

一种在对极几何约束下重建三维物体的方法¹

庞晨静 徐正伟 吴成柯

(西安电子科技大学信息工程系 西安 710071)

摘 要 本文在用对极几何关系重建三维物体的基础上,提出了利用最小二乘法 and 迭代法相结合的基础矩阵求解算法,推导了新的评价函数作为迭代的误差测度。在每次迭代时,以评价函数作为测度来排除具有较大误差的图象点,而对保留的误差较小的点乘以适当的权值,因此得到精度较高的基础矩阵。实验表明,我们的重建方法比已有算法运算精度更高,性能更稳定,且具有良好的抗噪声性能。

关键词 对极几何, 基础矩阵, 三维重建

中图分类号 TP391.7

1 引 言

在计算机视觉中,空间物体投影图象间的约束关系可用对极几何 (epipolar geometry) 来描述。相比于传统的重建方法^[1],利用对极几何的重建方法,求出的投影矩阵^[2]更符合双目视觉机理,得到的结果更准确,同时使所需要的最少校准点数由 6 点减少到 5 点。

如图 1 所示,在对极几何中,三维空间点 M 在图象 1、2 上分别投影为 m 和 m' , m 、 m' 为匹配点,两相机的光学中心 c 、 c' 的连线与图象 1、2 的交点 e 、 e' 称为两图象平面的对极心 (epipole),射线 $\langle e', m' \rangle$ 称为点 m 在图象 2 中的对极线 (epipolar line),对极线 $\langle e, m \rangle$ 也有类似的定义。基础矩阵 F (fundamental matrix) 是将图象 1 中的点映射成它在图象 2 中的对极线的矩阵,其定义式为

$$Fm = \langle e', m' \rangle = [e']_x m',$$

$$F'm' = \langle e, m \rangle = [e]_x m.$$

其中 $[e']_x$ 是 $e'(e'_1, e'_2, e'_3)$ 的斜对称矩阵 (skew-symmetric matrix), 它的秩为 2。由上述定义我们不难得出基础矩阵的下列关系式:

$$m'^T Fm = 0, \tag{1}$$

$$F = (F')^T, \tag{2}$$

$$F^T e' = F' e' = 0, \tag{3}$$

$$\text{rank}(F) = 2, \tag{4}$$

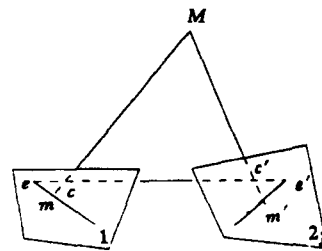


图 1 对极几何

¹ 1996-01-18 收到, 1996-10-29 定稿
国家自然科学基金和中法先进研究计划的资助课题

其中

$$F = \begin{bmatrix} ff_1 & ff_2 & ff_3 \\ ff_4 & ff_5 & ff_6 \\ ff_7 & ff_8 & ff_9 \end{bmatrix}.$$

若图象 1 有 n 个点 $m_i(x_i, y_i, 1)^T$ 分别与图象 2 中的 n 个点 $m'_i(x'_i, y'_i, 1)^T$ 相匹配, 其中 x_i 为齐次项, 将它们代入 (1) 式, 则计算基础矩阵的公式经整理后为

$$f^T z_i = 0, \quad (5)$$

$$f = (ff_1, ff_2, \dots, ff_9)^T, \quad z_i = (x'_i x_i, x'_i y_i, x'_i y'_i x_i, y'_i y_i, y'_i x_i, y_i, x_i, y_i, 1)^T, \quad i = 1 \sim n.$$

以上是对极几何的一些基本原理。O.Faugeras^[3]、权龙^[4]等人先后将基础矩阵用于射影重建(指在射影空间里的重建), 取得了较好的实验结果。基础矩阵的精度会直接影响重建效果的好坏。针对这一问题 R.Deriche 和 O.Faugeras 等^[5]将迭代法与最小二乘法结合, 在白噪声的假设下提出了一些算法。但白噪声的假设是不合理的, 使计算精度受到了影响。本文在处理这一问题时, 虽然也应用了迭代法与最小二乘法相结合的方法, 但我们在每次对 (5) 式采用最小二乘法迭代之前先给图象点坐标 $f^T z_i$ 乘以适当的权值 w_i , 并在定义评价函数的基础上, 以此为测度在每次迭代中排除一对具有较大误差的点, 从而减弱了计算基础矩阵时噪声的影响。

