

约束和非约束频域分组 LMS 自适应滤波器的快速算法¹

何汉翔 尹俊勋 欧阳景正

(华南理工大学电子与通信工程系 广州 510641)

摘要 本文通过将约束和非约束频域分组 LMS 算法的权值迭代方程转换成时域方程, 利用最小二乘法 (LS) 分别选取最优时变步长收敛因子, 得到频域最佳分组算法 (FOBA) 和非约束频域最佳分组算法 (UFOBA), 虽然增加了计算量, 但计算机仿真结果表明: 提高了收敛速度和精度, 算法稳定可靠。

关键词 自适应信号处理, LMS 算法, 收敛因子

中图分类号 TN911.7

1 引言

自从 B.Widrow 提出 LMS 算法并成功应用于自适应系统以来, 人们对该算法做了大量的研究工作。分组 LMS(BLMS) 算法^[1] 每处理一组数据, 权值才改变一次, 有效地提高了收敛速度, 并减少了计算量, 由于 BLMS 算法的输出和梯度分别是线性卷积和线性相关函数的运算, 可用快速傅里叶变换 (FFT) 实现。利用 FFT 变换和重叠保留法, Ferrara 提出了频域分组 LMS 算法 (FBLMS)^[2]。为了进一步减少计算量, Mansour 和 Gray 提出非约束频域分组 LMS 算法 (UFBLMS)^[3]。

收敛因子控制了算法的收敛速度和稳定性。Mikhael 等人对 BLMS 算法进行改进, 利用最小二乘法 (LS) 选取最优时变步长收敛因子, 得到最优分组算法 (OBA)^[4], 并将这个最优时变步长收敛因子推广应用于 FBLMS 算法, 得出频域最优分组算法 (FOBA)^[5], 提高了收敛速度。本文分别通过将 FBLMS、UFBLMS 算法的在频域上的权值迭代方程转换成时域方程, 然后利用最小二乘法分别选取最优收敛因子, 对于 FBLMS 算法所得到的收敛因子与 FOBA 算法的收敛因子完全一样, 而对于 UFBLMS 算法, 采用所得到的最优收敛因子, 也大大地提高了收敛的速度和精度, 且称为非约束频域最优分组算法 (UFOBA)。

2 FBLMS 和 UFBLMS 算法

在本节简单地概括约束和非约束的 FBLMS 算法, 详细的讨论见文献 [2,3,6], 两种算法的结构见图 1。文中频域变量与时域变量分别用大、小写字母表示。

输入信号 x_k 、 X_k 分别是

$$x_k = [x(KN)x(KN+1)\cdots x(KN+N-1)]^T, \quad (1)$$

$$X_k = \text{diag}\{F[x_{k-1}^T, x_k^T]^T\} \\ = \text{diag}\{F[x(KN-N)x(KN-N+1)\cdots x(KN+N-1)]^T\}, \quad (2)$$

¹ 1997-03-31 收到, 1997-09-23 定稿

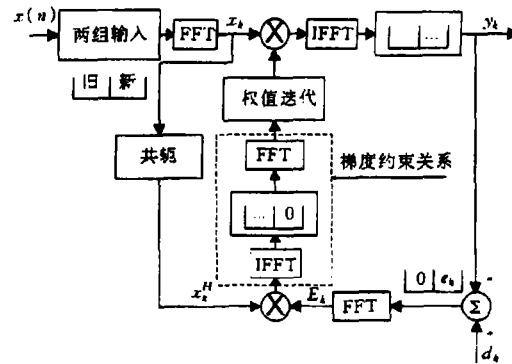


图1 FBLMS 和 UFBLMS 算法结构

X_k 是对角矩阵; F 表示 $2N \times 2N$ 阶矩阵, 其元素 $F_{mn} = \exp(-i(2\pi/2N)mn)$, $m, n = 0, 1, \dots, 2N-1$. i 为 -1 的平方根; N 维的时域权矢量通过补充 N 个 0 变为 $2N$ 维矢量, 即有

$$w_k = \left[w_k(0)w_k(1)\cdots w_k(N-1) \overbrace{0\cdots 0}^N \right]^T. \quad (3)$$

