

# SC 网络分析的标度-Pauper 算法\*

刘 鉴 平

(北京工业大学 无线电电子学系)

## 提 要

本文讨论了一种 SC 网络的频域分析方法。首先探讨了 SC 网络的标度性质。根据这条性质和特定的 Pauper 算法,可以用积木块法将 SC 网络用一个由放大器、电阻和电容组成的连续时间模拟电路来等效。于是,SC 网络的频率响应和灵敏度可以调用现有的标准模拟电路分析程序算出,而无须编制专用程序。与已有方法比较,本方法具有计算速度快的优点。

## 一、引 言

分析由电容、周期时钟控制开关和运算放大器组成的 SC 网络,是当前电路理论的一个重要课题。

最近,人们发展了若干种用连续时间等效电路来分析 SC 网络的方法<sup>[1-3]</sup>。这些方法的思路是将 SC 网络用常规的模拟电路来模型化。而模拟电路的频率响应与原 SC 网络的频率响应一致。因此,可以调用现有的标准模拟电路分析程序来对 SC 网络进行分析,而无须编制专用的分析程序。在这些方法中,Pauper 算法是比较好的一种。

在本文中,我们将讨论一种在 Pauper 算法基础上发展起来的算法,即标度-Pauper 算法。它利用了 SC 网络的阻抗标度性质和导出 SC 网络等效电路的积木块法。它是分析 SC 网络的一个较好方法。

## 二、SC 网络的标度性质

先介绍用约束网络分析 SC 网络的方法<sup>[4,5]</sup>。把运算放大器从 SC 网络  $\mathcal{N}$  中移去,剩下的就是一个无约束 SC 网络  $\mathcal{N}_p$ 。对于  $\mathcal{N}_p$  可以列写出节点方程<sup>[6]</sup>

$$\begin{bmatrix} \hat{I}^c \\ \hat{I}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^c C S^c & -Z^{-1} I^c C S^0 \\ -Z^{-1} I^0 C S^c & I^0 C S^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{V}^c \\ \hat{V}^0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

或是简洁地表示为

$$\hat{I} = \hat{Y}_p \hat{V}, \quad (2)$$

式中,  $\hat{I}^c(\hat{I}^0)$  为偶(奇)相电流矢量;  $\hat{V}^c(\hat{V}^0)$  为偶(奇)相节点电压矢量;  $S^c(S^0)$  为偶(奇)相开关矩阵;  $I^c(I^0)$  为偶(奇)相网络电流矩阵;  $C$  为电容节点导纳矩阵;  $Z^{-1} = e^{-sT/2}$ ;  $T$  为时钟周期,  $s$  为复频率。

\* 1982年12月4日收到。

因为  $I^c$ 、 $I^0$ 、 $S^c$  和  $S^0$  都是仅含元素 1 或 0 的稀疏矩阵, 所以,  $\hat{Y}_p$  中的任意元素  $\hat{Y}_{ij}$  应具有如下形式:

$$\hat{Y}_{ij} = \hat{Y}_{ij}(Z^{-1}, C_{ij}) = \sum C_{ij}(A_K + A_q \cdot Z^{-1}), \quad (3)$$

式中,  $\sum$  表示对  $\hat{Y}_{ij}$  所含的全部成分求和;  $A_K$  和  $A_q$  则是取值为  $\pm 1$ , 或 0 的开关函数.

现加入运算放大器. 根据它们对  $\mathcal{N}_p$  所施加的约束, 需要对方程(1)作适当的修正, 即删去约束作用产生的全部非独立方程. 于是, 可以获得节点方程

$$\tilde{I} = Y \tilde{V}, \quad (4)$$

亦即

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}^c \\ \dots \\ \tilde{I}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{V}^c \\ \dots \\ \tilde{V}^0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

显然,  $Y$  中的任意元素仍然具有如下形式

$$y_{ij} = y_{ij}(C_{ij}, Z^{-1}) = \sum C_{ij}(A_K + A_q Z^{-1}). \quad (6)$$

省去变量  $\tilde{I}$  和  $\tilde{V}$  的上标, 并设激励网络的电流仅有  $I_1$ ; 输入节点为 1, 输出节点为  $n$ , 则根据方程组(5), 可以用余因子法求得

$$V_n = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} I_n, \quad V_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1. \quad (7)$$

于是, 可以求出网络函数

$$Z_T = \frac{V_n}{I_1} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} \quad (\text{转移阻抗}), \quad (8)$$

$$Y_i = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} \quad (\text{输入导纳}), \quad (9)$$

$$A_v = \frac{V_n}{V_1} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}} \quad (\text{电压传递函数}), \quad (10)$$

.....,

式中,  $\Delta$  和  $\Delta_{ij}$  分别是  $Y$  的行列式和第  $i$  行, 第  $j$  列的余因子.

