

结合保角变换的优化模拟镜象法解多种 截面形状同轴线的特性阻抗

余显焯 方汉平

(南京电子技术研究所 南京 210013)

摘要 介绍一种计算多种截面形状同轴线的新技术——结合保角变换的优化模拟镜象法。此法计算量小、精确度高,并能进行误差范围计算。列出对内圆外方、偏心内圆外方和内带形外圆等九种同轴线特性阻抗的计算结果并与其它文献结果进行了比较。

关键词 保角变换,优化模拟镜象法,特性阻抗

1 引言

求任意截面同轴线的特性阻抗已有很多种方法:如解析法、保角变换法等,这些方法适用范围窄、推导复杂;矩量法适用面广,但碰到奇异点处理、病态矩阵等问题。本文介绍一种适用面广、计算量小的方法——结合保角变换的优化模拟镜象法。由于模拟镜象布置在被计算的电场区域之外故无奇异点问题,计算常用同轴线,微机运算时间在1分钟以内。此法还可给出误差的上下限,变动模拟镜象可缩小误差范围,从而大大提高结果的精确度。

2 结合保角变换的优化模拟镜象法原理

优化模拟镜象法是经典镜象法的推广^[1,2],用它求二维单位长静电容 C , 则通过下式

$$Z = \sqrt{\mu\epsilon/C} \quad (1)$$

可得到同轴形传输线的特性阻抗 Z 。

对任意截面形状的同轴线(图1),设截面在复平面 Z 上,内导体电势为1,外导体电势为0。在内导体内部和外导体外部分别放置一系列模拟镜象 q_1^i, \dots, q_m^i 和 q_1^o, \dots, q_n^o , 其大小和位置待定。在内、外导体周线上等间隔地分别取 m 和 n 个轮廓点,则由轮廓点电势得

1993-07-20 收到, 1994-01-04 定稿

余显焯 男, 1938 年生, 高工, 现从事电磁场数值计算、毫米波器件等方面的研究工作。
方汉平 男, 1967 年生, 助理工程师, 现从事微波放大器及传输线传输特性的研究工作。

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1,m+n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m+n,1} & p_{m+n,2} & p_{m+n,m+n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^i \\ \vdots \\ q_m^i \\ q_1^o \\ \vdots \\ q_n^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中
$$p_{rs} = -\frac{\ln|z_r - z_s|}{2\pi\epsilon_0}, \quad (1 \leq r, s \leq m+n); \quad (3)$$

z_r 为 q^i, q^o 模拟线电荷位置; z_r 为内、外导体周线上的轮廓点位置。解(2)式得各模拟线电荷值。而单位长电容(取 $u = 1$ 一侧的模拟电荷)为

$$C = \sum_{i=1}^m q_i. \quad (4)$$

表 1 常用保角变换

序号	Z平面图形	名称	保角变换
1		圆形内部	$w = j \frac{1-z}{1+z}$
2		圆形外部	$w = j \frac{z-1}{z+1}$
3		角形内部(n 为正整数)	$w = z^n$
4		带形内部	$w = e^{\pi z/a}$
5		槽形内部	$w = \operatorname{ch} \frac{\pi z}{a}$
6		无厚度带形外部	$w = \sqrt{\frac{d-z}{d+z}}$
7		扇形内部	$w = \left(\frac{1+z^n}{1-z^n} \right)^{1/2}$

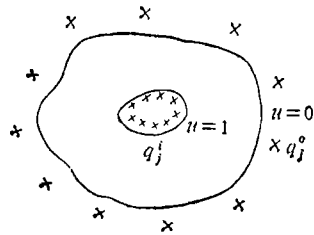


图1 同轴线截面上的模拟镜象

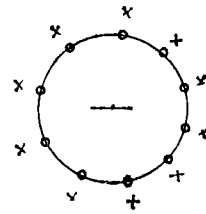


图2 内带形外圆同轴线

× 代表模拟线电荷位置; ○ 代表轮廓点位置

若 Z 平面上内导体或外导体周界(可封闭亦可开放)可经过保角变换 $t = f(z)$ 变为另一复平面 T 上的实轴(电势取 0), 内导体的外部区域或外导体的内部区域同时变为 T 的上半平面, 则在 z_0 点的模拟线电荷, 在 z 点有

$$p_{z_0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|f(z) - \overline{f(z_0)}|}, \quad (5)$$

