出的计算机仿真结果证明，本文算法具有较高的分辨率和估计精度、较低的信噪比门限．

关键词　小波变换，快速傅里叶变换，功率谱估计

中图号　TN911.7

1 引　言

高分辨率的谱估计算法一直是信号处理领域内的研究热点．基于现代谱估计 [1] 的高分辨率算法，其不足之处是信噪比门限较高 (高信噪比条件下具有高的分辨率和估计精度；在低信噪比下谱估计性能较差) 和运算量大，因而在很多场合很难采用．本文提出了一种新的基于小波变换的功率谱估计算法，它的频率分辨率和估计精度接近现代谱估计算法，但它具有较低的信噪比门限和较小的运算量．与现有的基于小波变换的功率谱估计算法 [2,3] 相比，本文算法具有更高的频率分辨率和估计精度、更低的信噪比门限．本文的算法分为三个步骤：一是首先利用小波变换 [4] 将信号分解为若干个子带；然后利用信号与噪声在“小波域”的不同传输特性分别对每个子带进行“消噪”处理 [5]；最后对每个子带信号进行 FFT 分析，取每个子带的 FFT 处理的最大值作为该子带的功率谱输出．本文给出了仿真结果，证明了该算法的优良性能．本文的算法适用于短时数据序列的场合．

2 小波变换及其特性

小波变换是一种性能优良的时频分析方法，它同时在时域和频域内具有比较好的局部特性．小波变换具有可变的时频分辨率，小波基函数选择灵活并具有快速算法，因而目前小波变换已得到广泛的应用．本文利用小波变换实现高分辨率的谱估计算法．

2.1 不确定性原则

小波变换的频率分辨率 Δf 和时间分辨率 Δt 乘积与小波基函数密切相关，它们满足以下的测不准原则 (Heisenberg 不等式)，即

$$\Delta t\Delta f \le 1/(4\pi). \tag{1}$$

从上述不等式可以看出，频率分辨率和时间分辨率不可能任意小，其中一个减小必然是另外一个同时增大．为提高频率分辨率，除了增加信号的时间长度 (减小时间分辨率) 之外，还可以通过选用具有较低的 Δt 和 Δf 乘积值的小波基函数 $\psi(t)$，并且尽量使它接近于 (1) 式的下限来达到目的． Morlet 小波比较接近于这一条件 [4]．

[1] 1998-11-16 收到，1999-05-22 定稿

2.2 小波变换及其特性

凡是满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$ 的函数 $\psi(t)$ 都可以作为一个小波基函数. 所谓的小波就是函数 $\psi(t)$ 通过伸缩和平移而派生出来的一族函数 $\{\psi_{a,b}(t)\}$

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),\quad a,b\in R\text{且}a\neq 0, \tag{2}$$

式中 a 为尺度参数， b 为位置参数. 信号 $X(t)$ 的小波变换定义为

$$WT_X(a,b)=<X,\psi_{a,b}>=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t=|a|^{-1/2}X(t)^{*}\psi\left(-\frac{t}{a}\right). \tag{3}$$

上式表明, 信号 $X(t)$ 的小波变换 $WT_X(a,b)$ 是信号 $X(t)$ 通过一个传递函数为 $|a|^{1/2}\hat{\psi}(-a\omega)$ 的滤波器的输出. 亦即子波变换相当于一组带通滤波器对信号进行滤波 (每个尺度对应于一个通带) , 从而可以得到信号在不同通带内的信息. 带通滤波器的中心频率和带宽与尺度 a 成反比, 不同带通滤波器之间具有相同的相对带宽. 具有较小 Δt 和 Δf 乘积的 Morlet 小波: $\Psi(t)=e^{-t^2/2+\omega_0 t}$, 显然其实部、虚部分别为 $\Psi_r(t)=e^{-t^2/2}\cos(\omega_0 t)$, $\Psi_i(t)=e^{-t^2/2}\sin(\omega_0 t)$. 实部是一个偶函数, 经傅里叶变换之后仍为偶函数, 所以实部是一无相移的滤波器; 而虚部与实部的相位差为 $-\pi/2$ ， 二者的幅频特性相同. 信号 $X(t)$ 的 Morlet 小波变换为