在频域上权矢量 W_k 为

$$W_k = Fw_k. \quad (4)$$

在频域上的每组输出 Y_k 为

$$Y_k = X_k W_k. \quad (5)$$

在时域上的每组输出 y_k 是 $F^{-1}Y_k$ 的下半部分元素。

定义

$$e d_k = \left[\overbrace{0\cdots 0}^N \overbrace{d(KN)d(KN+1)\cdots d(KN+N-1)}^{d_k} \right]^T, \quad (6)$$

$$e y_k = \left[\overbrace{0\cdots 0}^N y_k^T \right]^T, \quad (7)$$

$$e_k = d_k - y_k. \quad (8)$$

在频域上的每组误差信号 E_k 为

$$E_k = F(e d_k - e y_k). \quad (9)$$

梯度 $\nabla_k = F^{-1}X_k^H E_k$ 的上半部分元素, 时域权矢量补充了 N 个 0, 梯度矢量同样要补充 N 个 0, 因而约束的 FBLMS 算法的权值迭代方程是

$$W_{k+1} = W_k + 2u_k F(\nabla_k^T \overbrace{0\cdots 0}^N)^T, \quad (10)$$

u_k 是收敛因子。非约束的 FBLMS 算法由约束的 FBLMS 算法去掉约束条件而得来的。其权值的迭代方程是

$$W_{k+1} = W_k + 2u_k X_k^H E_k. \quad (11)$$

3 最优变步长收敛因子

为了区别 FBLMS 和 UFBLMS 算法, 分别在变量符号的左下脚加上 c 与 u , 内积用 \langle, \rangle 表示, 并定义两个矩阵 g 和 \tilde{g} 为

$$g = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

式中 I 表示 $N \times N$ 阶单位矩阵, 0 表示 $N \times N$ 阶零矩阵。则 (9) 式变为

$$E_k = F(ed_k - ey_k) = D_k - FgF^{-1}X_k W_k. \quad (13)$$

由 (10)、(11)、(13) 式可得到

$${}_c W_{k+1} = {}_c W_k + 2u_k FgF^{-1}X_k^H [D_k - F\tilde{g}F^{-1}X_{kc}W_k], \quad (14)$$

$${}_u W_{k+1} = {}_u W_k + 2u_k X_k^H [D_k - F\tilde{g}F^{-1}X_{ku}W_k]. \quad (15)$$

将 (14)、(15) 式转换成时域方程, 即分别在方程两边左乘 F^{-1} 得到

$${}_c w_{k+1} = {}_c w_k + 2u_k g \chi_k^H (ed_k - \tilde{g} \chi_k {}_c w_k), \quad (16)$$

$${}_u w_{k+1} = {}_u w_k + 2u_k \chi_k^H (ed_k - \tilde{g} \chi_k {}_u w_k), \quad (17)$$

其中, χ_k 是循环矩阵^[7], 其值为

$$\chi_k = F^{-1}X_k F = \begin{bmatrix} x(kN - N) & x(kN + N - 1) & \cdots & x(kN - N + 2) & x(kN - N + 1) \\ x(kN - N + 1) & x(kN - N) & \cdots & x(kN - N + 3) & x(kN - N + 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(kN + N - 2) & x(kN + N - 3) & \cdots & x(kN - N) & x(kN + N - 1) \\ x(kN + N - 1) & x(kN + N - 2) & \cdots & x(kN - N + 1) & x(kN - N) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

(16) 式中权矢量 ${}_c w_k$ 的下半部分和 ed_k 的上半部分元素都为零, 去掉这部分为零的元素, (16) 式变为

$${}_c w_{k+1} = {}_c w_k + 2u_k {}_c \chi_k^H (d_k - {}_c \chi_k {}_c w_k) = {}_c w_k + 2u_k {}_c \chi_k^H e_k, \quad (19)$$

${}_c \chi_k$ 是矩阵 χ_k 左下角的 $N \times N$ 阶矩阵。同样 (17) 式也可变为

$${}_u w_{k+1} = {}_u w_k + 2u_k {}_u \chi_k^H (d_k - {}_u \chi_k {}_u w_k) = {}_u w_k + 2u_k {}_u \chi_k^H e_k, \quad (20)$$

${}_u \chi_k$ 是矩阵 χ_k 下半部分的 $N \times 2N$ 阶矩阵。为了推出最优收敛因子, 先求得误差信号与收敛因子的函数关系。 $k+1$ 时刻的误差信号可在 k 时刻用泰勒级数展开。对于 FBLMS 算法, 有

$$\begin{aligned}
 e_{k+1}(l) &= e_k(l) + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\partial e_k(l)}{\partial {}_c w_k(m)} \Delta {}_c w_k(m) + \\
 &\frac{1}{2!} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial^2 e_k(l)}{\partial {}_c w_k(m) \partial {}_c w_k(n)} \Delta {}_c w_k(m) \Delta {}_c w_k(n) + \dots, \\
 &l = 0, 1, \dots, N-1,
 \end{aligned} \tag{21}$$

