第 13 卷 第 3 期
1991 年 5 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 13, No. 3
May, 1991

自由电子激光辐射和迴旋辐射的比较研究*

尹 元 昭
(中国科学院电子学研究所，北京)

摘要 在自由电子激光器中一般存在两种受激辐射形式：自由电子激光辐射和迴旋辐射．本文从理论上阐明，如果电子束的初始横向速度较大，自由电子激光器的参数选用不当，则迴旋辐射将占优势，特别当电子束能量较低时，产生迴旋辐射的倾向更大．但是迴旋辐射并不具有双重多普勒频率上漂移的特性，由于受轴向磁场强度的限制，在电子束能量较高时，其辐射频率要比自由电子激光辐射频率低得多．因此在自由电子激光器的实验研究中，如何区别这两种辐射，并有效地抑制迴旋辐射，是一个十分重要的课题．

关键词 自由电子激光器；受激辐射；自由电子激光辐射；迴旋辐射

一、引 言

自由电子激光器的工作机理是：当强流相对论电子束通过静磁摆动器时，产生速度调制和密度群聚，并将能量传递给与它相作用的电磁波．在实验上，因为电子有初始横向速度和自场的作用，电子束将沿前进的路径横向发散．为此强的轴向磁场是必不可少的．它将电子束约束在摆动器的中心轴上，使电子束不受损失地通过长的摆动器区域．然而因为电子束不可避免地有初始横向速度，在轴向磁场的作用下电子束产生迴旋运动．这个迴旋运动和电磁波相作用也能产生相干受激辐射，这就是迴旋辐射．另一方面电子束在静磁摆动器的作用下产生周期运动，这种周期运动和电磁波相作用产生的相干受激辐射就是自由电子激光辐射．由此可见，有轴向磁场的自由电子激光器中同时存在着产生迴旋辐射和自由电子激光辐射的机制．本文的理论分析表明，当电子束能量很高，初始横向速度很小时，迴旋辐射的频率和增益比自由电子激光辐射的低得多，所以不起什么作用；但当电子束能量较低，初始横向速度较大时，迴旋辐射的频率与自由电子激光辐射的频率接近，增益也较大，其作用就不容忽视．现在有一种无摆动器的自由电子激光器[1-4]，实质上就是利用本文所说的迴旋辐射．轴向磁场和大的横向初始速度是这类器件的必要条件．虽然它不需要摆动器并有迴旋自动谐振的优点，但因其工作频率与轴向磁场强度成正比将受到磁场强度的限制，加之失去了双重多普勒频率上漂移的特性，所以要提高工作频率是困难的．至于环形自由电子激光器[5-9]，其电子束经过跃变磁场将大部分轴向能量转变成迴旋能量，电子在迴旋过程中受环状摆动器的作用产生自由电子相干辐射．所以说，在其中同时存在产生迴旋辐射的有利条件，如何抑制迴旋辐射就显得更加重要．

1990 年 4 月 2 日收到，1990 年 7 月 16 日修改定稿．
* 国家自然科学基金资助项目．

近来，自由电子激光辐射和迴旋辐射的比较研究已引起人们的注意。如 A. Fruchtman[10] 比较了自由电子激光器，无摆动器自由电子激光器和迴旋管的辐射特性；T. H. Kho 和 A. T. Lin[11] 用数值模拟研究了自由电子激光和迴旋辐射混合的不稳定性。无疑所有这些工作对我们深入了解自由电子激光辐射和迴旋辐射都是有益的。

二、色散关系

设自由电子激光器的静磁场由双螺线摆动器磁场和轴向磁场组成如下：

$$\boldsymbol{B}_0 = B_w[\cos(k_w z)\boldsymbol{e}_x + \sin(k_w z)\boldsymbol{e}_y] + B_{/\!/}\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