2 高精度基础矩阵的计算方法

2.1 基于奇异值分解的最小二乘法

基础矩阵的基本计算公式是 (5) 式。假定 z_i 的噪声是高斯的, 而且 z_i 的九个元素有相同的方差, 则 f 的最大似然估计应满足使各点 z_i 到此超平面 f 的距离 $r_i (= f^T z_i)$, 称为代数余数的平方和最小。这可以表示成

$$f = \min_f \sum_{i=1}^n (f^T z_i)^2 = \min_f \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad f^T f = 1. \quad (6)$$

令矩阵

$$Z = (Z_1^T \ Z_2^T \ Z_3^T)^T, \quad M = Z^T Z, \quad (7)$$

则 (6) 式可写作:

$$f = \min_f (f^T Z^T Z f) = \min_f (f^T M f), \quad f^T f = 1 \quad (8)$$

在最小二乘法中, f 是 M 的绝对值最小特征值的单位特征向量。而本文利用对 Z 的奇异值分解来求: $Z = U \Lambda V^T$, 则 f 为矩阵 V 中对应于 Z 的绝对值最小的奇异值的单位列向量。与对 M 作特征值分解的方法相比, 对 Z 求奇异值分解的方法免除了由系数阵相乘 ($M = Z^T Z$) 带来的计算量和复杂的误差; 且分解算法比求特征值的算法更稳定, 收敛性能更好, 这一点在数据量较大时尤为突出。

在求 f 之前必须把 $z_i (i = 1 \sim n)$ 的重心移至原点, 因此我们对 Z 的每一列的各元素减去该列的平均值, 得到新的 Z 、 M 矩阵。在迭代中, 为消除 Z 的齐次项列对 f 估计的影响, 我们将 Z 分块成: $Z = [Z_1 | Z_2]$; 将 M 、 f 分块成:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad f = [f_1 | f_2], \quad (9)$$

其中 $f_1 = (ff_1, ff_2, \dots, ff_8)$, $f_2 = (ff_9)$. 于是 f_1 可由对 Z_1 进行奇异值分解求出. 而 f_2 可由下式求出:

$$\partial(f^T M f) / \partial f_2 = 0. \quad (10)$$

这样得到的 F 一般秩为 3, 不满足 (4) 式, 因此需要对 F 做降秩处理: 将 F 奇异值分解, $F = U\Lambda V^T$, 把对角阵 Λ 对角线上绝对值最小的元素置零, 再与 U 、 V 矩阵相乘, 即得秩为 2 的 F .

2.2 基础矩阵的迭代计算

如前所述, 为了进一步提高基础矩阵的计算精度, 我们引入迭代法和评价函数 T_i . 设 M 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ 和对应的单位特征矢量 v_1, v_2, \dots, v_9 . 如果删除第 i 对图象点, M 将被干扰成 $M' = M + \delta M = M - z_i z_i^T$, λ_j 和 v_j 相应地被干扰成 λ'_j 和 v'_j . 若 λ_j 是 M 的一重特征值, 利用 $\lambda_j M = \lambda_j v_j$ 和 $\lambda'_j M' = \lambda'_j v'_j$ 不难算得

$$v'_j = v_j + \sum_{k \neq j} \frac{v_k^T \delta M v_j}{\lambda_j - \lambda_k} v_k + O(\delta M)^2. \quad (11)$$

又设 λ_1 是绝对值最小的特征值, 由 (8) 式可知 $f = v_1$. 因此删除了第 i 对图象点后 f 的估计值 $f_{(i)}$ 满足

$$f_{(i)} - f = v'_1 - v_1 = -z_i^T v_1 \sum_{k \neq 1} \frac{v_k^T z_i}{\lambda_1 - \lambda_k} v_k. \quad (12)$$

上式即为删除第 i 对点后 f 的估计值的改变量. 我们定义评价函数 T_i 为

$$T_i \stackrel{\text{def}}{=} (f_{(i)} - f)^T M (f_{(i)} - f). \quad (13)$$

将 (12) 式代入, 得到

$$T_i = r_i^2 l_i, \quad (14)$$

其中评价因子

$$l_i = \sum_{k \neq 1} \left(\frac{U[i, k] \lambda_k}{\lambda_1 - \lambda_k} \right)^2, \quad (15)$$

而 $U[i, k]$ 是 Z 的奇异值分解 $Z = U\Lambda V^T$ 中 U 的第 i 行、第 k 列元素.