以上介绍的约束网络法, 可以方便地使用来分析 SC 网络<sup>[4]</sup>, 但我们目前的主要兴趣是使用它引出的某些结果, 来导出 SC 网络的阻抗标度性质.

假若我们对 SC 网络中的每个电容都标度以一个因子  $\alpha$ , 那么, 式(5)中的节点矩阵  $Y$  的典型登记项将作如下的变换

$$y(C, Z^{-1}) \rightarrow y(\alpha \cdot C, Z^{-1}). \quad (11)$$

根据式(6), 我们有

$$y(\alpha \cdot C, Z^{-1}) = \alpha \cdot y(C, Z^{-1}). \quad (12)$$

令  $\Delta'$  和  $\Delta'_{ij}$  分别为网络标度  $\alpha$  后节点矩阵的行列式和余因子, 则由式(12), 可以找出如下的重要关系

$$\Delta' = \alpha^n \cdot \Delta, \quad (13)$$

$$\Delta'_{ij} = \alpha^{n-1} \cdot \Delta_{ij}. \quad (14)$$

现记 SC 网络的网络函数为  $\mathcal{F}(C_i, Z^{-1})$ , 利用式 (8)、(9)、(10)、(13) 和 (14), 就可以得到如下式所表述的 SC 网络的阻抗标度性质

$$\mathcal{F}(\alpha \cdot C_i, Z^{-1}) = \alpha^{\dim(\mathcal{F})} \cdot \mathcal{F}(C_i, Z^{-1}), \quad (15)$$

式中,  $\dim(\mathcal{F})$  是网络函数的因次齐次性阶数, 它可以由以下关系确定

$$\dim(\mathcal{F}) = \begin{cases} -1, & \mathcal{F} \text{ 为阻抗函数;} \\ 0, & \mathcal{F} \text{ 为传递函数;} \\ 1, & \mathcal{F} \text{ 为导纳函数.} \end{cases} \quad (16)$$

上面我们是以包含两相时钟的 SC 网络为模型来证明的, 但是, 依据类似的思路不难证明, 包含  $N$  相时钟的 SC 网络也具有同样的阻抗标度性质.

将 SC 网络的网络函数表记为  $S$  和  $T$  的显函数  $F(C_i, T, S)$ , 那么, SC 网络的频率标度性质可以表述为\*

$$\mathcal{F}(C_i, \alpha \cdot T, S) = \mathcal{F}(C_i, T, \alpha \cdot S). \quad (17)$$

另外, 根据式 (15)、(17) 表述的标度性质, 可以导出如下的两条 SC 网络的灵敏度不变性质

$$(I) \quad \sum_i S_{C_i}^{\mathcal{F}} = \dim(\mathcal{F}) \quad (18)$$

$$(II) \quad S_T^{\mathcal{F}} = S_S^{\mathcal{F}} \quad (19)$$

这些性质的重要性是不言而喻的, 但对它们的充分讨论超出了本文的范围, 故不在这里进行<sup>[5]</sup>.

### 三、Pauper 算法

文献[7]介绍了导出 SC 网络的  $Z$  域等效电路的积木块法, 并且讨论了用信号流图来分析等效电路的方法. 在一般情况下, 这是可行而且有效的. 但是, 当网络的规模比较大、比较复杂时, 有必要寻找更有力的分析手段, 于是, 适当的机辅分析方法也就应运而生了.

由于  $Z$  域等效电路中包含有贮阻器 (storistor) 这样的特殊元件, 所以, 无法直接套用现有的标准电路分析程序来完成机辅分析. Pauper 算法解决这个问题的办法是, 用双线性变换, 将  $Z$  域等效电路中的各个贮阻器变换为由常规元件 (如  $RL$ ) 组成的电路, 从而使整个  $Z$  域等效电路转换为连续时间等效电路. 于是, 就可以直接调用现成的模拟电路分析程序了.

双线性变换的映射法则是

$$Z^{-1} = \frac{2/T - S}{2/T + S}. \quad (20)$$

\* 网络函数的标度性质一般有二, 即阻抗标度性质和频率标度性质. 为了使我们的讨论比较完全, 现将后者简略说明如下.

