

分元法与补元法的进一步研究*

胡清兰 单家方
(华北电力学院北京研究生部,北京)

摘要 本文进一步研究了分元法与补元法在平面电路中的应用,导出了分元法广义节点电压方程.比较了分元法、补元法采用点匹配时二者的计算精度,用实例研究了将其用于短路型平面电路中的问题.

关键词 平面电路;分元法;补元法;点匹配;开路边界;短路边界

一、引言

分元法^[1-2]与补元法^[3]都是以 Green 函数用本征函数展开^[4-5]为基础的两种分析平面电路的有效方法,它可将非规则的不能用 Green 函数求解的问题,化归为简单规则形状而可用 Green 函数求解的问题.在分元与补元时,在其分割边界上,其接续处可用点匹配法与模匹配法来实现,由于用点匹配法比用模匹配法容易实现,因此本文采用了点匹配法.到目前为止,人们仅研究了这两种方法用于开路型平面电路的情况,而本文将这两种方法用于短路型平面电路的问题.

二、基本理论与公式

依照文献[3],在图1中定义 α 电路为原平面电路, β 电路为具有 n 块(这里为3块)残缺部分的电路; r 电路则为缺块补齐后的电路; α 具有外端口 p 和互连端口 c , β 具有互

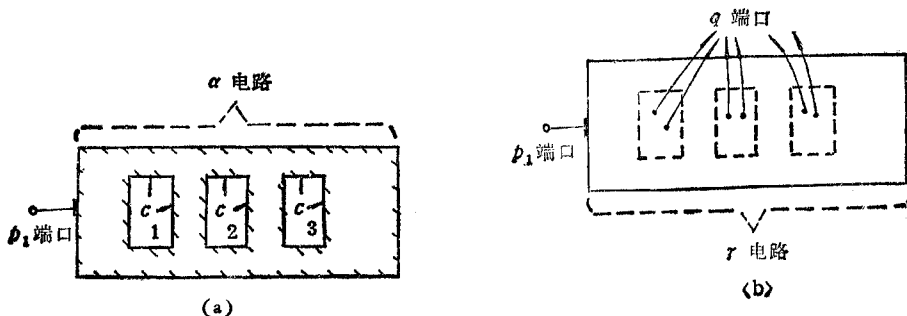


图1 电路的划分
1、2、3 为缺块部分 (β 电路)

* 1987年8月15日收到,1989年5月3日修改定稿.

连端口 d 与内部端口 q, r 具有外部端口 p 与内部端口 q , 于是对应这三种电路, 其端口间的阻抗参数矩阵可分别表示为

$$\mathbf{Z}_\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{pp\alpha} & \tilde{\mathbf{Z}}_{pc} \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{cp} & \tilde{\mathbf{Z}}_{cc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_\beta = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{dd} & \tilde{\mathbf{Z}}_{dq} \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{qd} & \tilde{\mathbf{Z}}_{qq\beta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}_\gamma = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{pp\tau} & \tilde{\mathbf{Z}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{Z}}_{qp} & \tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, 各个矩阵元素对应为端口间阻抗参数子矩阵. 由于 β 网络表示 n 块非连通区域的网络, 并假设任一块区域均能用 Green 函数本征函数求出其阻抗参数矩阵, 这时 β 网络的 $\tilde{\mathbf{Z}}_\beta$ 矩阵以及其它各个阻抗参数子矩阵又可进一步表示为