式中 $\overline{f(z_0)}$ 为 $f(z_0)$ 的共轭值. 对保角变换后变为 T 平面实轴的周线, 显然满足 $u = 0$, 只要在另一周界上取轮廓点, 则(2)式的未知数减至 m 个(在内周界上取轮廓点)或 n 个(在外周界上取轮廓点), 计算大为化简, 注意此时(3)式要相应改为

$$p_{z_i} = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|f(z_i) - f(z_j)|}{|f(z_i) - \overline{f(z_j)}|}. \quad (6)$$

现将常用复平面 Z 到上半平面的保角变换列于表 1.

表 1 中变换 2, 6 适用于内导体, 其余变换适用于外导体. 对无厚度带形内导体的同轴线, 由于带形内无法设置模拟线电荷使一般优化模拟镜象法无法应用. 此时可用变换 6, 只需设置外周界模拟线电荷 q_j^o , 就仍可应用优化模拟镜象法, 如内带形外圆同轴线(图 2), 可在外导体外侧设一系列 q_j^o , 在外导体周线上取一系列轮廓点, 再把相应的保角变换式代入(6)式, 即可求出其特性阻抗.

模拟镜象电荷的位置有多种选取方法, 本文用沿周线平行均匀排列模拟线电荷(见图 1), 实践证明是比较有效的. 模拟线电荷与周线的距离用优化法决定, 先在某一组模拟线电荷下用下节所述方法计算误差范围, 再改变电荷与周线的距离使误差范围减小达到所要求的精度. 一般经几次修改即能达到精度要求.

3 误差范围计算

本法可计算传输线特性阻抗的计算误差范围. 以内圆外方同轴线为例, 模拟线电荷对内圆边界条件在保角变换(表 1, 2)后能完全满足; 对外方形边界条件仅能近似满足; 边界上电势变化如图 3(a) 所示, 在轮廓点上 $u = 1$, 非轮廓点上 u 值要偏离. 由电势连续性知两轮廓点间必有一点偏离达最大. 设方形边界上电势最大值为 $u_{\max} = 1 + f_A$, 最小值为 $u_{\min} = 1 - f_B$, ($f_A, f_B \geq 0$), 沿边界作 $u = 1$ 等势线如图 3(b) 所示. 显然边界与 $u = 1$ 等势线在轮廓点相合.

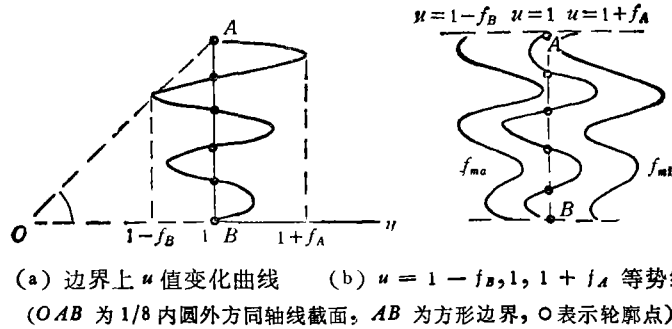


图 3

将全部模拟线电荷除以 $(1 + f_A)$, 则电势也将缩小到 $1/(1 + f_A)$, 此时方形边界上的值都小于或等于 1, 其 $u = 1$ 等势线和原来线电荷分布的 $u = 1 + f_A$ 等势线重合。对新的模拟线电荷 $q_i/(1 + f_A)$, ($i = 1, \dots, m$), 由于方形边界上都有 $u \leq 1$, 根据调和函数边界取极值原理知其 $u = 1$ 等势线 f_{mi} 必在边界之外, 此时所求电容为

$$C_{mi} = \sum_{i=1}^m q_i/(1 + f_A) = C_o/(1 + f_A). \quad (7)$$

同理, 将全部电荷除以 $(1 - f_B)$, 则 $u = 1$ 等势线 f_{ma} 将在边界以内, 所求电容为 $C_{ma} = C_o/(1 - f_B)$. 由柯林原理知准确电容值 C_c 必在 C_{mi} 与 C_{ma} 之间。

