

## 导体球涂覆各向异性铁氧体介质电磁散射的解析解

耿友林<sup>①</sup> 吴信宝<sup>②</sup> 官伯然<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(杭州电子科技大学 天线与微波研究所 杭州 310018)

<sup>②</sup>(上海微波技术研究所 上海 200063)

**摘要** 该文用球矢量波函数对各向异性铁氧体介质涂覆导体球的电磁散射解析解开展研究。各向异性铁氧体介质中电磁场的球矢量波函数解可表示成第一、二、三、四类球矢量波函数之和。根据球 Bessel 函数的性质, 可以得出导体球涂覆各向异性铁氧体介质的球矢量波函数解析解。应用铁氧体与自由空间分界面上电磁场切向连续和在导体球面上切向电场等于零的边界条件以及球矢量波函数切向正交性质, 可分别得出铁氧体介质中电磁场和散射场的展开系数。给出了平面波入射情况下的数值计算结果。该文的结果可应用于有关微波器件、天线以及目标特征的分析 and 计算。

**关键词** 球矢量波函数, 铁氧体, 各向异性

中图分类号: TM277

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2006)09-1740-04

## The Analytical Solution to the Electromagnetic Scattering by an Anisotropic Ferrite-Coated Conducting Sphere

Geng You-lin<sup>①</sup> Wu Xin-bao<sup>②</sup> Guan Bo-ran<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(The Institute of Antenna and Microwaves, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

<sup>②</sup>(Shanghai Research Institute of Microwave Technology, Shanghai 200063, China)

**Abstract** The analytical solution of electromagnetic scattering to an anisotropic ferrite-coated conducting sphere by a plane wave is discussed in this paper. It is well known that the electromagnetic fields in three-dimensional ferrite medium and free space can be expressed into spherical vector wave functions of the first, second, third and fourth in ferrite anisotropic medium and isotropic medium. Applying the continue boundary condition of tangential component of electromagnetic fields in the interface between the ferrite anisotropic medium and free space, and the tangential electric field vanishing in the interface of the conducting sphere, the expansion coefficients of electromagnetic fields with spherical vector wave function in ferrite medium and the scattering fields in free space can be derived. The theoretic analysis and numerical result show that when the radius of conducting sphere approaches zero, the present method can be reduced to that of the homogeneous ferrite anisotropic medium. The present method can be applied to the analyses of related microwave devices, antennas and the character of radar targets.

**Key words** Spherical vector wave function, Ferrite medium, Anisotropy

### 1 前言

目前, 铁氧体在微波和毫米波器件(如环行器、绝缘体、开关和移相器)中已经有广泛应用。它的材料特性可以随外加磁场的场强和方向变化的独特性质使得铁磁材料不仅应用在微波集成电路, 而且也应用于天线技术。当不考虑外界磁场的作用时, 铁氧体可退化为一般各向同性介质。在此情况下, 可用 Mie 理论对导体球涂覆各向同性铁氧体介质的电磁散射开展研究<sup>[1]</sup>; 而当考虑到铁氧体是各向异性介质时, 据我们所掌握的文献来看, 只对二维柱涂覆各向异性铁氧体介质开展了研究<sup>[2]</sup>; 在三维情况下, 只对均匀铁氧体介质与电磁场的相互作用开展了研究; 其中分别有基于微分方程的时域有限差分(FDTD)方法<sup>[3,4]</sup>和积分方程的矩量法结合共轭梯

度和傅里叶变换(MOM-CG-FFT)等数值方法<sup>[5]</sup>外, 还有基于本征矢量和傅里叶变换的解析解研究方法<sup>[6,7]</sup>。正如文献[1]中所述, 我们还没有发现电磁场与各向异性铁氧体涂覆导体球的相互作用理论研究和数值计算的结果。