$$\tilde{\mathbf{Z}}_\beta = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{Z}_{dd_1} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{dq_1} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{Z}_{dd_k} & & \mathbf{Z}_{dq_k} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{Z}_{dd_n} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{Z}_{dq_n} \\ \hline \mathbf{Z}_{qd_1} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{qq\beta_1} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{Z}_{qd_k} & & \mathbf{Z}_{qq\beta_k} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{Z}_{qd_n} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{Z}_{qq\beta_n} \end{array} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{pc} = [\mathbf{Z}_{pc_1}, \dots, \mathbf{Z}_{pc_k}, \dots, \mathbf{Z}_{pc_n}]$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{cp} = [\mathbf{Z}_{c_1p}, \dots, \mathbf{Z}_{c_kp}, \dots, \mathbf{Z}_{c_np}]^T$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{cc} = \text{diag}[\mathbf{Z}_{c_1c_1}, \dots, \mathbf{Z}_{c_kc_k}, \dots, \mathbf{Z}_{c_nc_n}]$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{pq} = [\mathbf{Z}_{pq_1}, \dots, \mathbf{Z}_{pq_k}, \dots, \mathbf{Z}_{pq_n}]$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{qp} = [\mathbf{Z}_{q_1p}, \dots, \mathbf{Z}_{q_kp}, \dots, \mathbf{Z}_{q_np}]^T$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} = \text{diag}[\mathbf{Z}_{q_1q_1r}, \dots, \mathbf{Z}_{q_kq_kr}, \dots, \mathbf{Z}_{q_nq_nr}]$$

这里, 每一个矩阵的矩阵元素对应于 β 网络每一块连通区域的阻抗参数子矩阵. 通过消去 q 端口电压与电流, 并经一系列运算后, 可得到:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_{pp\tau} - \tilde{\mathbf{Z}}_{pq} \cdot [\tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} - \tilde{\mathbf{Z}}_{qq\beta}]^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_{qp} & -\tilde{\mathbf{Z}}_{pq} \cdot [\tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} - \tilde{\mathbf{Z}}_{qq\beta}]^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_{qd} \\ -\tilde{\mathbf{Z}}_{qd} \cdot [\tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} - \tilde{\mathbf{Z}}_{qq\beta}]^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_{qp} & -\tilde{\mathbf{Z}}_{dd} - \tilde{\mathbf{Z}}_{dq} [\tilde{\mathbf{Z}}_{qqr} - \tilde{\mathbf{Z}}_{qq\beta}]^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_{qd} \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样一来, 根据补元法, 在求得 $\tilde{\mathbf{Z}}_\beta$, $\tilde{\mathbf{Z}}_\gamma$ 之后, 便可由(4)式得到 \mathbf{Z}_α . 不过要注意, 如果要使(4)式成立, 必须满足 $Q_k \geq D_k$ (Q_k 为 q 端口的样点个数, D_k 为 d 端口的样点个数, $k=1, 2, \dots, n$)的条件. 但是, 倘若只计算 $\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha$ 中的 $\tilde{\mathbf{Z}}_{pp\alpha}$ 时, 则不受这个条件的限制.

对于复杂形状的平面电路, 用 Green 函数本征函数展开法求解是比较困难的, 但是如果这种复杂的形状能够分割成几个“元电路”而各个元电路的特性很容易由 Green 函数求得, 这时, 可将这复杂形状分割成几个元电路, 对各个元电路分别求解, 然后将这些电路连接起来, 求得整体电路的特性, 这便是分元法(单元电路法). 下面将研究元电路相连时如何求得电路的整体特性问题.

假设网络 s 为待求的一般网络(图 2), 图 2(b) 表示将网络 s 分割成子网络的情况.