其中，B_w 是摆动器的磁场强度，$B_{/\!/}$ 是轴向磁场强度，$k_w = 2\pi/\lambda_w$ 为摆动器的波数，λ_w 为摆动器的波长。

解相对论运动的电子在静磁场(1)式中的运动方程，不难得到电子运动速度的近似解为

$$\left.\begin{aligned} v_x^0 &= v_\perp \cos(\Omega_{/\!/} z/v_{/\!/}) + v_w \cos(k_w z) \\ v_y^0 &= v_\perp \cos(\Omega_{/\!/} z/v_{/\!/}) + v_w \sin(k_w z) \\ v_z^0 &= v_{/\!/} + (v_\perp v_w/v_{/\!/})[1 - \cos(\Omega_{/\!/}/v_{/\!/} - k_w)z] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中，$v_\perp$ 和 $v_{/\!/}$ 分别是电子速进入静磁场的初始横向和轴向速度，$\Omega_{/\!/} = eB_{/\!/}/(m_0 c\gamma_0)$ 是电子在轴向磁场中的相对论迴旋频率，γ_0 是电子束的能量因子，$\gamma_0 = (1-\beta_\perp^2-\beta_{/\!/}^2)^{-1/2}$，$\beta_\perp = v_\perp/c$，$\beta_{/\!/} = v_{/\!/}/c$，$e$ 和 m_0 是电子的电荷数值和静止质量，c 是真空中的光速。

$$v_w = \Omega_w v_{/\!/}/(\Omega_{/\!/} - k_w v_{/\!/}) \tag{3}$$

这里，$\Omega_w = eB_w/(m_0 c\gamma_0)$ 是电子在摆动器场中的相对论迴旋频率。显然与 $v_\perp$ 有关的项代表电子在轴向磁场作用下的迴旋运动，是产生迴旋辐射的基础；而与 v_w 有关的项代表电子在摆动器作用下的周期运动，是产生自由电子激光辐射的基础。后一种周期运动有谐振特性，当 $\Omega_{/\!/}$ 趋近 $k_w v_{/\!/}$ 时，电子的横向运动和轴向振动辐度都趋于无穷大，这是不允许的。事实上，在推导(2)式时已作了如下假设：

$$v_\perp \ll v_{/\!/}, \qquad v_w \ll v_{/\!/} \tag{4}$$

所以(2)式中的 v_z^0 可近似为

$$v_z^0 = v_{/\!/} \tag{5}$$

当电磁波参与相互作用时，电子的运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = -\frac{e}{m_0\gamma}\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}_0) - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})\right] \tag{6}$$

为了避免繁复的代数运算，并能更清晰地阐明这两种辐射机制和比较它们的特性，我们假设辐射是平面波 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{B} = B_y\boldsymbol{e}_y$，电子束流很弱可不考虑空间电荷效应。利用微扰解法将电子在静磁场中的运动作为零级量，电磁波和其引起的运动作为一级小量，展开(6)式仅保留到一级小量，我们得到

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_{/\!/}\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{e}{m_0\gamma_0}E_x - \frac{e}{m_0\gamma_0}\beta_{/\!/}B_y - \Omega_{/\!/}v_y + \Omega_w \sin(k_w z)v_z$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{v_\perp}{v_\parallel}\Omega_\parallel\sin\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}z\right)v_z+v_wk_w\sin(k_wz)v_z\\
&+\Omega_\parallel\gamma_0^2\frac{v_\parallel}{c^2}\left[v_\perp\sin\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}z\right)+v_w\sin(k_wz)\right]v_z-\Omega_w\gamma_0^2\frac{v_\parallel^2}{c^2}\sin(k_wz)v_z\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_\parallel\frac{\partial v_y}{\partial z}=\Omega_\parallel v_x-\Omega_w\cos(k_wz)v_z-v_\perp\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}\cos\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}z\right)v_z\\
&-v_wk_w\cos(k_wz)v_z+\Omega_w\gamma_0^2\frac{v_\parallel^2}{c^2}\cos(k_wz)v_z-\Omega_\parallel\gamma_0^2\frac{v_\parallel}{c^2}\\
&\times\left[v_\perp\cos\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}z\right)+v_w\cos(k_wz)\right]v_z\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_\parallel\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{e}{m_0\gamma_0c}\left[v_\perp\cos\left(\frac{\Omega_\parallel}{v_\parallel}z\right)+v_w\cos(k_wz)\right](\beta_\parallel E_x-B_y)\\
&-\Omega_w\sin(k_wz)v_x+\Omega_w\cos(k_wz)v_y
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

将所有的一级小量按下列形式作傅氏展开：

$$F(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_ne^{i(k_nz-\omega t)}\tag{8}$$