$$\begin{aligned}WT_X(a,\tau)&=WT_{Xr}(a,\tau)+jWT_{Xi}(a,\tau)\\&=|a|^{-1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)e^{-\left(\frac{\tau-t}{a}\right)^2/2}\cos\left(\omega_0\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\mathrm{d}t\right)\right.\\&\left.\quad+j\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)e^{-\left(\frac{\tau-t}{a}\right)^2/2}\sin\left(\omega_0\left(\frac{\tau-t}{a}\right)\mathrm{d}t\right)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

设 N 为信号 $X(n\Delta T)(n=0,1,\cdots,N-1)$ 的采样点数, 设某一带通滤波器的尺度为 a , 其中心频率为

$$f_0=\omega_0/(2\pi a) \tag{5}$$

此时带通滤波器的带宽为

$$\Delta f=1/(N\Delta Ta). \tag{6}$$

很显然, 当尺度 $a=1$ 时, 该带通滤波器的带宽与 FFT 相同, 二者的频率分辨率相同; 当 $a>1$ 时, 带通滤波器的分辨率较 FFT 算法高.

3 基于小波变换的高分辨率谱估计算法

设有用信号为 $S(t)$ ， 在噪声环境下信号可以表示成

$$X(t)=S(t)+N(t), \tag{7}$$

式中 $N(t)$ 为噪声. 因小波变换是线性变换, 因此有下面关系式成立:

$$WT_X(a,\tau)=WT_S(a,\tau)+WT_N(a,\tau). \tag{8}$$

利用小波变换进行信号的高分辨率功率谱估计，可分以下三个步骤．文献 [2, 3] 中直接利用 (8) 式的小波变换值在同一尺度下进行时域内的积累获得信号的功率谱估计，结果见下式：

$$P(f) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} WT_X^2(a,\tau_j) \times a \times (N\Delta t), \tag{9}$$

式中 N 为采样点数， Δt 为采样间隔， a 为尺度， $f = \omega_0/(2a\pi)$, 带宽 $\Delta f = 1/(aN\Delta t)$ ．从文献 [2, 3] 的仿真结果可知，这种直接算法的频率分辨率和估计精度比 FFT 算法提高有限 (大约 30~50%) ．本文提出的高分辨率谱估计算法首先将信号在“小波域”分解，然后利用信号与噪声在小波域的不同特征进行“去噪声”处理，再对各尺度下的经“去噪声”处理后小波变换值进行 FFT 处理获得高分辨率的谱估计结果．

3.1 信号的子带分解

利用小波变换的带通性能，将信号按照 (4) 式分解为若干个子带，每个子带的带宽可根据具体问题确定．每个子带的中心频率和带宽分别按照 (5) 和 (6) 式确定． (4) 式中的卷积运算可利用 FFT 算法实现．

3.2 消噪处理

消噪处理分为两个步骤：一是利用假设检验在“小波域”内去除噪声；二是利用信号和噪声的小波变换模极大值在“小波域”的不同传输特性，去除由噪声引起的模极大值点．

3.2.1 假设检验及波形提取

设 H_1 表示有用信号存在， H_0 表示有用信号不存在，亦即

$$H_1 : X(t) = S(t) + N(t), \tag{10}$$

$$H_0 : X(t) = N(t). \tag{11}$$

这里令 $p_1(X) = p_1(X/H_1)$ 表示 H_1 为真时 $X(t)$ 的概率密度； $p_0(X) = p_0(X/H_0)$ 表示 H_0 为真时，即只有噪声时 $X(t)$ 的概率密度．似然比 $\lambda(X) = p_1(X)/p_0(X)$ ，设 λ_0 为检测门限，根据似然比检测准则知，当 $\lambda(X) > \lambda_0$ 时， H_1 为真；当 $\lambda(X) < \lambda_0$ 时， H_0 为真．根据文献 [6] 可进一步得到，当 $X > X_T$ 时，即信号大于门限， H_1 为真 (有用信号存在) ；当 $X < X_T$ 时，则认为 H_0 为真 (仅存在噪声) ．