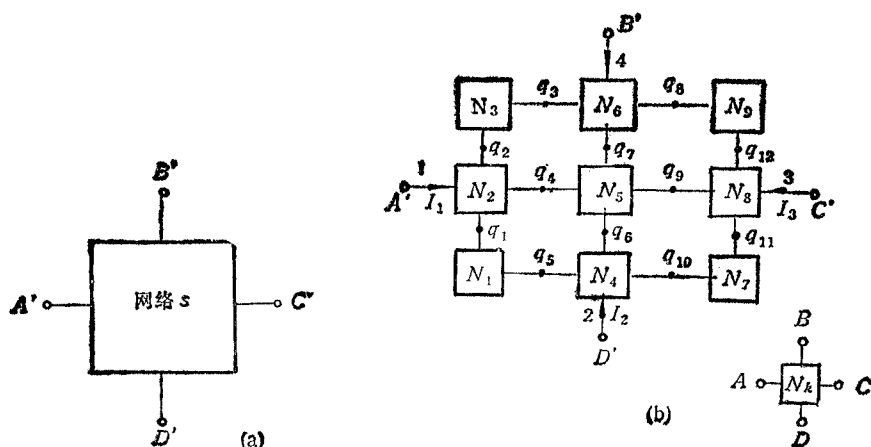


图 2 平面电路分元的一般表示

子网络之间的连线表示网络之间的关联关系。要注意的是，这里的一根线并不表示它们之间只有一个匹配点，而是有多个匹配点，也就是说，在连线之间引入了很多“假想节点”。从平面电路的角度来看， N_1, N_2, \dots, N_9 为“分割”的元电路，“假想节点”为“分割”边界上的点。

对图 2(b) 中任一按图示方法标注 A, B, C, D 标记的元电路 N_k ，其端口电流与电压之间存在以下关系：

$$\begin{bmatrix} I_k^A \\ I_k^B \\ I_k^C \\ I_k^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_k^{AA} & Y_k^{AB} & Y_k^{AC} & Y_k^{AD} \\ Y_k^{BA} & Y_k^{BB} & Y_k^{BC} & Y_k^{BD} \\ Y_k^{CA} & Y_k^{CB} & Y_k^{CC} & Y_k^{CD} \\ Y_k^{DA} & Y_k^{DB} & Y_k^{DC} & Y_k^{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^A \\ V_k^B \\ V_k^C \\ V_k^D \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 Y_k 矩阵为对应元电路 N_k 的导纳矩阵。在各端口 A, B, C 和 D 处，引入有许多假想节点，上式中 I_k^i 和 $V_k^i (i = A, B, C, D)$ 分别代表各端口处节点电流矩阵和节点电压矩阵。对应各端口的节点组，可以列出其节点矩阵方程，例如对外端口（如 A' ，参看图 2）的节点组 1 有

$$I_1 = Y_2^{AA}V_1 + Y_2^{AB}V_{q_2} + Y_2^{AC}V_{q_3} + Y_2^{AD}V_{q_4} \quad (6)$$

对内端口的节点组 q_4 有

$$\begin{aligned} (Y_2^{CC} + Y_5^{AA})V_{q_4} + Y_2^{CA}V_1 + Y_2^{CD}V_{q_1} + Y_2^{CB}V_{q_2} \\ + Y_5^{AD}V_{q_3} + Y_5^{AB}V_{q_1} + Y_5^{AC}V_{q_3} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

通过对节点组 1 和节点组 q_4 的考查，可知对整个网络而言有

$$\begin{bmatrix} I_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{pp} & Y_{pq} \\ Y_{qp} & Y_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_q \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 $I_p = [I_1, I_2, I_3, I_4]^T$, $V_p = [V_1, V_2, V_3, V_4]^T$
 $V_q = [V_{q_1}, V_{q_2}, V_{q_3}, V_{q_4}]^T$,

Y_{pp} 、 Y_{qq} 为自导纳方阵， Y_{pq} 、 Y_{qp} 为互导纳方阵。消去(8)式中的 V_q 可得到外端口电流与电压的关系

$$I_p = YV_p \tag{9}$$

式中 Y 为整体网络的导纳矩阵, 它为

$$Y = Y_{pp} - Y_{pq} Y_{qq}^{-1} Y_{qp} \tag{10}$$

从上面的推导来看, Y 阵的得出并不困难, 问题是计算每个元电路的 Y 参数要一定的时间, 当元电路很多时, 整个平面电路的计算时间较长. 不过这种方法通用性好, 当元电路数目比较少时, 还是十分有效的.