其中

$$k_n=\begin{cases}k+nk_w, & \text{自由电子激光模}\\ k+n\Omega_\parallel/v_\parallel & \text{迴旋模}\end{cases}$$

再利用正交关系

$$\frac{1}{l}\int_0^l\exp(ik_nz)\exp(-ik_mz)dz=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$l=\begin{cases}\lambda_w, & \text{自由电子激光模}\\ 2\pi v_\parallel/\Omega_\parallel, & \text{迴旋模}\end{cases}$$

和麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-(1/c)(\partial\boldsymbol{B}/\partial t)\tag{11}$$

从(7)式可解得

$$\left.\begin{aligned}
v_{xn}&=-i\frac{e}{m_0\gamma_0}E_{nx}\frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\Omega_\parallel^2/\Omega_n^2}\\
v_{yn}&=\frac{e}{m_0\gamma_0}E_{xn}\frac{1}{\omega}\frac{\Omega_\parallel}{\Omega_n}\frac{1}{1-\Omega_\parallel^2/\Omega_n^2}
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

对于自由电子激光模

$$\begin{aligned}
v_{zn}=&\,i\frac{1}{2}\frac{e}{m_0\gamma_0}\left[\frac{\Omega_w}{\omega}\frac{1}{1-\Omega_\parallel/\Omega_{n-1}}-\frac{v_w}{c}\left(\frac{ck_{n-1}}{\omega}-\beta_\parallel\right)\right]\frac{1}{\Omega_n}E_{x(n-1)}\\
&-i\frac{1}{2}\frac{e}{m_0\gamma_0}\left[\frac{\Omega_w}{\omega}\frac{1}{1+\Omega_\parallel/\Omega_{n+1}}+\frac{v_w}{c}\left(\frac{ck_{n+1}}{\omega}-\beta_\parallel\right)\right]\frac{1}{\Omega_n}E_{x(n+1)}
\end{aligned}\tag{13}$$

对于迴旋模

$$v_{zn}=-i\frac{1}{2}\frac{e}{m_0\gamma_0}\frac{v_\perp}{c}\left(\frac{ck_{n-1}}{\omega}-\beta_\parallel\right)\frac{1}{\Omega_n}E_{x(n-1)}$$

$$-i\frac{1}{2}\frac{e}{m_0\gamma_0}\frac{v_\perp}{c}\left(\frac{ck_{n+1}}{\omega}-\beta_{/\!/}\right)\frac{1}{\Omega_n}E_{x(n+1)} \tag{14}$$

其中

$$\Omega_n=\omega-k_n v_{/\!/}$$

再利用电流连续性方程

$$\nabla\cdot(NV)+\partial N/\partial t=0 \tag{15}$$

和电流表达式

$$J=-eNV \tag{16}$$

即可求得扰动电流。其中 $N=n_0+n$, $V=v^0+v$, n_0 和 v^0 是电子束的稳态电荷密度和电子速度，n 和 v 分别是相应的扰动量。求得扰动电流为

$$\left.\begin{aligned}
j_{xn}&=-en_0v_{xn}-en_0\frac{\tilde v}{2}\left(\frac{k_{n-1}v_{z(n-1)}}{\Omega_{n-1}}+\frac{k_{n+1}v_{z(n+1)}}{\Omega_{n+1}}\right)\\
j_{yn}&=-en_0v_{yn}+en_0\frac{\tilde v}{2}\left(\frac{k_{n-1}v_{z(n-1)}}{\Omega_{n-1}}-\frac{k_{n+1}v_{z(n+1)}}{\Omega_{n+1}}\right)\\
j_{zn}&=-en_0(\omega/\Omega_n)V_{zn}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中

$$\tilde v=\begin{cases}v_w, & \text{自由电子激光模}\\ v_\perp, & \text{迴旋模}\end{cases}$$

将扰动电流表达式(17)代入波动方程

$$\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{E})+(1/c^2)(\partial^2\boldsymbol{E}/\partial t^2)=-(4\pi/c^2)(\partial \boldsymbol{j}/\partial t) \tag{18}$$