若另一边界 ($u = 0$) 亦未作保角变换, 则可用同法处理, 若边界上最大值为 g_A , 最小值为 $-g_B$ ($g_A, g_B \geq 0$), 可得

$$C_o/[(1 + f_A)(1 + g_A)] \leq C_c \leq C_o/[(1 - f_B)(1 - g_B)]. \quad (8)$$

将(8)式代入(1)式, 即可求得特性阻抗 Z 的误差范围。

4 计算结果

计算了九种同轴线的特性阻抗和误差范围, 并与其它文献结果比较, 见表 2—表 10, 其中偏心内圆外方同轴线(表 5)无其它文献比较。

由表可见各文献数据都较一致。表中内圆同轴线计算精度普遍比外圆同轴线计算精度要高。这点很容易理解, 因为后者内导体尖角处的电容对结果精度影响大, 故误差增大。另外, 内外导体尺寸比 R 小时特性阻抗计算精度高, 当 R 增大时计算精度降低, 各文

表 2 内圆外方同轴线

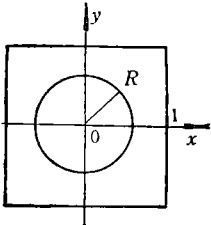
	R	本 文	文献[3]	文献[4]	文献[5]
	0.1	$142.700800 \pm 2 \times 10^{-6}$	142.59	142.3253	142.7
0.3	$76.783962 \pm 2 \times 10^{-6}$	76.72	76.83665	76.78	
0.5	$46.129387 \pm 1 \times 10^{-6}$	46.07	46.21293	46.13	
0.7	$25.86845 \pm 3.4 \times 10^{-5}$	25.77	25.97066	25.95	
0.9	$10.140 \pm 1.7 \times 10^{-3}$	10.06	10.16571	10.87	
0.95	$6.2574 \pm 2.6 \times 10^{-4}$	6.24	—	7.62	

表 3 内圆外正三角形同轴线

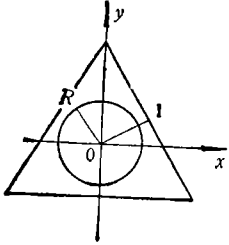
	R	本 文	文献[3]	文献[4]	文献[5]
	0.1	$145.59 \pm 5.6 \times 10^{-3}$	145.48	145.2810	145.60
0.3	$79.681 \pm 5.6 \times 10^{-3}$	79.61	79.81467	79.68	
0.5	$48.996 \pm 5.6 \times 10^{-3}$	48.91	49.16542	49.03	
0.7	$28.550 \pm 5.6 \times 10^{-3}$	28.43	28.58490	28.84	
0.9	12.06 ± 0.015	11.99	—	13.77	

表 4 内圆外正六角形同轴线

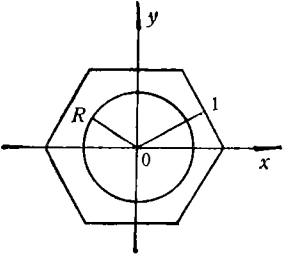
	R	本 文	文献[3]	文献[4]	文献[5]
	0.1	$140.38 \pm 1.2 \times 10^{-2}$	140.26	139.6282	140.37
0.3	$74.46 \pm 1.2 \times 10^{-2}$	74.40	74.45855	74.45	
0.5	$43.81 \pm 1.2 \times 10^{-2}$	43.77	43.84790	43.80	
0.7	$23.61 \pm 1.2 \times 10^{-2}$	23.56	23.67072	23.61	
0.9	$8.32 \pm 1.0 \times 10^{-2}$	8.30	8.435211	8.53	

表 5 偏心内圆外方同轴线($R = 0.5$)

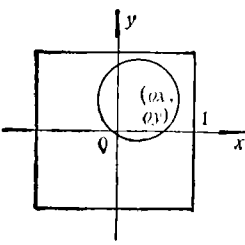
	$\sigma_x \backslash \sigma_y$	0.0	0.2
	0.0	0.0	$46.12938 \pm 1.0 \times 10^{-6}$
0.1	0.1	$45.4553 \pm 4.0 \times 10^{-5}$	$42.6891 \pm 1.6 \times 10^{-4}$
0.2	0.2	$43.2711 \pm 3.6 \times 10^{-5}$	$40.7903 \pm 4.3 \times 10^{-4}$
0.3	0.3	$38.966 \pm 1.4 \times 10^{-3}$	$36.991 \pm 2.0 \times 10^{-3}$
0.4	0.4	$30.757 \pm 2.9 \times 10^{-3}$	$29.557 \pm 4.1 \times 10^{-3}$
0.45	0.45	$23.281 \pm 2.0 \times 10^{-3}$	$22.56 \pm 1.5 \times 10^{-1}$