三、在开路边界中的应用分析

1. 计算结果

例 1 补元法与 Green 函数本征函数展开的直接解法的结果比较

以图 3(a) 所示的平面电路形状为例, 用补元法求解, 图 3(a) 中虚线部分为补上去的部分, 实线所表示的为原平面电路的真实形状. 用 Green 函数本征函数展开法计算出 \bar{Z}_β 和 $\bar{Z}_r^{[6-7]}$, 然后由(4)式求得 \bar{Z}_α , 即可得到馈入点 p 处的人端阻抗. 这里计算时没有考虑边缘效应, Green 函数用了 2500 项本征函数展开, 阻抗均用相对值 \bar{z} 来表示, 其计算结果如图 3(b) 所示.

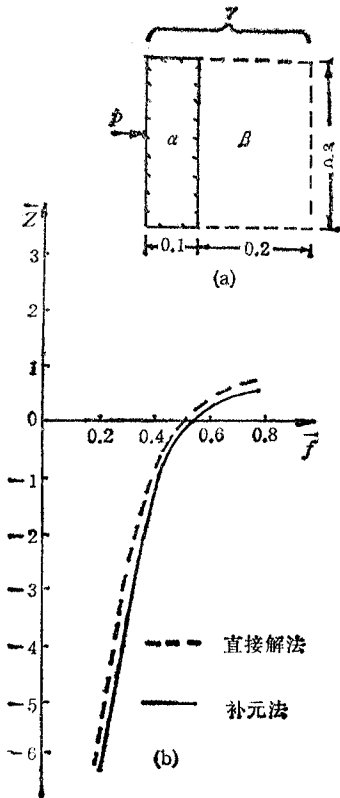


图 3 矩形条计算结果比较
(尺寸为相对尺寸, 频率为归一化值)

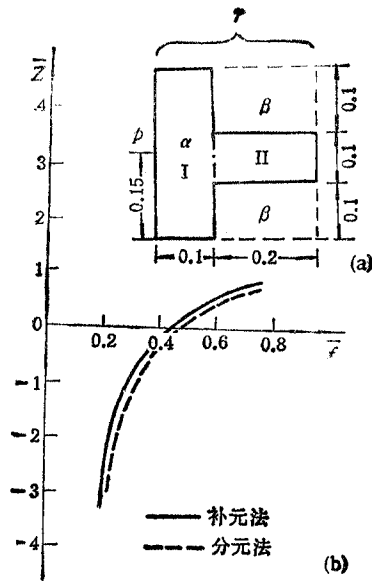


图 4 T形接口计算结果比较

例 2 分元法与补元法的结果比较

以图 4(a) 所示的平面电路为例进行计算, 图中虚线部分是用补元法计算时补的两块的形状, 实线部分所示的则为原平面电路的形状. 分元法是在对图中的点划线 (— · —) “分割” 的两部分 (I 与 II) 分别计算的基础上用 5 个匹配点使之连接起来的. 用分元法与补元法分别计算 p 点的馈入阻抗 \bar{z} (相对值), 其结果示于图 4(b). 其计算框图示于图 5.