信号波形的提取是在小波域内进行的．在尺度参量 a 的取值范围内，计算在各尺度下的小波变换值 $WT_X(a_k, n)$ ，然后与预定的门限值 $WT_{XT}(a_k)$ 相比较，超过门限值的点，则对应该点的小波变换值应保留 (含有有用信息) ；否则，置为零 (完全由噪声产生) ．小波域内假设检验过程可表示为

$$WT_X(a_k,n) = \begin{cases} WT_X(a_k,n), & WT_X(a_k,n) > WT_{XT}(a_k), \\ 0, & WT_X(a_k,n) < WT_{Xt}(a_k). \end{cases} \tag{12}$$

判别门限值 $WT_{XT}(a_k)$ 可根据信号检测准则确定 [6] ，例如利用给定的虚警概率使检测概率最大的奈曼 - 皮尔逊 (Neyman-Pearson) 准则确定 $WT_{XT}(a_k)$ ．因小波变换是线性变换，若 (7) 式中的 $N(t)$ 为高斯白噪声，经小波变换后它仍为高斯白噪声．则虚警概率为 $P_{fa} = 2\int_{WT_{XT}(a_k)}^{+\infty} p_0(X)\mathrm{d}X = \int_{WT_{XT}(a_k)}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-X^2/2\sigma_N^2}\mathrm{d}X$ ．这里， $p_0(X)$ 和 σ_N^2 分别表示信号 $S(t)$ 不存在时的概率密度函数和噪声方差．因此门限值由虚警概率和噪声方差确定．

显然，利用本算法信号频率愈低 (尺度 a 愈大)，信号的波形提取效果愈好.

3.2.2 *去除白噪声的小波变换模极大值点* 白噪声是处处奇异的，可以证明，白噪声的 Lipschitz 指数为负数. 这种具有负 Lipschitz 指数的奇异性函数所产生的小波变换的局部模极大值当尺度增加时，其幅度将显著地减小. 而一般信号具有正的 Lipschitz 指数，它的小波变换模极大值不随尺度显著变化. 可以利用信号与白噪声的子波变换模极大值在"小波域"内的不同传输特性来去除白噪声. 具体地讲，就是将那些随尺度参量 a 的减小，其幅度显著增加并且不能传播到大尺度参量的模极大值点视为由白噪声所产生的极大值点加以去除.

算法 根据信号和噪声占据的频带选取尺度 a 的取值范围，求不同尺度下信号和噪声小波变换的均值 $E[WT_X(a_j,t)]$，取均值的模并确定模的局部极大值，然后与一个预先给定的门限值进行比较，保留超过门限值的局部极大值点.

3.3 信号的功率谱估计

对经过"消噪处理"的各子带信号分别进行离散傅里叶变换 (DFT)，实际计算时采用 FFT 算法实现，为提高精度可以按照 $2N$ 的长度 (令 $WT_X(N\Delta t)=\cdots=WT_X((2N-1)\Delta t)=0$) 进行 FFT 计算. 求出每个子带经 FFT 处理后的模平方的最大值 $\mathrm{Max}|\mathrm{FFT}(WT_X(a_k,\tau),2N)|^2$ 作为该子带信号功率谱输出.

4 计算机仿真与分析

进行计算机仿真试验时，信号形式如下

$$X(t)=\sum_{k=1}^{L}A_k\sin(2\pi f_k t)+N(t), \tag{13}$$

其中 $L=3$, $f_1=1900\mathrm{Hz}$, $f_2=2000\mathrm{Hz}$, $f_3=2100\mathrm{Hz}$, $A_1=A_2=A_3=1$, $N(t)$ 为零均值高斯白噪声，方差为 σ^2. 取数据点数为 $N=64$, 采样频率为 $f_s=12.8\mathrm{kHz}$. 设信噪比 SNR=2dB (SNR=$10\log_{10}(A^2/2\sigma^2)$). 显然，若利用 FFT 算法就很难分辨这三个线谱 (因这里 FFT 的分辨率仅为 200Hz). 利用本文算法，取尺度参量 $a_k=1.2^{k/200}(k=1,2,\cdots)$，取 Morlet 小波基函数之参数 $\omega_0=2\pi\times10000$. 利用本文算法求得频率分别为 $\hat{f}_1=1903.25\mathrm{Hz}$, $\hat{f}_2=2000\mathrm{Hz}$, $\hat{f}_3=2099.50\mathrm{Hz}$. 在这种情形下，进行 100 次蒙特卡洛试验，得到频率估计值的均方误差值分别为 -5.0103dB, -15.2238dB, -13.2043dB. 它比较接近 Gramer-Rao(C-R) 下界.