文献[7]基于傅里叶变换和平面波因子展开的基础上, 用本征球矢量波函数对均匀各向异性铁氧体介质开展了理论研究。其数值计算的结果与 MOM-CG-FFT 计算的结果进行了比较, 给出了电大尺寸各向异性铁氧体球电磁散射的数值计算结果。本文在均匀各向异性铁氧体介质本征球矢量波函数解析解的基础上<sup>[7]</sup>, 利用 Bessel 函数的性质, 给出了平面波入射情况下, 用球矢量波函数表示的铁氧体介质涂覆导体球的本征球矢量波函数解析表达式和散射场矢量波函数的解析表达式。利用电磁场切向连续边界条件以及球矢量波函数切向分量的正交性质, 可得出用球矢量波函数展开电磁场的展开系数。理论分析和数值计算的结果表明, 当导体球半径趋

2005-01-06 收到, 2005-05-30 改回  
浙江省自然科学基金(Y104539)和国家自然科学基金(60071025)资助课题

于0时, 该文的结果可退化到均匀各向异性铁氧体球的情况。本文还给出了电大尺寸数值计算的结果。本文的结果可应用于微波器件, 天线以及目标隐身等方面。

本文所取的时间因子为  $\exp(-j\omega t)$ , 在文中略去。

## 2 理论公式

本文所研究的问题如图1所示, 导体球涂覆各向异性铁氧体介质位于自由空间中, 共分成3个区域, 分别为区域0, 自由空间; 区域1, 各向异性铁氧体介质和区域2, 导体球。所选择的坐标系如图1所示, 直角坐标的原点位于导体球的球心, 设外界对铁氧体作用的磁场方向沿正z轴, 各向异性铁氧体球壳的内外半径分别是 $a_2$ 和 $a_1$ , 入射的平面波沿z轴方向入射, 电场的幅度为1, 其极化方向沿正x轴方向。各向异性铁氧体的介电参数为 $\epsilon_0$ (真空中的介电常数), 其相应的磁导率为 $\mu$ , 可表示为<sup>[3-7]</sup>

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & -\mu_2 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3$ 是外界所加磁场、电磁场频率等参数的函数, 具体的表达式可参看文献[2-4]。本文不涉及到具体的函数表达式, 故不再给出其详细的解析表达式。

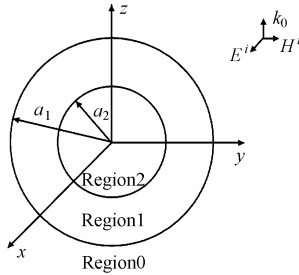


图1 导体球涂各向异性铁氧体介质电磁散射的几何图

Fig.1 Geometry for electromagnetic scattering by an anisotropic ferrite-coated conducting sphere

由 Maxwell 方程组知无源各向异性铁氧体介质(区域1)中磁场所满足的微分方程为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \omega^2 \epsilon_0 \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

由式(2)和Maxwell方程组、傅里叶变换、谱域中的本征矢量<sup>[6,7]</sup>以及用球矢量波函数展开的平面波因子表达式<sup>[8]</sup>, 可得区域1中电磁场解析表达式:

$$\mathbf{E} = \sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{m m'} F_{m n' q}^{(l)} \int_0^\pi \left[ A_{m n q}^e \mathbf{M}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) + B_{m n q}^e \mathbf{N}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) + C_{m n q}^e \mathbf{L}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) \right] \cdot P_n^m(\cos \theta_k) k_q^2 \sin \theta_k d\theta_k \quad (3a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{m m'} F_{m n' q}^{(l)} \int_0^\pi \left[ A_{m n q}^h \mathbf{M}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) + B_{m n q}^h \mathbf{N}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) + C_{m n q}^h \mathbf{L}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k_q) \right] \cdot P_n^m(\cos \theta_k) k_q^2 \sin \theta_k d\theta_k \quad (3b)$$