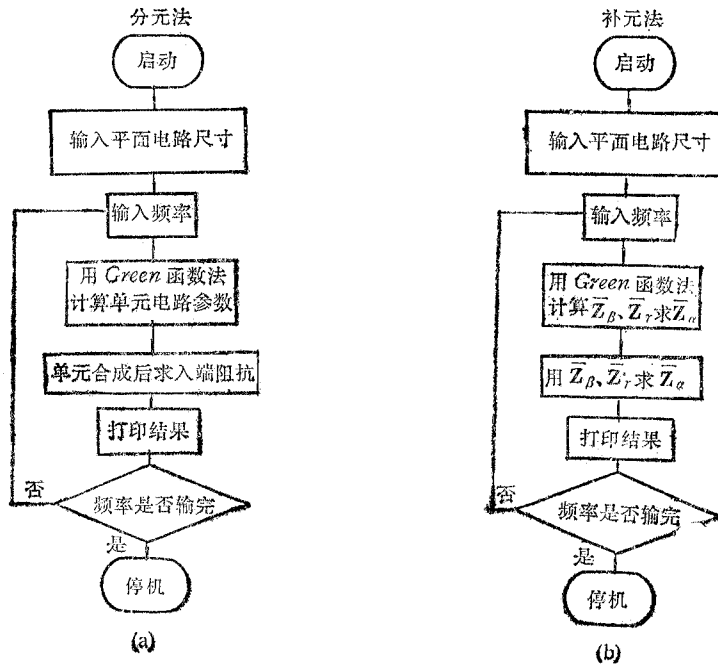


图 5 计算框图

2. 讨论

根据图 3 和图 4 所示的结果可以看出, 用补元法和直接解法以及用分元法所得结果均吻合较好, 其中出现的差异主要是因为只用了有限项的本征函数来逼近 Green 函数造成的, 在例 2 的结果中还因为分元法只用了五个匹配点的缘故.

四、在短路边界中的应用与分析

下面将通过实例来研究分元、补元的点匹配法在短路边界平面电路中的应用问题,

1. 计算结果

例 1 短路边界离散化效应的研究

为了比较在短路边界上用有限个离散取样点的短路与整个边界短路的计算结果, 采用如图 6(a) 所示简单形状的电, 其计算步骤为: (1) 将 $x = 0.5$ 的短路壁去掉, 在这边界上选若干个 (如 7 个) 样点, 用 Green 函数的本征函数展开法求出网络的阻抗矩阵; (2) 令 $x = 0.5$ 边界上的电压为零, 也即令所有离散点短路, 计算 p 端口的馈入点阻抗.