另外正如我们在引言中指出的, z_i 的白噪声假设是不合理的. 为此我们对 (6) 式作一修正, 即在每次按 (6) 式求最小二乘解之前, 我们先对上次迭代后剩下的各图象点 (m_i, m'_i) 的坐标乘以权值 $w'_i = 1/\nabla r_i$, 其中 $\nabla r = (r_x^2 + r_y^2 + r_{x'}^2 + r_{y'}^2)^{1/2}$, 而 r_x 表示代数余数 r 对 x 的偏导数.

为了衡量每次迭代产生的 F 的质量, 我们定义对极距离 d_i 、 d'_i 以及它们的平方和 D . 对极距离 d_i 是指图象 1 中点到 m_i 对极线 $F'm'_i$ 的欧氏距离, 即

$$d_i = |m_i^T F' m'_i| / \sqrt{(F' m'_i)_1^2 + (F' m'_i)_2^2 + (F' m'_i)_3^2}, \quad (16)$$

其中 $(F' m'_i)_k$ 表示 $F' m'_i$ 的第 k ($k = 1 \sim 3$) 个分量. 图象 2 中的对极距离 d'_i 有类似的定义式, 只是将式中的 m_i 和 m'_i 互换, F' 换成 F . 对于理想的 F 有 $d_i = 0$, $d'_i = 0$, 因此我们定义对极距离的平方和 $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (d_i^2 + d'_i^2)$, 用它来衡量每次迭代产生的 F 与理想 F 的接近程度,

即在迭代结束时将对应于最小的 D 的 F 作为我们得到的基础矩阵的最佳估计值。由 (6) 式不难推出 D 和代数余数 r_i 的关系式: $D = \sum_i w_i^2 r_i^2$, 其中

$$w_i = \{1/[(Fm_i)_1^2 + (Fm_i)_2^2 + (Fm_i)_3^2] + 1/[F^T m'_i)_1^2 + (F^T m'_i)_2^2 + (F^T m'_i)_3^2]\}^{1/2}. \quad (17)$$

实验发现用 w_i 给 m_i 、 m'_i 的坐标加权比 w'_i 效果要好, 因此在算法中我们选定 w_i 来代替 w'_i 。

在运算中我们记录下每次迭代产生的 D 和 F , 结束时找出 D 的最小值 D_{\min} , 并认为对应于 D_{\min} 的 F 就是求出的最佳基础矩阵。

3 由基础矩阵重建三维物体

在已知基础矩阵时, 相机投影矩阵 (P, P') 有一对形式简单的解^[6]: $P = [I|0]$, $P' = [Q|e']$, 其中 e' 是图象 2 中的对极心, 它可以由 F 利用 (5) 式算出, 而 Q 可以由 F 和 e' 按下式算出:

$$Q = -[e']_x F / \|e'\|^2, \quad (18)$$

将投影矩阵 (P, P') 和校准点在图象 1、2 上的投影坐标 $(x, y, 1)$ 、 $(x', y', 1)$ 代入投影公式

$$s(x, y, 1)^T = P(u, v, w, t)^T, \quad s'(x', y', 1)^T = P'(u, v, w, t)^T, \quad (19)$$

(其中 s 、 s' 是任意非零系数), 可求出这些校准点在 (P, P') 的三维重建坐标 $\tilde{m}(u, v, w, t)^T$ 。若已知它们的三维欧氏坐标 $M_i(X_i, Y_i, Z_i, 1)^T$ 则可由下式求出变换矩阵 D :

$$\lambda_i [u_i, v_i, w_i, t_i]^T = D[X_i, Y_i, Z_i, 1]^T, \quad (20)$$

其中 λ_i 是任意非 0 系数。上式中消去 λ_i , 对每个 i 剩有 3 个独立方程。 D 有 16 个元素, 它又是非奇异阵, 因此有 15 个独立元素, 需要 15 个独立方程, 所以 5 个校准点可以确定 D , 这就比传统算法^[1]少用了一个校准点。另外由 D 矩阵我们就可以求得已知欧氏坐标系下的相机投影矩阵 $N = PD$ 和 $N' = P'D$ 。按照与计算射影重建相类似的方法, 我们可以由下面的投影公式求出各对图象点的欧氏重建 $M_i(X_i, Y_i, Z_i, 1)^T$, k_i, k'_i 为任意非零系数。

$$k_i(x_i, y_i, 1)^T = N(X_i, Y_i, Z_i, 1)^T, \quad k'_i(x'_i, y'_i, 1)^T = N'(X_i, Y_i, Z_i, 1)^T. \quad (21)$$