式中 $\Delta {}_c w_k(m) = {}_c w_{k+1}(m) - {}_c w_k(m)$. 略去高阶无穷小, (20) 式变为

$$e_{k+1}(l) = e_k(l) + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\partial e_k(l)}{\partial {}_c w_k(m)} \Delta {}_c w_k(m), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \tag{22}$$

用矩阵形式可表示为

$$e_{k+1} = e_k - c\chi_k \Delta {}_c w_k. \tag{23}$$

由 (19) 式可得到

$$\Delta {}_c w_k = 2u_k c\chi_k^H e_k = 2u_k c\chi_k^T e_k. \tag{24}$$

所以有

$$e_{k+1} = e_k - 2u_k c\chi_k c\chi_k^T e_k. \tag{25}$$

为了得到最优收敛因子, 误差信号的平方和取最小值需满足

$$\partial [e_{k+1}^T \cdot e_{k+1}] / \partial u_k = 0. \tag{26}$$

可推出

$$u_k^o = \frac{e_k^T c\chi_k c\chi_k^T e_k}{2 e_k^T c\chi_k c\chi_k^T c\chi_k c\chi_k^T e_k} = \frac{\langle a, a \rangle}{2 \langle b, b \rangle}, \tag{27}$$

式中令 $a = c\chi_k^T e_k$, $b = c\chi_k c\chi_k^T e_k$. 利用分块矩阵的运算规则和 (13)、(18) 式, 可以容易地得出

$$a = F^{-1} X_k^H E_k \text{ 的上半部分元素.} \tag{28}$$

令 $G_k = F[a^T \overbrace{0 \dots 0}^N]^T$, 亦可以得出

$$b = F^{-1} X_k^H G_k \text{ 的下半部分元素.} \tag{29}$$

所得出的收敛因子与文献 [5] 中的收敛因子完全一样. 采用这个收敛因子的 FBLMS 算法就是频域最优分组算法 (FOBA). 对于 UFBLMS 算法, 同样可以得到

$$u_k^o = \frac{e_k^T u\chi_k u\chi_k^T e_k}{2 e_k^T u\chi_k u\chi_k^T u\chi_k u\chi_k^T e_k} = \frac{\langle a, a \rangle}{2 \langle b, b \rangle}, \tag{30}$$

式中令 $a = u\chi_k^T e_k, b = u\chi_k u\chi_k^T e_k$ 。且

$$a = F^{-1}X_k^H E_k, \quad b = F^{-1}X_k X_k^H E_k \text{ 的下半部分元素。} \quad (31)$$

采用这个收敛因子的 UFBLMS 算法称为非约束频域最优分组算法 (FOBA)。

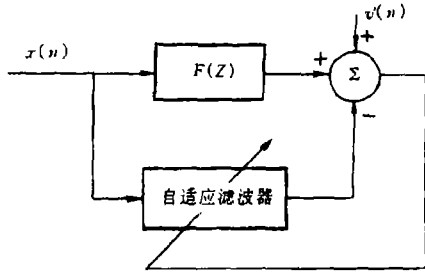


图 2 自适应系统辨识模型

4 试验仿真结果

图 2 是系统辨识模型。加性白噪声信号 $v'(n)$ 是均值为零, 方差为 10^{-6} 的高斯白噪声序列, 待辨识系统的传输函数 $F(z)$ 为

$$F(z) = 0.157 + 0.3281z^{-1} + 0.1147z^{-2} + 0.0980z^{-3} + 0.0838z^{-4} + 0.716z^{-5} + 0.0612z^{-6} + 0.0523z^{-7}. \quad (32)$$

均方误差 $MSE^{[1]}$ 定义为

$$MSE = \frac{1}{N} E[e_k^T e_k] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e_k^2(m) \right]. \quad (33)$$