得到色散关系如下：

自由电子激光模

$$\begin{aligned}
\omega^2-ck_n^2-\frac{\omega_p^2\Omega_n^2}{\Omega_n^2-\Omega_{/\!/}^2}&=\frac{\omega_p^2}{4}\omega v_w\left[\frac{\Omega_w}{\omega}\frac{\Omega_n}{\Omega_n+\Omega_{/\!/}}-\frac{v_w}{c}\left(\beta_{/\!/}-\frac{ck_n}{\omega}\right)\right]\frac{k_{n-1}}{\Omega_{n-1}^2}\\
&-\frac{\omega_p^2}{4}\omega v_w\left[\frac{\Omega_w}{\omega}\frac{\Omega_n}{\Omega_n-\Omega_{/\!/}}+\frac{v_w}{c}\left(\beta_{/\!/}-\frac{ck_n}{\omega}\right)\right]\frac{k_{n+1}}{\Omega_{n+1}^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

迴旋模

$$\omega^2-c^2k_n^2=-\frac{\omega_p^2}{4}\omega\frac{v_\perp^2}{c}\left(\beta_{/\!/}-\frac{ck_n}{\omega}\right)\left(\frac{k_{n-1}}{\Omega_{n-1}^2}+\frac{k_{n+1}}{\Omega_{n+1}^2}\right)+\omega_p^2\frac{\Omega_n^2}{\Omega_{n-1}\Omega_{n+1}} \tag{20}$$

其中 $\omega_p=(4\pi e^2n_0/m_0\gamma_0)^{1/2}$ 是等离子体频率。

我们只对频率上漂移和基波 ($n=0$) 感兴趣，从(19)和(20)式分别得到相应的色散关系：

自由电子激光模

$$\begin{aligned}
&\left[\omega^2-c^2k^2-\frac{\omega_p^2(\omega-kv_{/\!/})^2}{(\omega-kv_{/\!/})^2-\Omega_{/\!/}^2}\right][\omega-(k+k_w)v_{/\!/}]^2\\
&=\frac{\omega_p^2}{4}v_w(k+k_w)\left[\frac{v_w}{c}(ck-\beta_{/\!/}\omega)-\frac{\Omega_w(\omega-kv_{/\!/})}{\omega-kv_{/\!/}-\Omega_{/\!/}}\right]
\end{aligned} \tag{21}$$

迴旋模

$$(\omega^2-c^2k^2)(\omega-kv_{/\!/}-\Omega_{/\!/})^2=(\omega_p^2/4)(v_\perp^2/c)(ck-\beta_{/\!/}\omega)(k+\Omega_{/\!/}/v_{/\!/}) \tag{22}$$

三、结果和讨论

首先，从色散关系可求得这两种模式的工作频率。

对自由电子激光模，工作频率可从下列两个联立方程

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2 - c^2k^2 - \{[\omega_p^2(\omega - kv_{/\!/})^2]/[(\omega - kv_{/\!/})^2 - \Omega_{/\!/}^2]\} = 0\\&\omega - (k + k_w)v_{/\!/} = 0\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

解得为

$$\omega_{\rm FEL} = ck_w\beta_{/\!/}\gamma_{/\!/}^2\left\{1 \pm \beta_{/\!/}^2\left[1 + \frac{1}{\beta_{/\!/}^2\gamma_{/\!/}^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{k_w^2v_{/\!/}^2 - \Omega_{/\!/}^2}\right)\right]^{1/2}\right\} \tag{24}$$

对迴旋模，工作频率可从下列两个联立方程

$$\left.\begin{aligned}&\omega^2 - c^2k^2 = 0\\&\omega - kv_{/\!/} - \Omega_{/\!/} = 0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

解得

$$\omega_{\rm CM} = \Omega_{/\!/}(1 \pm \beta_{/\!/})\gamma_{/\!/}^2 \tag{26}$$

其中 $\gamma_{/\!/} = (1 - \beta_{/\!/}^2)^{-1/2}$

在远离谐振时(24)式可以简化，并令 $\Omega_{/\!/} = \Omega_0/\gamma_0$，$\Omega_0 = e\beta_{/\!/}/m_0c$ 为非相对论迴旋频率，只考虑高频解，则(24)和(26)式可改写为

$$\omega_{r\rm FEL} = (1 + \beta_{/\!/})\gamma_{/\!/}^2 v_{/\!/}k_w \tag{27}$$

$$\omega_{r\rm CM} = (1 + \beta_{/\!/})\gamma_{/\!/}^2\Omega_0/\gamma_0 \tag{28}$$