表 6 内方外圆同轴线

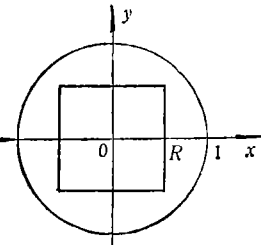
	R	本 文	文献[3]	文献[6]	文献[5]
	0.05	169.89 ± 0.24	169.66	169.66	169.80
0.1	128.30 ± 0.24	128.11	128.12	128.21	
0.3	62.38 ± 0.24	62.23	62.23	62.29	
0.4	45.11 ± 0.25	44.94	44.92	45.03	
0.5	31.63 ± 0.24	31.40	31.38	31.64	
0.6	20.35 ± 0.27	19.87	19.95	20.70	
0.7	8.23 ± 0.69	6.70	7.32	11.45	

表 7 内正三角形外圆同轴线

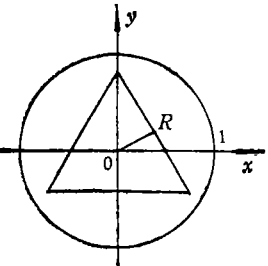
	R	本 文	文献[3]	文献[4]	文献[5]
	0.1	115.20 ± 0.65	115.31	114.7015	115.41
0.3	49.15 ± 0.66	49.24	49.0435	49.49	
0.4	31.10 ± 0.70	31.01	31.0786	32.23	

表 8 内正六边形外圆同轴线

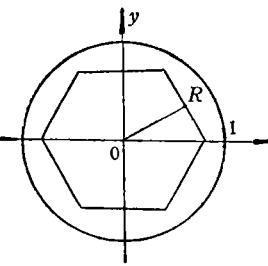
	R	本 文	文献[3]	文献[4]	文献[5]
	0.1	134.53 ± 0.13	134.39	133.4042	134.50
0.3	68.60 ± 0.11	68.54	68.35858	68.59	
0.6	27.01 ± 0.11	26.93	—	27.00	
0.7	17.71 ± 0.11	17.58	17.61321	17.75	

表 9 内方外方同轴线

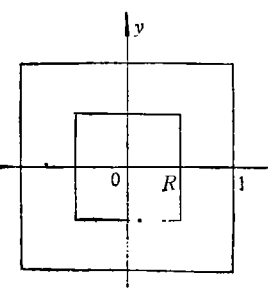
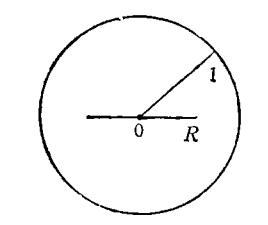
	R	本 文	文献[4]	文献[6]	文献[5]
	0.2	90.53 ± 1.22	—	90.98	91.16
0.4	49.28 ± 1.20	49.638	49.75	49.57	
0.5	37.30 ± 1.10	36.70	36.77	36.19	

表 10 内带形外圆同轴线

	R	本 文	文献[3]	文献[7]	文献[8]
	0.3	113.76 ± 0.01	113.69	113.67	—
0.7	60.982 ± 0.002	60.99	60.95	—	
0.9	40.69 ± 0.014	40.80	40.93	40.13	
0.99	24.7 ± 0.2	25.03	—	24.71	

献报道的数据间不一致性亦增大。以内圆外方和内圆外正三角形同轴线(表 2, 表 3)为例与其它文献比较, 算出其相对偏差, 比本文结果大为正、小为负列于表 11, 表 12。

表 11 内圆外方同轴线特性阻抗各文献计算结果间的相对偏差(单位 1%)

R	本文*	文献[9]	文献[10]	文献[11]	文献[12]	文献[13]	文献[3]	文献[4]	文献[5]
0.3	<±0.1	-1.1	-0.8	+0.8	-	-5.6	-0.8	+0.8	+0.1
0.5	<±0.1	-2.8	-0.7	+0.7	-0.9	-8.7	-1.3	+1.7	+0.1
0.7	<±0.1	-8.1	-0.8	+0.8	-0.8	-12.4	-3.9	+3.9	+3.1
0.9	±0.2	-16.8	-	+0.99	-0.99	+34.5	-7.9	+3.0	+72
0.95	±0.04	-9.2	-	-	-1.1	+158.6	-2.8	-	-