SC 网络的网络函数是以  $Z$  为复频率变量的. 由  $Z = e^{sT}$ , 可以看出, 对复频率  $s$  标度以一个因子  $\alpha$  后, 必须对采样周期  $T$  标度  $\alpha^{-1}$ , 才能保持  $Z$  不变, 也就是说, 才能使网络函数  $\mathcal{F}(C_i, Z^{-1})$  保持不变. 这就是我们导出 SC 网络的频率标度性质的根据.

令  $S = \sigma + j\omega$ , 我们有

$$Z = \gamma e^{j\theta}, \quad (21)$$

式中

$$\gamma = \left[ \frac{(2/T + \sigma)^2 + \omega^2}{(2/T - \sigma)^2 + \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{2/T + \sigma} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{2/T - \sigma} \right). \quad (23)$$

显然

$$\begin{cases} \gamma > 1, & \text{对于 } \sigma > 0; \\ \gamma = 1, & \text{对于 } \sigma = 0; \\ \gamma < 1, & \text{对于 } \sigma < 0. \end{cases}$$

可见, 双线性变换具有如下的映射性质: (1) 它将  $S$  平面的左半平面映射为  $Z$  平面上单位圆  $|Z| = 1$  的内部, 右半平面映射为  $Z$  平面上单位圆  $|Z| = 1$  的外部; (2) 它将  $S$  平面的虚轴映射为  $Z$  平面上的单位圆  $|Z| = 1$ . 性质 (1) 保证了使一个稳定的  $Z$  域等效电路变换为一个稳定的连续时间模拟电路. 性质 (2) 则保证了使连续时间模拟电路的频率特性完全反映  $Z$  域等效电路的频率特性.

对于贮阻器  $G_z = K \cdot Z^{-1}$ , 使用双线性变换, 于是有

$$G'_z(S) = K \cdot \frac{2/T + S}{2/T - S} \quad (24)$$

将式 (24) 所给的导纳综合为  $RL$  电路 (见图 1), 就实现了所谓的 Pauper 算法. 在该电路中

$$R_1 = -\frac{1}{K}, \quad R_2 = \frac{1}{2K}, \quad L = \frac{T}{4K}. \quad (25)$$

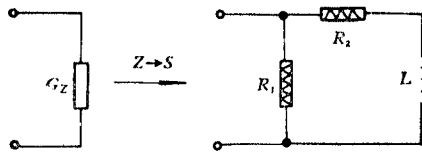


图 1 Pauper 算法

建立 SC 网络的连续时间等效电路, 可以直接由 SC 网络出发, 不经过  $Z$  域等效电路这个中间步骤, 也就是说, 利用 Pauper 算法, 建立 SC 网络的基本积木块及其连续时间等效电路表<sup>[7]</sup>, 再通过这个表来导出等效电路.

应该注意, 双线性变换也有其不足之处, 这就是它造成的频率扭曲效应 (frequency warping effects). 因

$$\begin{aligned} S = \sigma + j\omega &= \frac{2}{T} \cdot \frac{(1 - e^{-j\theta})}{(1 + e^{-j\theta})} = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2}} \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{j \sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = j \left[ \frac{2}{T} \tan(\theta/2) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

故

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta}{2}. \tag{27}$$

可见,模拟频率变量  $\omega$  与离散频率变量  $\theta$  之间存在以上的非线性关系,也就是说, Z 域等效电路在频率  $\theta_1$  的频响却等于连续时间等效电路在频率  $\omega_1 = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta_1}{2}$  的频响,这就造成了分析误差. 幸运的是这种误差在时钟频率很高时非常小,只是在高频段才比较突出.

### 四、标度-Pauper 算法

可以看出,应用 Pauper 算法后,与原 Z 域等效电路相比,导出的连续时间等效电路中增加了许多新的节点和回路,扩大了等效电路的规模,因而降低了分析速度. 这是我们所不希望的.

能否做到在运用 Pauper 算法后,等效电路的节点数不增加呢? 根据前面给出的 SC 网络的阻抗标度性质,是可以做到这一点的. 因为,网络标度因子既可以是一个标量,也可以是一个复频率变量;所以,假若我们选取的标度因子是

$$f(s) = \frac{2}{T} + s, \tag{28}$$

那么,就可以达到目的了.