4 实验结果

我们对合成数据和真实数据用 R. Deriche 的算法^[5]和我们的高精度算法分别作了重建实验。合成数据是由计算机产生的 40 个空间点。实验表明本文算法的重建精度比 R. Deriche 的算法要高得多。这里给出对图 2 所示的真实图象所做的实验结果。

这里的相对误差是平均误差与这组三维空间点的最大尺寸 (约为 52 个象素) 之比。

由表 1 可以看到 R. Deriche 的算法对真实图象的重建误差都在 5% 以上, 有的甚至超过了 50%; 而我们的算法却取得了令人满意的重建精度。我们还对其它一些合成图象和真实图象作了重建实验, 实验结果同样说明了我们的算法比 R. Deriche 的算法重建精度高, 对真实图象的重建效果好。

致谢 法国 LIFIA 给我们提供的真实场景数据、与 R. Mohr 教授、权龙博士和 M. Daphna 博士的有关讨论, 在此一并致谢。

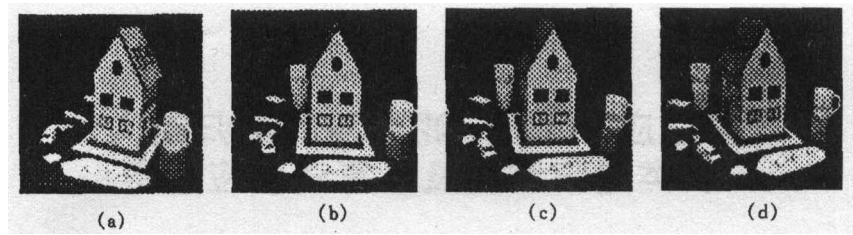


图 2 一个真实场景的四幅图象

表 1 两种重建算法对若干组真实数据的重建结果

图象	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	2-1	3-1	3-2	4-2	4-3
相对误差 1	0.3514	0.5600	0.3016	0.5902	0.2836	0.1651	0.0253	0.2483	0.4817	0.2373
相对误差 2	0.0906	0.0603	0.0284	0.0990	0.1473	0.0888	0.0702	0.0268	0.0906	0.1276

参 考 文 献

- [1] 吴成柯, 陆心如, 王林. 结构光三维信息获取系统. 模式识别与人工智能, 1989, 2(2): 37-42
- [2] 徐正伟, 吴成柯. 基于透视投影不变性的空间平面多边形识别, 电子学报, 1993, 21(7): 8-15.
- [3] Faugeras O. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated rig? Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure, Italy: May 1992, Springer-Verlag, 563-578.
- [4] Quan L. Invariants of six points and projective reconstruction from three uncalibrated images. IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell., 1995, PAMI-17(1): 34-46
- [5] Deriche R, Zhang Z, Luong Q T, Faugeras O. Robust recovery of the epipolar geometry for an uncalibrated stereo rig. Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision, LNCS 800/801, Springer-Verlag, 1994, 567-576.
- [6] Hartley Richard I. Projective reconstruction and invariants from multiple images. IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell., 1994, PAMI-16(10): 1036-1041.

A 3-D RECONSTRUCTION METHOD BASED ON
THE CONSTRAINT OF EPIPOLAR GEOMETRY

Pang Chenjing Xu Zhengwei Wu Chengke

(Information Engineering Dept., Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract This paper combines the least-square method and iteration method to get the fundamental matrix and develops a new evaluation function based on the epipolar geometry. During the iteration, with the evaluation function as a measurement, the points which bring larger noise are deleted, and the points with smaller noise are retained, thus the precision of our method is increased. The experimental results indicate the new method is precise in calculation, stable in performance and resistant to noise.

Key words Epipolar geometry, Fundamental matrix, 3-D Reconstruction

庞晨静: 女, 1972年生, 硕士生, 现在南京邮电学院从事图象通信的教学和科研工作.

徐正伟: 男, 1965年生, 副教授, 博士, 现主要从事计算机视觉、图像处理和模式识别等方面的工作.

吴成柯: 男, 1938年生, 教授, 博士生导师, 现主要从事计算机视觉、计算机图形学和图象编码等方面的工作.