为了求增长率，我们令 $\omega = \omega_r + i\omega_i$，$\omega_r \gg \omega_i$，于是从(21)和(22)式求得

自由电子激光模

$$\omega_{i\rm FEL} = (\sqrt{3}\,\omega_{p0}^{2/3}/4)[\beta_w^2(1 + \beta_{/\!/})ck_w/(\beta_{/\!/}\gamma_0)]^{1/3} \tag{29}$$

迴旋模

$$\omega_{i\rm CM} = (\sqrt{3}\,\omega_{p0}^{2/3}/4)[\beta_\perp^2\Omega_0/(\beta_{/\!/}\gamma_0^2)]^{1/3} \tag{30}$$

这里，ω_r 已分别用(27)和(28)式代人，$\beta_w = v_w/c$，$\omega_{p0} = (4\pi e^2n_0/m_0)^{1/2}$ 是非相对论等离子体频率。

图 1 到图 3 分别画出了自由电子激光模和迴旋模的辐射频率和增长率随电子束能量，轴向磁场和电子横向初始速度的变化。由图可见，自由电子激光模的增长率具有谐振特性，谐振条件为 $\Omega_{/\!/} - \beta_{/\!/}ck_w = 0$，从(27)和(28)式可见，这正是 $\omega_{\rm FEL} = \omega_{\rm CM}$ 的条件，这已在图 1 和图 2 中用虚线表示出来。对所选定的参量，图 1 和图 2 的谐振电子束能量和轴向磁场分别为 1MeV，10kG 和 2MeV，17.2kG。当然在实验中应避开谐振点，但可适当地接近谐振点，以增加自由电子激光模的增益。迴旋模没有谐振特性。自由电子激光模的增长率随摆动器磁场强度的增加和摆动器波长的减少而增大，迴旋模的增长率随轴向磁场和电子束的横向初始速度的增加而增大。因为轴向磁场必须有足够大的值，所以压制迴旋模的最有效的方法是尽量减少电子束的横向初始速度，也就是说，对电子注入器的设计提出很高的要求。但是电子束的横向初始速度对两种模的辐射频率和自由电子