记 SC 网络的电压传递函数为  $\mathcal{F}(G_i, G_{zi})$ ,  $G_i$  是 Z 域等效电路中的电导,  $G_{zi}$  是贮阻器. 由标度性质,我们有

$$\mathcal{F}(G_i, G_{zi}) = \mathcal{F}(G_i f(s), G_{zi} f(s)). \tag{29}$$

显然

$$G_i = C_i, \quad G_{zi} = C_i \cdot Z^{-1}. \tag{30}$$

应用 Pauper 算法后

$$G_{if}(s) = C_i \left( \frac{2}{T} + s \right), \tag{31}$$

$$G_{zif}(s) = C_i \left( \frac{2}{T} - s \right). \tag{32}$$

可见,只要将 Z 域等效电路中的电导变换为并联的电导和电容,再将贮阻器变换为并联的电导和负电容,就可以在不增加节点的情况下,将一个 Z 域等效电路变换为一个模拟电路(见图 2). 这样,就实现了标度-Pauper 算法.

我们知道,SC 网络中的一个元件将变换为等效电路中的多个元件,因此,使得用等效电路来分析灵敏度的工作复杂化了. 以 Z 域等效电路为例: 因

$$\mathcal{F}(C_i, Z^{-1}) = \mathcal{F}(G_i, G_{zi}), \tag{33}$$

显然

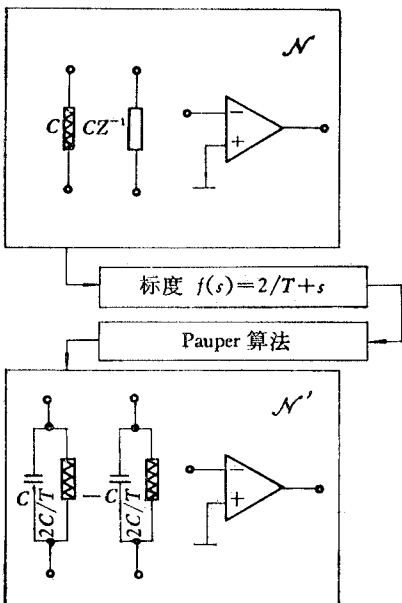


图 2 标度-Pauper 算法

$$S_{C_i}^{\sigma} = \sum S_{G_i}^{\sigma} \cdot S_{C_i}^{G_i} + \sum S_{G_{Z_i}}^{\sigma} \cdot S_{C_i}^{G_{Z_i}} \quad (34)$$

由式 (30)

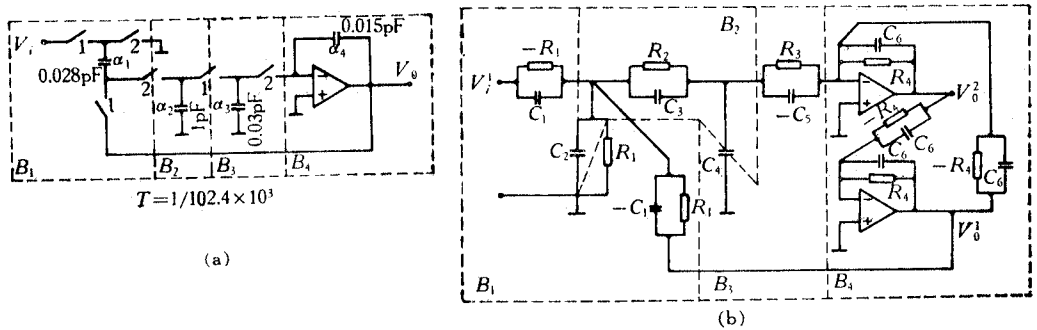
$$S_{C_i}^{G_i} = S_{C_i}^{G_{Z_i}} = 1, \quad (35)$$

故

$$S_{C_i}^{\sigma} = \sum S_{G_i}^{\sigma} + \sum S_{G_{Z_i}}^{\sigma} \quad (36)$$

式 (36) 意味着, SC 网络的灵敏度可以通过等效电路算出. 方法是将所有对应于单个 SC 网络中的电容的等效电路元件对灵敏度的贡献求和, 就可以得到网络对该电容的灵敏度. 同样的原理, 可以应用于用等效模拟电路来求解 SC 网络的灵敏度. 事实上, 使用伴随网络法, 只要对等效电路进行两次分析, 就可以算出全部的灵敏度.

现举例说明标度-Pauper 算法的使用. 图 3(a) 所示的是一个 SC 低通滤波器, 应用积木块法和标度-Pauper 算法, 就可以获得如图 3(b) 所示的等效模拟电路.