在式(3a)和(3b)中,  $n'$ 和 $n$ 是从0到 $+\infty$ 的求和,  $m$ 是从 $-n$ 到 $n$

的求和, 在球坐标系中,  $\mathbf{k}$ 矢量的方向为 $(\theta_k, \phi_k)$ , 而 $\mathbf{r}$ 矢量的方向为 $(\theta, \Phi)$ 。 $\mathbf{M}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k)$ ,  $\mathbf{N}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k)$ 和 $\mathbf{L}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k)$ 为第 $l$ 类球矢量波函数, 它们是<sup>[6-8]</sup>

$$\mathbf{M}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k) = z_n^{(l)}(kr) \left[ im \frac{P_n^m}{\sin \theta} e^{im\phi} \hat{\theta} - \frac{dP_n^m}{d\theta} e^{im\phi} \hat{\phi} \right] \quad (4a)$$

$$\mathbf{N}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k) = n(n+1) \frac{z_n^{(l)}(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \hat{r} + \frac{1}{kr} \frac{d(rz_n^{(l)}(kr))}{dr} \left[ \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\theta} + im \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\phi} \right] e^{im\phi} \quad (4b)$$

$$\mathbf{L}_{m n}^{(l)}(\mathbf{r}, k) = \frac{dz_n^{(l)}(kr)}{dr} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \hat{r} + \frac{z_n^{(l)}(kr)}{r} \left[ \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \hat{\theta} + im \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \hat{\phi} \right] e^{im\phi} \quad (4c)$$

$z_n^{(l)}(x)$ 为第 $l$ 类 $n$ 阶球 Bessel 函数, 分别为 $j_n(x)$ ,  $y_n(x)$ ,  $h_n^{(1)}(x)$ 和 $h_n^{(2)}(x)$  ( $l=1,2,3,4$ ),  $P_n^m(x)$ 是连带 Legendre 函数,  $k_q$  ( $q=1,2$ ) 是各向异性铁氧体介质的本征值,  $A_{m n q}^e, B_{m n q}^e, C_{m n q}^e$ 和 $A_{m n q}^h, B_{m n q}^h, C_{m n q}^h$ 是铁氧体介质中用球矢量波函数展开的电磁场的系数, 在文献[7]中已经给出, 由于篇幅所限, 本文中不再给出其详细的表达式, 如文献[7]一样, 电磁场的展开系数 $F_{m n q}^{(l)}$  ( $q=1,2; l=1,2$ )为待求量, 由边界条件确定。

从各向异性铁氧体介质中电磁场的表达式(3a), (3b)可以看出, 当导体球的半径趋向于0时, 而在原点处的电磁场为有限值可知, 此时的 $F_{m n' q}^{(2)}$ 应等于0, 即此时退化到均匀铁氧体球电磁散射的形式, 与文献[7]中的结果相同。

由文献[7,8]知, 此时的入射波可展开成如下的形式(用上标 $i$ 表示)

$$\mathbf{E}^i = \sum_{m n} [\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}] \left[ a_{m n}^x \mathbf{M}_{m n}^{(1)}(\mathbf{r}, k_0) + b_{m n}^x \mathbf{N}_{m n}^{(1)}(\mathbf{r}, k_0) \right] \quad (5a)$$

$$\mathbf{H}^i = \frac{k_0}{i\omega\mu_0} \sum_{m n} [\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}] \left[ a_{m n}^x \mathbf{N}_{m n}^{(1)}(\mathbf{r}, k_0) + b_{m n}^x \mathbf{M}_{m n}^{(1)}(\mathbf{r}, k_0) \right] \quad (5b)$$

在式(5a)与式(5b)中, 有以下表达式:

$$a_{m n}^x = \begin{cases} i^{n+1} \frac{2n+1}{2n(n+1)}, & m=1 \\ i^{n+1} \frac{2n+1}{2}, & m=-1 \end{cases}, \quad b_{m n}^x = \begin{cases} i^{n+1} \frac{2n+1}{2n(n+1)}, & m=1 \\ -i^{n+1} \frac{2n+1}{2}, & m=-1 \end{cases}, \quad (6)$$