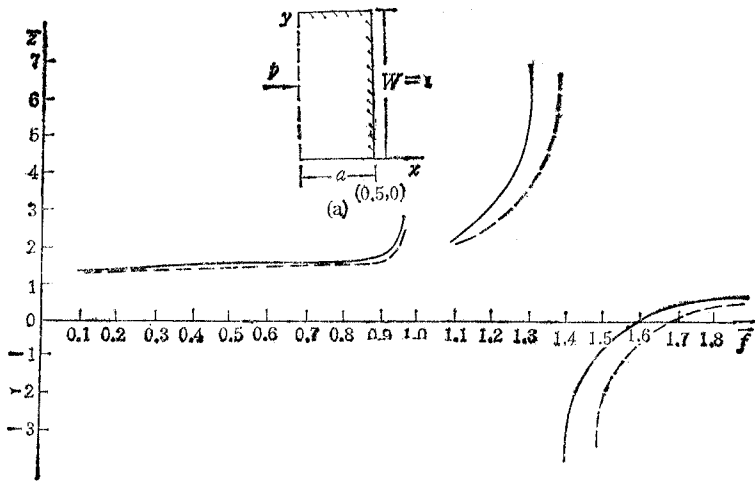


图 6 边界离散短路与整体短路计算结果比较
 ——整个边界短路的计算结果 ---有限个点短路的计算结果

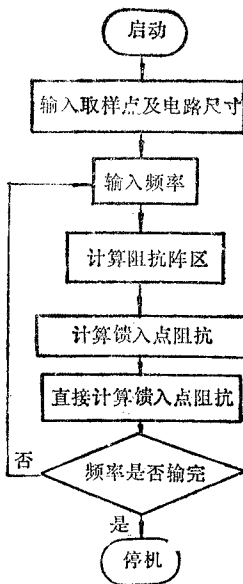


图 7 计算框图

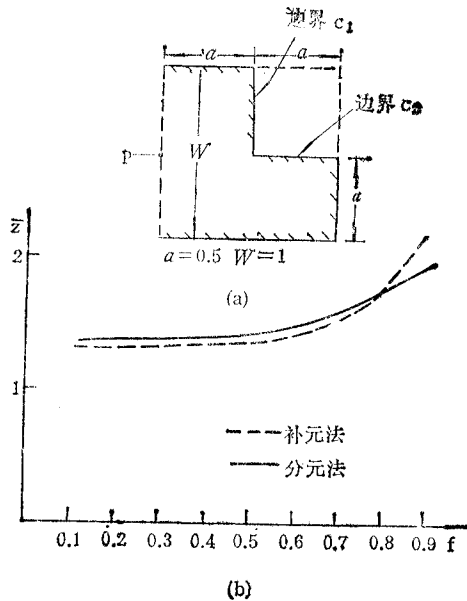


图 8 角形电路补元法计算结果曲线

(3) 计算整个边界短路时的 p 端口的馈入点阻抗, 计算时所采用的方法为 Green 函数本征函数展开法. 图 7 是计算框图, 计算结果如图 8 所示.

例 2 短路边界补元的点匹配法的应用

图 8(a) 所示为一具有短路边界的角形平面电路, 用补元法将其右上部分缺角补齐成一正方形平面电路. 当计算 p 端口的馈入点阻抗时, 其计算步骤为:

(1) 将图 8(a) 的短路边界 c_1 和 c_2 视作开路边界, 补齐缺角部分, 然后将补上去的这块平面电路虚线所示的外边缘取为短路边界, 这样一来, 补齐后的电路便成为边界形状规

则的电路; (2) 计算 Z_a 阻抗矩阵, 令边界 c_1, c_2 上的样点电压为零, 即可求得 p 处的馈入点阻抗, 其计算结果如图 8(b) 虚线曲线所示。

2. 讨论

分析图 6(b) 与图 8(b) 所示的结果可以看出, 在用分元、补元点匹配法计算具有短路边界的平面电路时, 如果频率较低 ($f < 1$), 其误差较小。当频率较高时, 由于只取有限个样点的离散效应的缘故, 误差增大, 特别是在电路的谐振频率 ($f = 1$) 附近, 这种效应尤为突出。不过如果增多所取匹配样点, 这种离散效应的影响将会减弱, 但计算量也将显著增加。

五. 结 论

1. 在分元法中, 点匹配法容易实现, 但精度差; 模匹配法精度高, 但只有在电路形状规则的情况下才能比较容易地实现;

2. 在仅计算 Z_a 中的 Z_{pp} 时, 由于分元法是用有限个匹配点去代替整个线段上的匹配, 因而将造成一定的离散误差, 所以在两种方法都能采用的场合下, 用补元法比用分元法方便, 且精度高;

3. 分元法与补元法可用于具有短路边界的平面电路特性的分析, 但频率较高时, 由于有限个样点的离散化效应, 误差较大, 所以较适用于低频特性的分析。

参 考 文 献

- [1] 大越孝敬, 三好且六著, 王积勤, 杨逢春译, 平面电路, 科学出版社, 1982, pp. 160—163.
- [2] R. Sorrentino, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-33**(1985)10, 1057—1066.
- [3] P. C. Sharma, K. C. Gupta, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981)10, 1094—1097.
- [4] 大越孝敬, 三好且六著, 王积勤, 杨逢春译, 平面电路, 科学出版社, 1982, pp.20—26.
- [5] 单家方, 胡清兰, 电子科学学刊, **11**(1989)2, 144—146.
- [6] A. Benalla, K. C. Gupta, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-34**(1986)6, 733—736.
- [7] R. Chadha, K. C. Gupta, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-29**(1981)1, 71—74.

A FURTHER STUDY OF THE SEGMENTATION AND THE DESEGMENTATION METHODS

Hu Qinglan Shan Jiafan

(Beijing Graduate School of North China Institute of Electric Power, Beijing)

Abstract The applications of the segmentation and the desegmentation methods to the planar circuits, particularly, to the ones with short boundaries, are further studied. In addition, a general node voltage equation of segmentation method for a planar circuit which can be segmented into many segments is derived.

Key words Planar circuit; Segmentation; Desegmentation; Point matching; Open boundary; Short boundary