图 3(a) 的输入信号 $x(n)$ 是

$$x(n) = 0.1 \cos[\pi n/15] + \cos[5\pi n/16] + v(n). \quad (34)$$

(34) 式中 $v(n)$ 是均值为零、方差为 1.0 的高斯白噪声信号且与加性白噪声信号 $v'(n)$ 互不相关。图 3(b) 的输入信号是白噪声信号 $v(n)$ 通过带通滤波器 T_{BP} 产生的有色噪声, 其中:

$$T_{BP} = 1 - 0.9375z^{-2} + 0.3281z^{-4} + 0.0244z^{-6}. \quad (35)$$

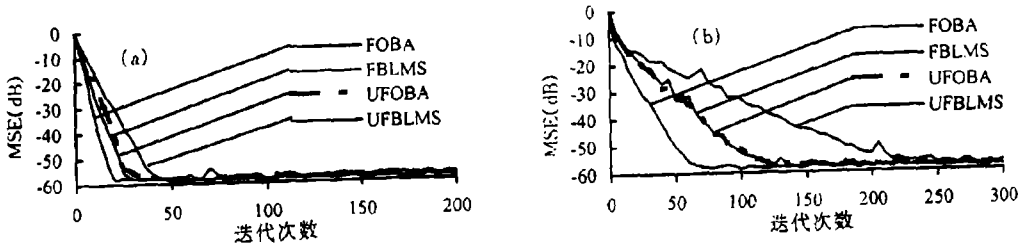


图 3 FOBA、FBLMS、UFOBA 和 UFOBA 算法的收敛特性, $N = 8$

(a) FBLMS 和 UFBLMS 的收敛因子分别取 0.039, 0.027

(b) FBLMS 和 UFBLMS 的收敛因子分别取 0.025, 0.016

对于 FBLMS、UFBLMS 算法, 经过反复实验选取收敛因子, 使其最快捷、稳定地收敛。从图 3 可以看出: FOBA 算法的收敛速度最快, 稳定性最好, UFBLMS 算法在迭代过程中易出现“环绕”误差^[7], 因而波动较大, UFOBA 算法克服了这个缺陷, 并提高了收敛速度。UFOBA 算法同 FBLMS 算法的收敛速度相近, 但稳定性好于后者。

5 结 论

本文在 FBLMS、UFBLMS 算法的基础上, 利用最小二乘法选取最优时变步长收敛因子得到 FOBA 算法并提出 UFOBA 算法。这两种算法的性能明显优于 FBLMS 和 UFBLMS 算法, 特别是 UFOBA 算法克服了 UFBLMS 算法不稳定的缺陷, 具有较好的理论和实用价值。

参 考 文 献

- [1] Clark G A, Mitra S K. Block implementation of digital filters. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1981, CAS-28(3): 584-592.
- [2] Ferrara E R. Fast implementation of LMS adaptive filters. *IEEE Trans on Acoust. Speech. Sig. Proc*, 1980, ASSP-28(4): 474-475.
- [3] Mansour D, Gray J. Unconstrained frequency-domain adaptive filter. *IEEE Trans on Acoust. Speech. Sig. Proc*, 1982, ASSP-30(5): 726-734.
- [4] Mikhael W B, Hu F H. Fast algorithms for block FIR adaptive digital filtering. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1987, CAS-34(10): 1152-1160.
- [5] Mikhael W B, Spanias A S. A fast frequency-domain adaptive algorithm. *Proc. IEEE* 1988, 76(1):80-82.
- [6] Shynk J J. Frequency-domain and multi-rate adaptive filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1992, 9(1): 14-37.
- [7] Li X H, Jankins W K. The comparison of the constrained and unconstrained frequency-domain block-LMS adaptive algorithms. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1996, 44 (7): 1813-1816.

FAST ALGORITHMS FOR THE CONSTRAINED AND UNCONSTRAINED FREQUENCY DOMAIN BLOCK-LMS ADAPTIVE FILTERS

He Hanxiang Yin Junxun Ouyang Jingzheng

(South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract In this paper, the updating equations of FBLMS and UFBLMS algorithms are transformed into the time domain, then two algorithms(FOBA and UFOBA) are presented by employing time-varying convergence factors which are optimized in a least-square(LS) sense respectively. Although FOBA and UFOBA algorithms require a relatively modest increase in computation for each block iteration compared to FBLMS and UFBLMS algorithms respectively, it is shown by simulations that these algorithms improve convergence speed and accuracy of adaptation.

Key words Adaptive signal processing, LMS algorithm, Convergence factor

何汉翔: 男, 1966 年生, 工程师, 从事于信号处理、微电子学等方面的研究.

尹峻勋: 男, 1941 年生, 教授, 从事于信号处理、通信技术等方面的研究.

欧阳景正: 男, 1934 年生, 教授, 从事于自动控制、信号处理等方面的研究.