$$\delta_{s,l} = \begin{cases} 1, & s=l \\ 0, & s \neq l \end{cases}$$

根据所取的时间因子和辐射条件, 散射场可表示为(上标用 $s$ 表示)

$$\mathbf{E}^s = \sum_{m n} \left[ A_{m n}^s \mathbf{M}_{m n}^{(3)}(\mathbf{r}, k_0) + B_{m n}^s \mathbf{N}_{m n}^{(3)}(\mathbf{r}, k_0) \right] \quad (7a)$$

$$\mathbf{H}^s = \frac{k_0}{i\omega\mu_0} \sum_{m n} \left[ A_{m n}^s \mathbf{N}_{m n}^{(3)}(\mathbf{r}, k_0) + B_{m n}^s \mathbf{M}_{m n}^{(3)}(\mathbf{r}, k_0) \right] \quad (7b)$$

$A_{mn}^s, B_{mn}^s$  是散射场的展开系数, 为待求量。到此, 我们得到了导体球涂覆各向异性铁氧体介质的本征球矢量波函数的解析表达式。下面我们利用边界条件和球矢量波函数的切向正交条件, 求出各向异性铁氧体介质中电磁场和散射场的展开系数。

在  $r=a_1$  和  $r=a_2$  时有以下的边界条件

$$\mathbf{E}^i|_r + \mathbf{E}^s|_r = \mathbf{E}|_r, \quad \mathbf{H}^i|_r + \mathbf{H}^s|_r = \mathbf{H}|_r, \quad r = a_1 \quad (8a)$$

$$\mathbf{E}|_r = 0, \quad r = a_2 \quad (8b)$$

分别将各向异性铁氧体介质中的电磁场、入射电磁场和散射电磁场的球矢量波函数的表达式代入上面的两式中, 利用球矢量波函数切向分量的正交性, 再经过一系列的数学变换, 可得铁氧体介质本征函数的展开系数满足以下代数方程组:

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{n'=0}^{\infty} F_{mn'q}^{(l)} \int_0^{\pi} \left\{ A_{mnq}^e \frac{1}{k_0 r} \frac{d}{dr} [rh_n^{(l)}(k_0 r)] z_n^{(l)}(k_q r) - \frac{i\omega\mu_0}{k_0} \cdot \left[ B_{mnq}^h \frac{1}{k_q r} \frac{d}{dr} [rh_n^{(l)}(k_q r)] + C_{mnq}^h \frac{z_n^{(l)}(k_q r)}{r} \right] \cdot h_n^{(l)}(k_0 r) \right\}_{r=a_1} \cdot P_{n'}^m(\cos\theta_k) k_q^2 \sin\theta_k d\theta_k = [\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}] a_{mn}^x \frac{i}{(k_0 a_1)^2} \quad (9a)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{n'=0}^{\infty} F_{mn'q}^{(l)} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{i\omega\mu_0}{k_0} A_{mnq}^h \frac{1}{k_0 r} \frac{d}{dr} [rh_n^{(l)}(k_0 r)] z_n^{(l)}(k_q r) - \left[ B_{mnq}^e \frac{1}{k_q r} \frac{d}{dr} [rh_n^{(l)}(k_q r)] + C_{mnq}^e \frac{z_n^{(l)}(k_q r)}{r} \right] \cdot h_n^{(l)}(k_0 r) \right\}_{r=a_1} \cdot P_{n'}^m(\cos\theta_k) k_q^2 \sin\theta_k d\theta_k = [\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}] b_{mn}^x \frac{i}{(k_0 a_1)^2} \quad (9b)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{n'=0}^{\infty} F_{mn'q}^{(l)} \int_0^{\pi} A_{mnq}^e z_n^{(l)}(k_q a_2) P_{n'}^m(\cos\theta_k) k_q^2 \sin\theta_k d\theta_k = 0 \quad (9c)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{n'=0}^{\infty} F_{mn'q}^{(l)} \int_0^{\pi} \left[ B_{mnq}^e \frac{1}{k_q r} \frac{d}{dr} [rh_n^{(l)}(k_q r)] + C_{mnq}^e \frac{z_n^{(l)}(k_q r)}{r} \right]_{r=a_2} \cdot P_{n'}^m(\cos\theta_k) k_q^2 \sin\theta_k d\theta_k = 0 \quad (9d)$$