若本例采用细化 (ZOOM)FFT 算法，需先将 (13) 式乘以旋转因子 $e^{-j2\pi\times2000t}$ 将信号的中心频率下变频至 0Hz(复调制过程)，取数据点数仍为 64，采样频率为 6.4kHz，然后进行 FFT 运算，再将带宽外的成分滤除，将结果乘以旋转因子 $e^{j2\pi\times2000t}$ 再变换到信号原中心频率处，可得到与本文算法比较接近的结果. 这样处理之后，得到了一倍于 FFT 运算的谱线 (即谱线细化了一倍)，频率分辨率提高了一倍，但总的分析带宽减小了 50%. 但是应看到，这里的 ZOOM FFT 因采样的数据点数不变，采样频率减小 50%，相当于总的采样时间增加了一倍. 因此 ZOOM FFT 实际上还是靠增加采样时间来细化频谱提高频率分辨能力的，这与本文的算法有着本质的不同，本文算法实际上是一种去耦合参数估计算法. 总之，ZOOM FFT 适用于不 (或无法) 增加数据采样点数，但可以延长总采样时间的场合；而本文算法适用于既不增加采样点数，又不能延长总采样时间，但需要提高频率分辨率和估计精度的场合.

理论分析和仿真试验都证明，本文的谱估计算法具有比较高的分辨能力和估计精度．对于一般的窄带信号，无需对所有尺度进行估计，只需在能够覆盖整个信号频带的范围内 (部分尺度参量上) 进行估计即可，这可以大大减少运算量．

4 结　论

本文提出的利用小波变换的高分辨率功率谱估计算法，具有较高的分辨率 (比 FFT 算法提高一倍) 和估计精度，并且可以用于较低信噪比条件下的高分辨率谱估计．本文的高分辨率算法与现代谱估计算法相比，具有低信噪比门限和小运算量的特点．

参　考　文　献

[1] 王宏禹．现代谱估计．南京：东南大学出版社，1990, 第二、三章．

[2] 潘明海．基于子波变换的功率谱估计算法．制导与引信，1998, 1: 23-27.

[3] 丁　宏，等．采用小波变换对短数据信号的谱估计方法．电子学报，1997, 25(1): 11-14.

[4] Rioul O, Vetterli M. Wavelets and signal processing. IEEE Signal Processing Magazine, 1991, 8(4): 14-38.

[5] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelet. IEEE Trans. on IT, 1992, IT-38(2): 617-643.

[6] A D 惠伦著，刘其培，等译．噪声中的信号检测．北京：科学出版社，1977, 第五章．

AN EXCELLENT PERFORMANCE SPECTRUM ESTIMATION ALGOTITHM BASED ON WAVELET TRANSFORM

Pan Minghai　　Liu Yongtan　　Zhao Shuqing

(*Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)

Abstract　In this paper an excellent performance spectrum estimation algotithm based on wavelet transform is given. Because of the joint time-frequency localization characteristic of wavelet transform,this algotithm is also used in the spectrum estimation of short data series. The results of computer simulation illustrate that this method achieves high resolution, high accuracy, and low SNR threshold.

Key words　Wavelet transform, FFT, Spectrum estimation

潘明海：　男，1962 年生，高级工程师，博士生，研究方向为数字信号处理．
刘永坦：　男，1937 年生，教授，博士生导师，中科院和工程院院士，研究方向为雷达与通信工程．
赵淑清：　女，1959 年生，教授，研究方向为雷达与通信工程．