(a) SC 低通滤波器

$$R_1 = \frac{2\alpha_1}{T} \quad R_2 = \frac{2\alpha_2}{T} \quad R_3 = \frac{2\alpha_3}{T} \quad R_4 = \frac{2\alpha_4}{T} \quad C_1 = \alpha_1$$

$$C_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \quad C_3 = \alpha_2 \quad C_4 = 2(\alpha_2 + \alpha_3) \quad C_5 = C_3 \quad C_6 = C_4$$

(b) 等效模拟电路

图 3

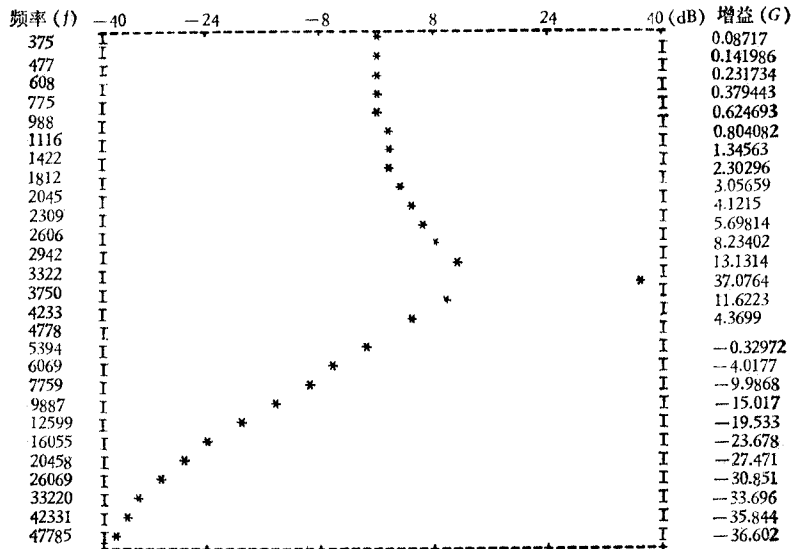


图 4 等效电路机辅分析的频率响应

具体的机辅分析是在 TP-803 型微型计算机上完成的。该机内存为 28K, 程序语言为 BASIC, 并与汇编语言兼容。用来进行机辅分析的程序根据一般节点分析法形成\*。考虑到 BASIC 是一种解释性的高级语言, 微型机运算速度又不太快, 常使程序执行时间过长。为了节省机时, 故将该程序中最费机时的 Gauss 消元子程序和节点导纳矩阵的建立程序两部分使用汇编语言来编制, 从而提高了运算的速度。

调用该程序对图 3(b) 所示的等效电路进行分析, 就可以得到如图 4 所示的频率响应曲线。将它与对实际电路测量得到的频率响应曲线做比较, 可见其准确程度是相当令人满意的<sup>[8]</sup>。

## 五、结 束 语

SC 网络的标度性质是极其重要的, 本文提出并证明了这个性质, 并成功地将它应用于分析 SC 网络。

标度-Pauper 算法与 Pauper 算法本属异曲同工, 但前者显然具有一定的优越性, 这集中地反映在等效电路的导出方式和计算速度上。

从分析实例来看, 低阶的 SC 网络在变换为等效模拟电路后, 电路的规模大大增加, 电路的阶次也有升高。因此, 我们下一步的工作是利用宏模型的方法对等效电路进行化简, 产生出更简单, 因而是更容易分析的等效电路, 使 SC 网络的分析更为方便。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] G. Müller and G. C. Temes, *Electron. Lett.*, **16**(1980), 852.
- [ 2 ] G. Müller and G. C. Temes, *ibid.*, **17**(1981), 942.
- [ 3 ] A. Knob and R. Dessoulavy, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-28**(1981), 947.
- [ 4 ] E. Hökenek and G. S. Moschytz, *IEE Proc., Pt. G*, **127**(1980), 21.
- [ 5 ] G. S. Moschytz, *Linear Integrated Networks: Fundamentals*, Van Nostrand-Reinhold, 1975, Chap. 3.
- [ 6 ] C. F. Kurth and G. S. Moschytz, *IEEE Trans. on CAS*, **CAS-26**(1979), 93.
- [ 7 ] 刘鉴平, 电子科学学刊, **6**(1984), 41.
- [ 8 ] B. Hosticka, R. W. Broderson and P. R. Gray, *IEEE Trans. on SC*, **SC-12**(1977), 592.

## A SCALING-PAUPER'S ALGORITHM FOR SC NETWORKS ANALYSIS

Liu Jianping

(Department of Radio Electronics, Beijing Polytechnic University)

A general approach is presented for the frequency-domain analysis of SC networks. At first, the scaling property of SC network is discussed. From the scaling property it is pointed out that the SC network can be modeled by an analogue circuit consisting of amplifiers, resistors and capacitors with real constant element values using scaling-Pauper's algorithm. Thus, the SC network frequency response and sensitivity can be found by using available standard analogue circuit analysis program.

\* 该程序是我校工业自动化系沈阳同志为分析一般网络而编制的。