由式(9)可求出导体球涂覆各向异性铁氧体介质的铁氧体介质中用本征球矢量波函数表示的电磁场展开系数, 进而可求出散射场的散射系数, 最后可得出导体球涂覆各向异性铁氧体介质的雷达散射截面。

### 3 数值计算的结果及讨论

在这一部分, 我们对前一节所推导的公式开展数值计算, 数值计算主要计算平面波入射情况下, 导体球涂覆各向异性铁氧体介质的雷达散射截面。为了验证本文理论和数值计算结果的正确性, 我们计算了当导体球半径趋于 0 时, 即取导体球的电尺寸为  $k_0 a_2 = 0.0001\pi$ , 计算的结果如图 2 所

示, 此时的  $k_0 a_1 = 0.2\pi$ , 铁氧体的磁参数取  $\mu_1 = 5\mu_0, \mu_2 = i\mu_0$  和  $\mu_3 = 7\mu_0$ , 图中的实线为本文计算的结果, ■是文献[7]中图 2 的结果, 此时式(9)中  $n'$  和  $n$  取的最大值为 4。由该图可以看出, 当导体球半径趋于 0 时, 涂覆各向异性铁氧体介质的计算结果和均匀铁氧体球的计算结果符合得较好, 说明了本文的理论模型和所编写的 Fortran 计算程序的正确性。在此基础上, 本文分别计算了中等电尺寸和电大尺寸的铁氧体介质涂覆金属球的雷达截面, 具体数值计算如图 3, 图 4 所示。这些结果在现有文献中未见报道。

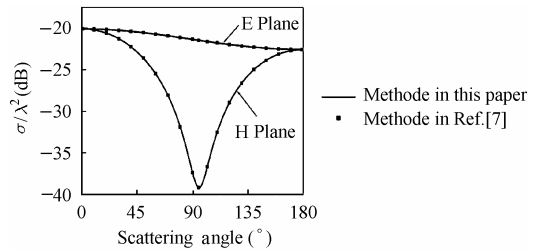


图2 电小尺寸的铁氧体介质球涂覆金属球的雷达截面  
Fig.2 RCSs of small electric size of ferrite-coated conducting sphere

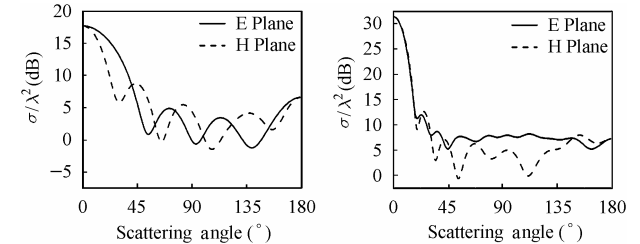


图3 中等电尺寸的铁氧体介质球涂覆金属球的雷达截面  
Fig.3 RCSs of middle electric size of ferrite-coated conducting sphere

图 3 的数值计算的具体参数如下: 铁氧体介质的外内电尺寸分别为:  $k_0 a_1 = 2\pi$  和  $k_0 a_2 = 1.6\pi$ , 其磁参数为  $\mu_1 = (2 + 0.2i)\mu_0, \mu_2 = i\mu_0$  和  $\mu_3 = (4 + 0.4i)\mu_0$ 。此时式(9)中  $n'$  和  $n$  取的最大值为 12, 图中的实线为电场(E)面, 而虚线为磁场(H)面。

图4的数值计算的具体参数如下: 铁氧体介质的外内电尺寸分别为:  $k_0 a_1 = 3.6\pi$  和  $k_0 a_2 = 2\pi$ , 其磁参数为  $\mu_1 = (4 + 0.2i)\mu_0, \mu_2 = 0.5i\mu_0$  和  $\mu_3 = (2 + 0.1i)\mu_0$ 。此时式(9)中  $n'$  和  $n$  取的最大值为 20, 图中的实线为电场(E)面, 而虚线为磁场(H)面。