* 相对偏差由表 2 误差范围算出

表 12 内圆外正三角形同轴线特性阻抗各文献计算结果间的相对偏差(单位 1%)

R	本文	文献[9]	文献[11]	文献[13]	文献[14]	文献[3]	文献[4]	文献[5]	文献[15]
0.3	<±0.1	-8.9	+0.75	-24.3	-39.3	-0.9	+1.6	+0.1	-0.6
0.5	<±0.1	-16.3	+0.6	-38.4	-56.3	-1.8	+3.4	+0.6	-0.4
0.7	±0.2	-30.8	+0.7	-56.4	-71.1	-4.2	+1.2	+10.2	-0.7
0.9	±1.2	-48.9	+0.0	-14.9	-73.8	-5.8	-	+141.8	+3.3

* 相对偏差由表 3 误差范围算出

由表可见其它文献结果分布在本文结果周围, 本文结果与文献[11,12,15]发表结果相对误差绝对值在千分之五以内(当 $R \leq 0.95$)。内方外圆同轴线(表 6)当 $R = 0.7$ 时, 各文献报道的数据间差异很大, 由于本文误差范围计算的严格性, 相信是精度最高的。

5 结 论

优化模拟镜象法解同轴线特性阻抗适用面广、计算量小、精确度高。结合保角变换后计算量进一步减小, 并能克服原来模拟镜象法不能解无厚度带形内导体同轴线的缺陷。此法能严格确定误差范围, 因而计算时能控制达到的准确度。

参 考 文 献

[1] Chow Y L, *et al.* Proc. IEEE, 1979, 26(1):123-125.
 [2] 方大纲, 刘次由. 微波理论与技术, 北京: 兵器工业出版社, 1987, 第四章.
 [3] Pan S. IEEE Trans. on MTT, 1988, MTT-36(5):917-921.
 [4] 徐善驾, 等. 电子科学学刊, 1992, 14(4): 396-403.
 [5] Wheeler H A. IEEE Trans. on MTT, 1980, MTT-28(2):73-83.
 [6] 林为干. 电磁场工程, 北京: 人民邮电出版社, 1980, 第一章.
 [7] Gunston M. A. Microwave Transmission Line Impedance Data, New York: Van Nostrand Reinhold, 1972, Chap. 4.
 [8] Oberhettinger F, *et al.* Applications of Elliptic Functions in Physics and Technology. New York: Springer Verlag, 1949.
 [9] 潘生根. 电子学报, 1988, 16(6): 15-20.
 [10] Lin W. IEEE Trans. on MTT, 1982, MTT-30(11):1981-1988.
 [11] Sheshadri T K, Rajaiian K. Proc. IEEE, 1982, 70(1):82-83.

- [12] Riblet H J. IEEE Trans. on MTT, 1983, MTT-31(10): 841—844.
[13] Lin W. IEEE Trans. on MTT, 1985, MTT-33(6):545—555.
[14] 潘生根. 中国科学, 1986, 29(4): 999—1008.
[15] Epele L N, *et al.* Proc. IEEE, 1984, 72(2):223—224.

THE SOLUTION OF THE CHARACTERISTIC IMPEDANCE OF ARBITRARILY SHAPED COAXIAL TRANSMISSION LINES BY USING THE OPTIMIZED SIMULATED IMAGE-CONFORMAL MAPPING METHOD

She Xianye Fang Hanping

(*Nanjing Research Institute of Electronic Technology, Nanjing 210013*)

Abstract A new method, the optimized simulated image method in combination with conformal mapping, is introduced to calculate the characteristic impedance of arbitrarily shaped coaxial transmission lines. It is of small calculating amount and high accuracy, and the error range can also be estimated. The calculating results of the characteristic impedances of nine coaxial lines, such as concentric, eccentric circular inner and square outer conductors, strip inner and circular outer conductors, are tabulated and compared with data from other papers.

Key words Conformal mapping, Optimized simulated image method, Characteristic impedance