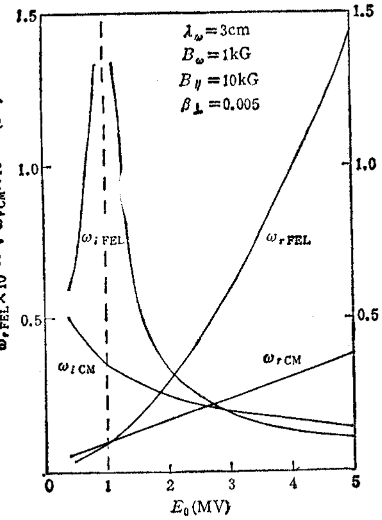

图 1 自由电子激光模和迴旋模的辐射频率和增长率与电子束能量的关系

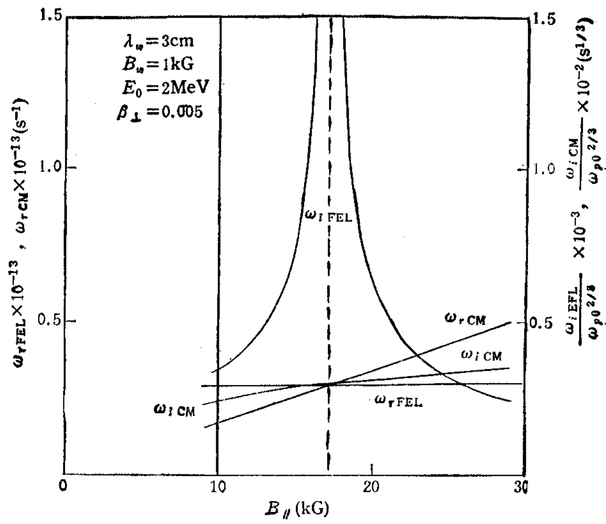

图 2 自由电子激光模和迴旋模的辐射频率和增长率与轴向磁场的关系

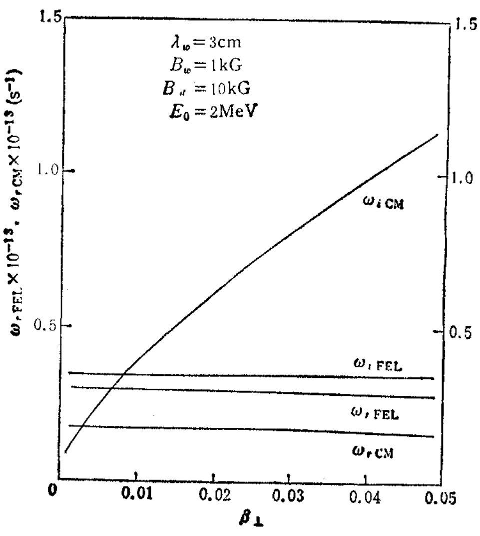

图 3 自由电子激光模和迴旋模的辐射频率和增长率与电子束的横向初始速度的关系(图中坐标 10^2 应为 10^{-2})

激光模的增长率一般情况下没有什么影响．自由电子激光辐射频率有双重多普勒漂移特性，与电子束能量的平方成正比；而迴旋辐射频率没有双重多普勒漂移特性，与电子束能量成正比．因为轴向磁场要足够强以约束电子束，所以提高自由电子激光辐射频率使之远大于迴旋辐射频率的最有效的方法是提高电子束的能量．当然这在一定条件下会使自由电子激光模的增长率低于迴旋模，所以降低电子束的横向初始速度，以降低迴旋模的增长率就显得更加重要．进一步说，为了取消迴旋辐射对自由电子激光辐射的竞争和干扰，最直接的办法是不用轴向磁场．根据最近的报道[12]，用螺旋摆动器的非零横向梯度和非

零轴向分量聚焦电子束而不用轴向磁场，获得了自由电子激光输出。

参　考　文　献

[1] A. Fruchtman, L. Friedland, *J. Appl. Phys.*, 53(1982), 4011.

[2] A. Fruchtman, L. Friedland, *IEEE J. of QE*, QE-19(1983), 327.

[3] A. Fruchtman, *Phys. Fluids*, 29(1986), 1695.

[4] S. C. Zhang, Y. Sun, *IEEE J. of QE*, QE-23(1987), 1646.

[5] Y. Z. Yin, G. Bekefi, *Phys. Fluids*, 28(1985), 1186.

[6] Y. Z. Yin, R. J. Ying, G. Bekefi, *IEEE J. of QE*, QE-23(1987), 1610.

[7] H. Saito, J. S. Wurtele, *Phys. Fluids*, 30(1987), 2209.

[8] W. W. Destler, F. M. Aghamir, D. A. Boyd, G. Bekefi, R. E. Sheffer, Y. Z. Yin, *Phys. Fluids*, 28(1985), 1962.

[9] G. Bekefi, R. E. Shefer, W. W. Destler, Millimeter wave radiation from a rotating electron ring subjected to an azimuthally periodic wiggler magnetic field, in Proc. 7th Int. Conf. Free Electron Lasers, Sept. 1985, pp. 352—356. Amsterdam: North-Holland, (1986).

[10] A. Fruchtman, *Phys. Rev.*, A37(1988), 4252.

[11] T. H. Kho, A. T. Lin, *Int. J. Electron.*, 65(1988), 513.

[12] D. A. Kirkpatrick, G. Bekefi, A. C. DiRienzo, H. P. Freund, A. K. Ganguly, *Phys. Fluids*, B1(1989), 1511.

COMPARISON BETWEEN FEL AND CYCLOTRON RADIATIONS

Yin Yuanzhao

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract In general, in free electron lasers there two kinds of stimulated radiations. FEL radition and cyclotron ralition. It is shown theoretically, if the initial transverse velocity of electron is large and the selected parameters for FEL are not suitable, the cyclotron radiation will be dominant, especially when the energy of electron beam is low. But the cyclotron radiation does not have double Doppler frequency up-shift effect, is frequency is limited by axial magnetic field, when the energy of electron beam is high, the cyclotron radiation frequency will be much lower than FEL radiation frequency. Therefore, in FEL experiments how to distinguish these two kinds of radiations and to suppress the cyclotron radiation are very important.

Key words Free electron laser; Stimulation radiation; FEL radiation; cyclotron radiation