由这 3 个图的计算结果可得出以下结论:

- (1) 在导体球半径趋向于 0 时, 数值计算的结果与均匀铁氧体球计算的结果具有良好的一致性;
- (2) 数值计算时所取的项数随着电尺寸的增加而增大, 所得的雷达散射截面上下震荡的宽度也随之有所增加。所有的计算时间在 P-4 微机上的时间不到 2 min;
- (3) 前向(散射角为 0°)的雷达散射截面总是大于后向(散射角为 180°)的雷达散射截面;
- (4) 随着电尺寸的增大, E 面和 H 面都有震荡现象, 电

尺寸越大, 振荡的峰和谷越多, 这说明随着电尺寸的增加, 导体球涂覆各向异性铁氧体介质的散射截面所包含散射体本身的信息越多。

#### 4 结束语

本文是文献[7]的近一步的扩展, 是在我们以前所做工作的基础上, 利用单层各向异性铁氧体球电磁散射的解析解, 应用 Bessel 函数的性质、辐射条件和电磁场切向连续的边界条件, 导出了平面波入射情况下导体球涂覆各向异性铁氧体介质的本征球矢量解析表达式。理论分析和数值计算的结果表明, 当导体球的半径趋向于 0 时, 该文的模式可退化到均匀各向异性铁氧体球的情况。这说明了本文的理论和所编的 Fortran 程序是正确的。用此方法进一步能够推导出径向不均匀各向异性铁氧体介质涂覆导体球、具有特定波阻抗的导体球涂覆各向异性铁氧体的电磁散射情形。所有的这些已被作者考虑, 将在另外的文章中发表。

#### 参 考 文 献

- [1] Richmond J H. Scattering by a ferrite-coated conducting sphere. *IEEE Trans. on AP*, 1987, AP-35(1): 73-79.
  - [2] Eaves R E. Electromagnetic scattering from a conducting circular cylinder covered with a circumferentially magnetized ferrite. *IEEE Trans. on AP*, 1976, AP-24(2): 190-197.
  - [3] Yung E K N, Zhang D G, Wong R S K. A novel waveguide Y-junction circulator with a ferrite sphere for millimeter waves. *IEEE Trans. on MTT*, 1996, MTT-44(3): 454-456.
  - [4] Chen R, Yung E K N, Xie X M, Wang Y. FDTD analysis of EW wave circulating by a magnetized ferrite body in free space. *Int. J. of Infrared and Millimeter Waves*, 1998, 19(2): 329-341.
  - [5] 朱秀芹, 耿友林, 吴信宝. 三维磁各向异性目标电磁散射的 MOM-CGM-FFT方法. *微波学报*, 2002, 18(3): 7-13.
  - [6] Ren W. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media. *Phys. Rev. E*, 1993, 47(1): 664-673.
  - [7] Geng Y L, Wu X B. A plane electromagnetic wave scattering by a ferrite sphere. *J. of Electromagnetic Waves and Applications*, 2004, 18(2): 161-179.
  - [8] Sarkar D, Halas N J. General vector basis function of Maxwell's equations. *Phys. Rev. E*, 1997, 56(1): 1102-1112.
- 耿友林: 男, 1966年生, 高级工程师, 在职博士生, 电子学会高级会员, 目前主要从事电磁场理论和电子技术教学和科研工作。
- 吴信宝: 男, 1965年生, 博士, 研究员, 所长. 主要研究方向为复杂介质中电磁波传播、计算电磁学、散射以及天线等. 现为中国电子学会会士, IEEE 高级会员, 美国纽约科学院院士。
- 官伯然: 男, 1955年生, 博士, 教授, 博士生导师, 校长助理, 目前主要从事微波通信与天线、超导电子学等方面的技术工作。